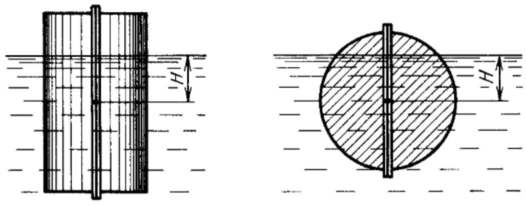
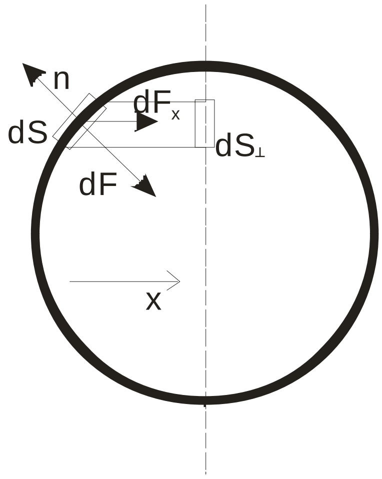
“Fizikos olimpo” 2008/2009 m.m. pavasario sesijos mechanikos kontrolinis darbas I kurso moksleiviams
Paruošė VU Fizikos fakulteto M1 kurso studentas Donatas Majus 2009-03-16

1. Plūduras sudarytas iš dviejų a) puscilindrių uždarais galais, b) pussferių. Plūduro ilgis $L$, radiusas $R$, plūduro geometrinis centras yra paniręs per $H$ vandenyje (tankis $\rho$). Kokia jėga puscilindriai (pussferės) yra spaudžiami vienas prie kito ?

Sprendimas




Plūduro horizontalus pjūvis:




Paimkime cilindrinio plūduro pjūvį. Išskyrę mažą sienelės plotelį dS, rasime jėga, kuria sukuria vandens slėgis į plotelį dS. n – paviršiaus normalės krypties vienetinis vektorius. (Laikome, kad plūduro viduje yra atmosferos slėgis, todėl nagrinėsime tik vandens iš išorės sukuriamą slėgį.)

Puscilindrius vieną prie kito spaudžia tik jėgos dF dedamoji x. Tegul vienetinis vektorius išilgai x ašies yra i. Kampas tarp jėgos dF ir ašies x yra α. Plotelio aukštis dh (vertikalus matmuo).

Kaip matome, dFx yra proporcinga nagrinėjamo plotelio projekcijai į lietimosi plokštumą.

$dF = pdS$ arba vektoriškai:

$$d\vec{F} = -pd\vec{S}$$

kur $d\vec{S} = \vec{n}dS$

$dF = pdS\cos\alpha$ arba vektoriškai:

$$dF_x = d\vec{F}\cdot\vec{i} = -p\left(d\vec{S}\cdot\vec{i}\right) = pdS_\perp = pdydh$$

Skaičiuosime, kokia jėga dvi dalys spaudžiamos viena prie kitos. Gautą sandaugą galima įsivaizduoti kaip vidutinio slėgio į puscilindrį ρg(L/2+H)/2 ir lietimosi ploto 2R(L/2+H) sandaugą.

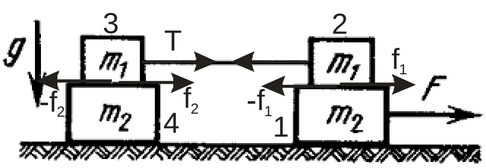
$$F_x = \int_S dF_x = \iint_S pdydh = \int_0^{L/2+H}\int_0^{2R}\rho ghdhdy =$$

$$= \rho g2R\frac{1}{2}\left(L/2+H\right)^2 = \rho gR\left(L/2+H\right)^2$$

Antruoju atveju integralas sudėtingesnis, nes integravimo išilgai y koordinatės rėžiai priklauso nuo gylio (pjūvis nepastovus keičiantis gyliui), todėl patogu iš pradžių suskaičiuoti plono jėgą dF, kuria spaudžiami du ploni lankai (aukštis dh) vienas prie kito.

2. Tašelių sistema padėta ant horizontalaus lygaus stalo. Viršutiniai tašeliai sujungti netampriu siūlu. Trinties koeficientas tarp $m_1$ ir $m_2$ yra $\mu$. Dešinįjį apatinį tašelį veikia jėga $F$. Raskite kiekvieno tašelio pagreitį.

