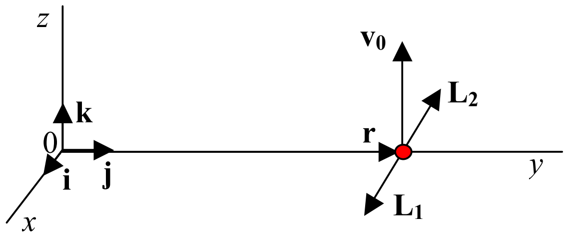
Fizikos olimpas
Sesija 2008 03 12-16

1. Masės $m = 0{,}300\mathbf{kg}$ kūnas mestas vertikaliai aukštyn iš taško, kurio koordinatės (0; 5,00; 0) (metrais) greičiu $v_0 = 6{,}00\mathbf{m/s}$. Rasti judėjimo kiekio momento prieaugį $\Delta\mathbf{L}$ koordinačių sistemos pradžios atžvilgiu per visą kūno lėkimo laiką (jam sugrįžus į pradinį tašką). z-ašis nukreipta vertikaliai aukštyn. Oro pasipriešinimo nepaisyti.

Ats.: $\Delta\mathbf{L} = -18{,}0\mathbf{i}(\mathbf{kgm}^2/\mathbf{s})$.

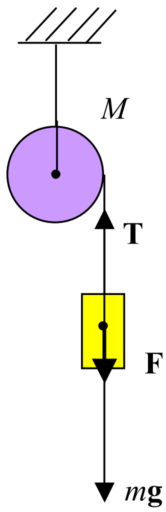
Sprendimas

$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1$
$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] = m[\mathbf{rv}]$.
Tuomet $\mathbf{L}_2 = -mvy\mathbf{i}$, o $\mathbf{L}_1 = mvy\mathbf{i}$.
Taigi, $\Delta\mathbf{L} = -2mvy\mathbf{i} = -18{,}0\mathbf{i}$ kgm²/s.



2. Spindulio R ir masės M vienalytį diską, kurio ašis įtvirtinta prie lubų, įsuka masės m svarelis, kabantis ant susukto plono netąsaus lengvo siūlo, kuris nusivynioja nuo disko. Svarelis paleidžiamas judėti be pradinio greičio. Kokiu pagreičiu juda svarelis? Kokia siūlo įtempimo jėga? Kokiu kampiniu pagreičiu sukasi diskas? Koks disko kampinis greitis tuo metu, kai svarelis nusileidžia dydžiu h?

Sprendimas:



Užrašome antrąjį Niutono dėsnį:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR = \dfrac{MR^2}{2}\dfrac{a}{R} \end{cases}.$$

Iš čia

$$a = \frac{2mg}{2m+M}.$$

$$T = \frac{Mmg}{2m+M}.$$

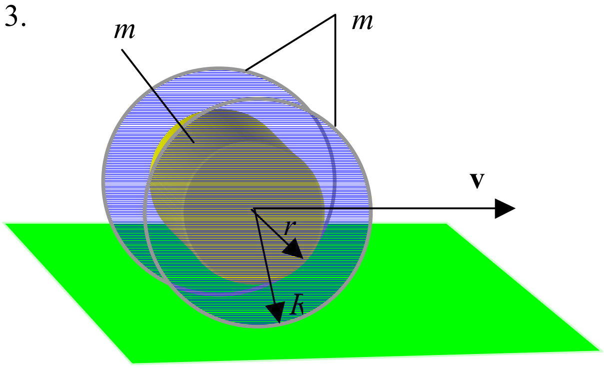
Linijinį greitį galima rasti iš

$$v = \sqrt{2ah}.$$

Bet $\omega = \dfrac{v}{R}$, todėl $\omega = \dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{mgh}{2m+M}}$.

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{2mg}{R(2m+M)}.$$

3.



Kokią kinetinę energiją turi horizontalia plokštuma be praslydimo riedanti greičiu v špūlė? Špūlę sudaro vidinis vienalytis masės m ir spindulio r cilindras ir du vienalyčiai didesnio spindulio R ir vienodos masės m diskai.

Sprendimas

Kinetinė energija susideda iš masių centro slenkamojo judėjimo kinetinės energijos ir sukamojo judėjimo apie masių centrą kinetinės energijos, t.y.

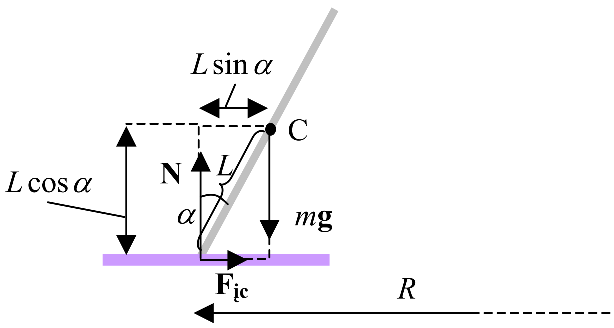
$$W_{kin} = \frac{3mv^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{3mv^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(4 + \frac{r^2}{2R^2}\right).$$

4. Motociklininkas važiuoja horizontaliu keliu 68 km/h greičiu ir daro posūkį, kurio kreivumo spindulys 120 m. Kokiu kampu nuo vertikalės turi palinkti motociklininkas, kad posūkyje nenuvirstų? Koks šis kampas, jei greitis 100 km/h?

Ats.: Kai greitis 68 km/h, $\alpha = arctg\dfrac{v^2}{gR} = 16{,}9°$, o kai 100 km/h, $\alpha = 33{,}2°$.

Sprendimas

1- as būdas



Vertikalia kryptimi jėgų atstojamoji lygi 0, todėl $N = mg$.

Motociklininkas juda apskritimu, todėl jį veikia įcentrinė jėga $F_{įc} = \dfrac{mv^2}{R}$.

Masės centro atžvilgiu motociklininką veikiančių jėgos momentų atstojamoji lygi 0 (motociklas stabilus ir nevirsta), todėl

$$NL\sin\alpha = F_{įc}L\cos\alpha$$

Taigi,

$$\alpha = arctg\frac{v^2}{gR} = 16{,}9° \ .$$

Jei $v = 100\,\mathbf{km/h}$, $\alpha = 33{,}2°$.

2- as būdas

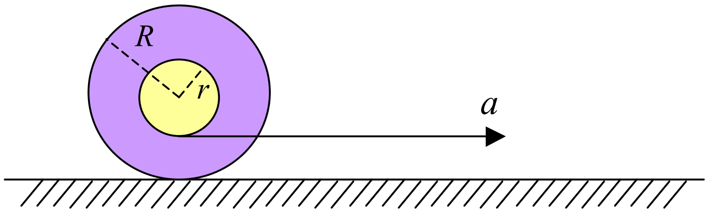
Panagrinėkime motociklą sistemos, nejudamai surištos su juo, atžvilgiu. Tai neinercinė sistema, judanti su įcentriniu pagreičiu, nukreiptu į trajektorijos kreivumo centrą. Pagal Dalambero principą, įvedame inercijos jėgą, lygią $-\mathbf{F}_{įc}$. Šioje sistemoje motociklas nevirsta, todėl jo lietimosi su žeme taško atžvilgiu jėgų momentų atstojamoji lygi 0, t.y.

$$mgL\sin\alpha = \frac{mv^2}{R}L\cos\alpha, \text{ iš čia}$$

$$\alpha = arctg\frac{v^2}{gR} = 16{,}9°, \text{ kai } v = 68\,\mathbf{km/h}, \text{ ir}$$

$v = 100\,\mathbf{km/h}$, $\alpha = 33{,}2°$, kai $v = 100\,\mathbf{km/h}$.

5. Spindulio *R* špūlė su užvyniotu ant jos vidinės dalies siūlu traukiama grindimis už siūlo galo horizontalia kryptimi taip, kad traukiamo siūlo galo pagreitis yra *a* (žiūr. brėž.). Špūlės vidinės dalies su siūlais spindulys *r*. Koks turi būti trinties koeficientas tarp špūlės ir grindų μ_s, kad špūlė nesisuktų? Kaip suktųsi špūlė, jei trinties koeficientas būtų mažesnis už μ_s? Didesnis už μ_s?