Sprendimas



Tašeliai sunumeruojami paveikslėlyje parodyta tvarka. Nagrinėjame tik horizontaliai veikiančias jėgas, nes vertikalaus judėjimo nėra. 1-ą tašelį veikia jėga F ir trinties tarp jo ir 2-o tašelio jėga –f1. 2-ą tašelį veikia trinties jėga f1 ir siūlo tempimo jėga T. 3-ą tašelį veikia trinties jėga -f2 ir siūlo tempimo jėga T. 4-ą tašelį veikia tik jėga f2. Veikiami skirtingų jėgų tašeliai gali judėti skirtingais pagreičiais a1, a2, a3 ir a4. Viršutiniai tašeliai sujungti netampriu siūlu todėl a2<=a3. Variantas a3>a2 negalimas, nes 2-asis "tempia" 3-ąjį, todėl lieka a2=a3. Tinties jėgos f1 ir f2 bendru atveju gali būti nelygios, tačiau abiejų maksimali vertė µm1g.

$$\begin{cases} F - f_1 = m_2 a_1 \\ \left.\begin{aligned} f_1 - T &= m_1 a_2 \\ T - f_2 &= m_1 a_3 \end{aligned}\right] \Rightarrow f_1 - f_2 = 2m_1 a_2 \\ f_2 = m_2 a_4 \end{cases}$$

$$a_1 \geq a_2 = a_3 \geq a_4$$

$$f_1, f_2 \leq \mu m_1 g$$

1. Panagrinėkime atvejį, kai visi trys pagreičiai skirtingi. Tuomet trinties jėgos įgyja maksimalias vertes, nes tašeliai juda viens kito atžvilgiu. Gaunamas prieštaravimas pradinei sąlygai, kad pagreičiai skirtingi, vadinasi taip būti negali.

$$f_1, f_2 = \mu m_1 g$$

$$f_1 - f_2 = 2m_1 a_2 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$a_4 = 0 = a_2$$

2. Tegul visi kūnai juda vienodu pagreičiu. Tuomet juos galime laikyti kaip vieną kietą kūną, judantį pagreičiu a. Taip bus galima, kai trinties koeficientas bus didesnis už tam tikrą vertę.

$$f_1 = \mu m_1 g$$

$$a = \frac{F}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\begin{cases} f_1 = F - m_2 a = F \dfrac{2m_1 + m_2}{2(m_1 + m_2)} \\ f_2 = m_2 a = F \dfrac{m_2}{2(m_1 + m_2)} \\ f_1, f_2 \leq \mu m_1 g \end{cases}$$

$$\mu \geq \frac{F}{g} \frac{2m_1 + m_2}{2m_1(m_1 + m_2)}$$

3. Tegul 2,3 ir 4 kūnai juda kartu pagreičiu a2, pirmasis juda pagreičiu a1.

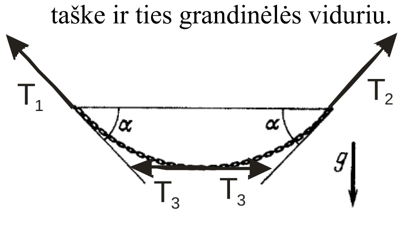
$$\begin{cases} F - \mu m_1 g_1 = m_2 a_1 \\ \left.\begin{aligned} \mu m_1 g - f_2 &= 2m_1 a_2 \\ f_2 &= m_2 a_2 \end{aligned}\right] \Rightarrow \mu m_1 g = 2m_1 a_2 + m_2 a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{F - \mu m_1 g}{m_2} \\ a_2 = \dfrac{\mu m_1 g}{2m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$a_1 > a_2 \Rightarrow \mu < \frac{F}{g} \frac{2m_1 + m_2}{2m_1(m_1 + m_2)}$$

4. Galima būtų nagrinėti atvejį, kai 1,2,3 juda pagreičiu a1, o 4-as kitu pagreičiu a4, tačiau gautume, kad toks atvejis neįmanomas. Tai galima suprasti iš to, kad 2-ojo ir 3-ojo atvejų trinties koeficiento dydžio sąlygos kartu perdengia visas vertes. (P.S. įsitikinkite patys)

3. Grandinės galai pritvirtinti prie taškų, esančių tame pačiame aukštyje (3 pav.). Artimiausias prikabinimui grandinėlės narelis sudaro kampą $\alpha$ su horizontu. Raskite grandinėlės įtempimo jėgas veikiančias pakabinimo taške ir ties grandinėlės viduriu.



Sprendimas

Pakabinimo taškuose grandinėlės įtempimo jėgos $T_1$ ir $T_2$. Išskaidykime jas į vertikalias ir horizontalias komponentes.

$$T_{1v} = T_1 \sin\alpha$$

$$T_{1h} = T_1 \cos\alpha$$

Kadangi grandinėlė nejuda:

$$T_{1v} + T_{2v} = mg,$$

$$T_{1h} - T_{2h} = 0,$$

$$T_1 = T_2 = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

Vidurio taške grandinėlė horizontali, tad įtempimo jėga $T_3$:

$$T_3 = T_{1h} = T_{2h} = T_1 \cos\alpha = \frac{mg}{2\tan\alpha}$$