Ats.: $\mu_s = \dfrac{ra}{(R-r)g}$. Jei $\mu < \mu_s$, špūlė suktųsi prieš laikrodžio rodyklę (žiūrint į brėžinio plokštumą), o jei $\mu > \mu_s$ - pagal laikrodžio rodyklę.

Sprendimas

2-asis Niutono dėsnis špūlei horizontalia kryptimi

$$F - \mu mg = ma \ ,$$

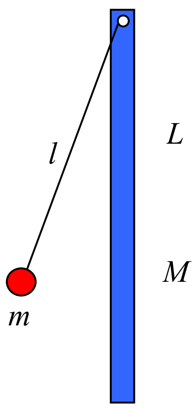
kur *F* – jėga, kuria tempiamas siūlas.
Jei špūlė nesisuka, centro atžvilgiu ją veikiantis atstojamasis jėgos momentas lygus 0, t.y.

$$Fr = \mu mgR$$

Iš šių lygčių eliminavę *F*, gauname,

$$\mu = \frac{ra}{g(R-r)}.$$

6. Plonas ilgio *L* ir masės *M* strypas pakabintas viename jo gale ir gali sukiotis be trinties. Tame pačiame taške pririštas lengvas ilgio *l* (*L*>*l*) siūlas su masės *m* mažu rutuliuku kitame gale. Rutuliukas atlenkiamas tam tikru kampu ir paleidžiamas. Kokiam siūlo ilgiui rutuliukas po smūgio sustoja, jei smūgis tamprus?



Ats.: $l = L\sqrt{\dfrac{M}{3m}}$.

Sprendimas

Užrašome judesio kiekio momento pakabinimo taško atžvilgiu ir energijos tvermės dėsnius duotai sistemai:

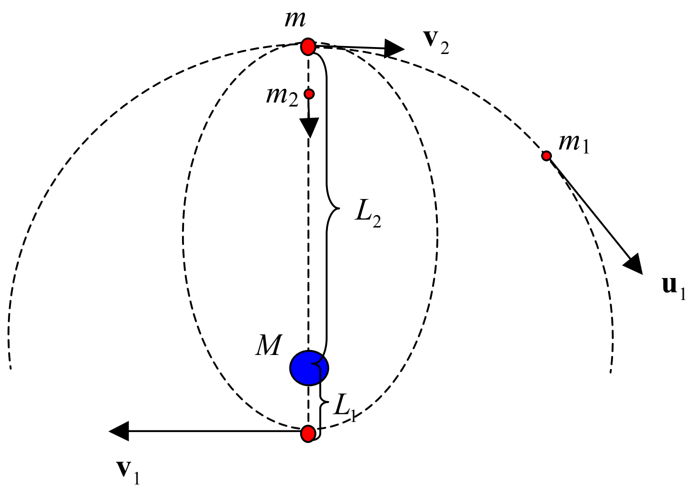
$$\begin{cases} mvl = I\omega \\ \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{I\omega^2}{2} \end{cases}.$$

Čia tarėme, kad prieš smūgį rutuliukas turėjo greitį v, strypo inercijos momentas pakabinimo ašies atžvilgiu $I = \dfrac{ML^2}{3}$, po smūgio strypas įgijo kampinį greitį ω tos pačios ašies atžvilgiu, o taip pat pasinaudojome sąlyga, kad smūgis tamprus, t.y. visa kinetinė rutuliuko energija prieš smūgį perduota strypui. Išsprendę lygčių sistemą, gauname

$$l = L\sqrt{\frac{M}{3m}}.$$

7. Masės $m = 8{,}0\mathbf{t}$ raketa skrieja aplink Žemę elipsės orbita. Perigėjuje raketa nuo Žemės centro nutolusi $L_1 = 7500\mathbf{km}$, o apogėjuje – 12000**km**. Apogėjuje raketa sprogsta, skildama į dvi skirtingų masių dalis. Pirmoji dalis toliau skrieja aplink Žemę apskritimine orbita, o antroji dalis vertikaliai nukrinta ant Žemės. Rasti šių raketos dalių mases.

Sprendimas



Užrašome judesio kiekio momento ir energijos tvermės dėsnius perigėjui ir epogėjui visai raketai ir jos daliai m_1, o taip pat pastarajai ir įcentrinės jėgos išraišką:

$$\begin{cases} mv_1L_1 = mv_2L_2 \\ \dfrac{mv_1^2}{2} - \dfrac{mv_2^2}{2} = GMm\left(\dfrac{1}{L_1} - \dfrac{1}{L_2}\right) \\ mv_2L_2 = m_1u_1L_2 \\ \dfrac{m_1u_1^2}{L_2} = G\dfrac{Mm_1}{L_2^2} \end{cases}$$

Čia M - Žemės masė, G – gravitacijos konstanta.
Iš lygčių eliminuojame GM :

$$\begin{cases} v_1L_1 = v_2L_2 \\ v_1^2 - v_2^2 = 2u_1^2L_2\left(\dfrac{1}{L_1} - \dfrac{1}{L_2}\right) \\ mv_2 = m_1u_1 \end{cases} .$$

Lygtis pertvarkome tokiu būdu:

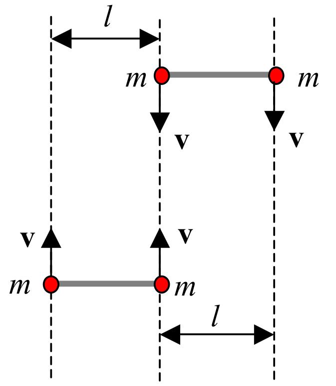
$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{L_2}{L_1} \\ \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^2 - 1 = 2\left(\dfrac{u_1}{v_2}\right)^2\left(\dfrac{L_2}{L_1} - 1\right) \\ \dfrac{u_1}{v_2} = \dfrac{m}{m_1} \end{cases}$$

Eliminuojame $\dfrac{u_1}{v_2}$ ir $\dfrac{v_1}{v_2}$:

$$\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 - 1 = 2\frac{m^2}{m_1^2}\left(\frac{L_2}{L_1} - 1\right) .$$

Iš čia $m_1 = m\sqrt{\dfrac{2L_1}{L_1 + L_2}} \approx 7{,}0\,\mathbf{t}$.

$$m_2 = m - m_1 = m\left(1 - \sqrt{\frac{2L_1}{L_1 + L_2}}\right) = 1{,}0\,\mathbf{t} .$$



8. Keturi vienodi maži rutuliukai, kurių kiekvieno masė $m = 0{,}200\,\mathbf{kg}$, sujungti poromis nesvariais strypeliais, kurių ilgis $l = 0{,}50\,\mathbf{m}$. Šie du hanteliai juda vienas į kitą vienodais greičiais $v = 2{,}00\,\mathbf{m/s}$ kaip parodyta brėžinyje. Du hantelių rutuliukai susiduria. Tarkite, kad smūgis absoliučiai tamprus.

a) Kaip judės hanteliai iš karto po susidūrimo?
b) Rasti hantelių sukimosi greitį ω.
c) Kiek laiko vyksta sukimasis?
d) Kaip judės hanteliai pasibaigus šiam laikui?

Dabar tarkite, kad smūgis absoliučiai netamprus.

a) Kaip dabar judės hanteliai po susidūrimo?
b) Kokiu greičiu v_C juda hantelių masės centrai?
c) Rasti hantelių sukimosi greitį ω'.
d) Kiek pakito sistemos mechaninė energija?

Sprendimas

Smūgis absoliučiai tamprus.

a) Po smūgio hanteliai suksis pagal laikrodžio rodyklę vienodu kampiniu greičiu, o hantelių masių centrai nejudami;
b) $\omega\frac{l}{2}=v$, t.y. $\omega=\frac{2v}{l}=\frac{2\cdot 2{,}0}{0{,}50}=8{,}0\mathbf{s}^{-1}$;
c) $\tau=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi l}{2v}=0{,}39\mathbf{s}$.
d) Praėjus šiam laikui, susiduria kiti hantelių rutuliukai, ir hanteliai toliau juda pastoviu greičiu v toldami vienas nuo kito.

Smūgis absoliučiai netamprus.

a) Po smūgio hantelių centrai juda tokia pačia kryptimi kaip ir prieš smūgį. Hanteliai sukasi apie masių centrus pagal laikrodžio rodyklę;
b) Hantelių centrų linijinių greičių moduliai vienodi: $v_C=\frac{v}{2}=1{,}00\mathbf{m}/\mathbf{s}$;
c) $\omega'=\frac{v}{l}=4{,}0\mathbf{s}^{-1}$.
d) $\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\frac{I\omega^2}{2}}{4\frac{mv^2}{2}}=\frac{ml^2\frac{v^2}{l^2}}{2mv^2}=\frac{1}{2}$.

9. Medinis strypelis, kurio masė $m=1{,}0\mathbf{kg}$ ir ilgis $l=40\mathbf{cm}$, gali suktis apie ašį, einančią per jo vidurį ir statmeną strypeliui. Į strypelio galą pataiko kulka, kurios masė $m_1=10\mathbf{g}$, lėkusi statmenai strypeliui greičiu $v=200\mathbf{m}/\mathbf{s}$. Rasti kampinį greitį, kuriuo pradės suktis strypelis, jei kulka jame smūgio metu užstringa. Kaip pasikeis bendra sistemos kinetinė energija?

Ats.: $\omega=\frac{6m_1v}{l(m+3m_1)}=29\mathbf{rad}/\mathbf{s}$; $\frac{T_2}{T_1}=\frac{3m_1}{m+3m_1}=3\%$.

Sprendimas

Pagal judesio kiekio tvermės dėsnį:

$m_1 v \frac{l}{2} = I\omega$. Čia strypelio ir įstrigusios jo gale kulkos inercijos momentas

$$I = m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{ml^2}{12} = \frac{3m_1 + m}{12} l^2 .$$

Iš čia $\omega = \frac{6m_1 v}{l(m+3m_1)} = 29\,\mathbf{rad/s}$.

Surandame kinetinę energiją prieš smūgį (T_1) ir po jo (T_2):

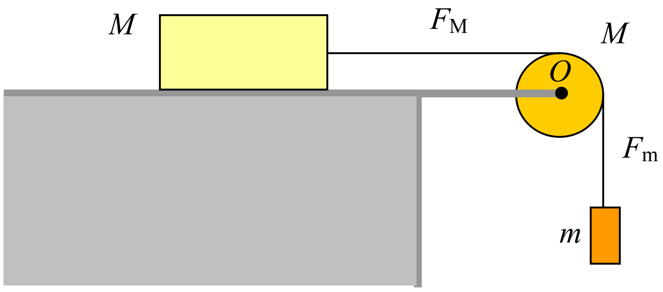
$$T_1 = \frac{m_1 v^2}{2},\ T_2 = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3m_1^2 v^2}{2(3m_1+m)} .$$

Taigi, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{3m_1}{m+3m_1} = 3\%$.

10. Ant horizontalaus stalo guli masės M tašelis, kuris gali stalu judėti be trinties. Tašelis netąsiu lengvu siūlu pririštas prie masės m svarelio ir permestas per vienalytį ritinio formos masės M skridinį (žiūr. brėž).

a. Tariant, kad skridinys nesisuka, o siūlas skridiniu slysta be trinties, apskaičiuoti kūnų pagreitį a, siūlo įtempimo jėgą F_m srityje tarp svarelio ir skridinio bei siūlo įtempimo jėgą F_M srityje tarp skridinio ir tašelio.

b. Apskaičiuoti tuos pačius dydžius tuo atveju, jei skridinys sukasi be trinties apie savo ašį O, o siūlas skridiniu nepraslysta.

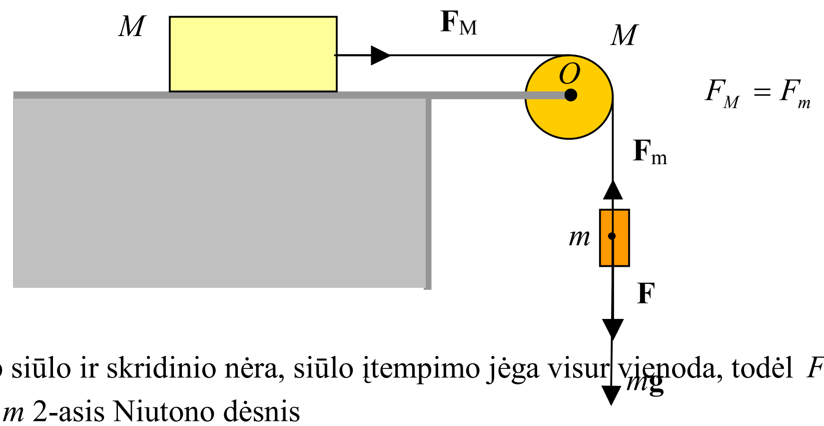


Ats.: a) $a = \frac{m}{m+M} g$; $F_m = F_M = \frac{mM}{m+M} g$;

b) $a = \frac{2m}{3M+2m} g$; $F_M = \frac{2mM}{3M+2m} g$; $F_m = \frac{3mM}{3M+2m} g$.

Sprendimas

a)



Jei trinties tarp siūlo ir skridinio nėra, siūlo įtempimo jėga visur vienoda, todėl $F_M = F_m$.

Tuomet masei m 2-asis Niutono dėsnis

$$F = mg - F_m = ma,$$

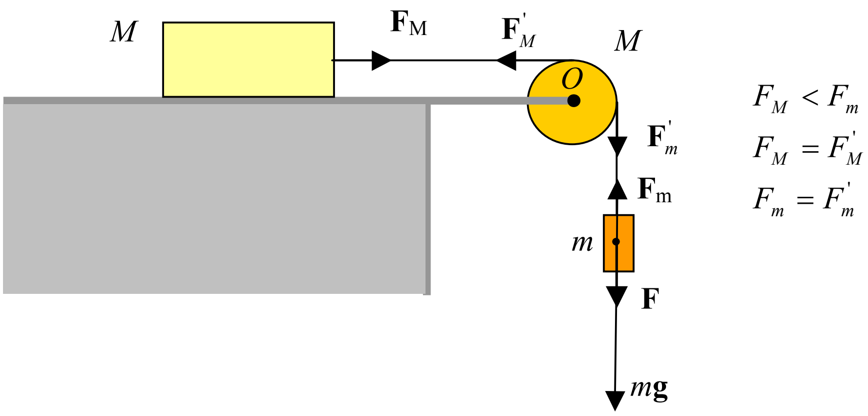
o masei M

$$F_M = Ma.$$

Tuomet iš šių lygčių nesunku gauti

$$a = \frac{m}{m+M}g \text{ ir } F_m = F_M = \frac{mM}{m+M}g.$$

b)



Šiuo atveju dėl esančios trinties tarp skridinio ir siūlo $F_M \neq F_m$. Skridinys sukasi pagal laikrodžio rodyklę, todėl $F_M < F_m$. Be to, siūlo įtempimo jėga ruožuose tarp tašelio ir skridinio bei tarp svarelio ir skridinio vienoda ir lygi atitinkamai F_M bei F_m. Tuomet galima užrašyti 2-ojo Niutono dėsnio lygtis tašeliui ir svareliui bei pagrindinę sukamojo judėjimo lygtį skridiniui, kurio inercijos momentas O ašies atžvilgiu $I = \frac{MR^2}{2}$. Be to, ryšys tarp linijinio pagreičio a, kuriuo juda tašelis ir svarelis, ir kampinio skridinio pagreičio yra $\varepsilon R = a$. Taigi gauname 3-ų lygčių sistemą:

$$\begin{cases} F_M = Ma \\ mg - F_m = ma \\ F_m R - F_M R = \dfrac{MR^2}{2}\dfrac{a}{R} \end{cases}.$$

Išsprendę šią lygčių sistemą gauname:

$$a = \frac{2m}{3M + 2m} g\,; \quad F_M = \frac{2mM}{3M + 2m} g\,;\ F_m = \frac{3mM}{3M + 2m} g\,.$$

11. Aukščio $h = 4{,}0\,\mathbf{m}$ vertikalus stulpas, nupjautas apačioje, virsta ant žemės. Rasti viršutinio stulpo galo linijinį greitį smūgio į žemę metu.

Ats.: $v = \sqrt{3gh} = 11\,\mathbf{m}/\mathbf{s}$.

Sprendimas

Pritaikome energijos tvermės dėsnį:

$$mg\frac{h}{2} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Čia $I = \dfrac{mh^2}{3}$, $\omega = \dfrac{v}{h}$.

Iš čia $v = \sqrt{3gh} = 11\,\mathbf{m}/\mathbf{s}$.

12. Dvi vienodos masių M valtys juda viena į kitą vienodais greičiais v_0. Prasilenkimo metu tarp valčių reikia pasikeisti vienodų masių m kroviniais. Kokie valčių greičiai po pasikeitimo kroviniais dviem atvejais: 1) Iš vienos valties krovinys permetamas į antrąją, o po to jos krovinys į pirmąją; 2) Kroviniai iš valties į valtį permetami vienu metu. Koks valčių greičių skirtumas šiais dviem atvejais?

Sprendimas

Pritaikome judesio kiekio tvermės dėsnius valtims tardami, kad kroviniai permetami statmena valčių judėjimo krypčiai, todėl valties, iš kurios permetamas krovinys, greitis jos judėjimo kryptimi dėl to nekinta.

1) Tegul pirmosios valties galutinis greitis v_1, o antrosios v_2.

Sistemai, kurią sudaro pirmoji valtis ir į ją permetamas krovinys, išilgai jos judėjimo krypties:

$$Mv_0 - mv_2 = (M + m)v_1.$$

Analogiškai sistemai, kurią sudaro antroji valtis su jos kroviniu ir į ją permetamas pirmosios valties krovinys, išilgai jos judėjimo krypties:

$$(M+m)v_0 - mv_0 = (M+2m)v_2.$$

Iš šių lygčių gauname, kad

$$v_1 = v_2 = \frac{M}{M+2m}v_0.$$

Greičių moduliai lygūs, bet jų kryptys priešingos.

2) Šiuo atveju aišku, kad valčių greičių moduliai taip pat vienodi, bet kryptys priešingos. Pritaikome judesio kiekio tvermės dėsnių vienai iš sistemų, pvz., tai, kurią sudaro pirmoji valtis (be jos krovinio) ir į ją permetamas krovinys:

$$Mv_0 - mv_0 = (M+m)v_1'.$$

Iš čia

$$v_1' = \frac{M-m}{M+m}v_0.$$

Dabar galime surasti greičių skirtumą:

$$\Delta v = v_1 - v_1' = \frac{2m^2}{(M+m)(M+2m)}v_0.$$

Matome, kad pirmuoju atveju valčių greičiai didesni nei antruoju.

13. Horizontalia plokštuma linijiniu masės centro greičiu v_0 paleidžiamas judėti vienalytis spindulio R ir masės m ritinys (žiūr. brėž.). Paleidimo metu ritinys kartu sukasi ir apie savo simetrijos ašį kampiniu greičiu ω_0 prieš laikrodžio rodyklę. Ritinio slydimo plokštuma trinties koeficientas μ, o riedėjimo trintis labai maža.

1) Kokiu linijiniu pagreičiu juda paleistas ritinys?

2) Koks jo kampinis pagreitis?

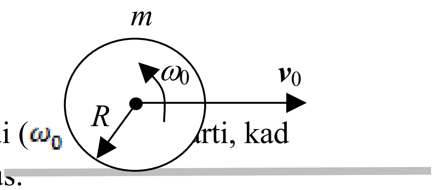
3) Kokiam kampiniam greičiui $\omega_0 = \omega'$ ritinys visiškai sustoja?

4) Kokį atstumą įveikia ritinys iki jam visiškai sustojant?

5) Kiek apsisukimų padaro ritinys, jei $\omega_0 = \omega'$?

6) Kiek šiuo atveju ($\omega_0 = \omega'$) išsiskiria šilumos?

7) Koks Visatos entropijos pokytis, visiškai sustojus ritiniui (ω_0 rti, kad aplinkos temperatūra T, o įšilimas dėl trinties labai nežymus.



8) Kaip juda ritinys, jei: (a) $\omega_0 < \omega'$? (b) $\omega_0 > \omega'$?

9) Kiek išsiskiria šilumos, jei $\omega_0 \neq \omega'$?

10) Kokiu atstumu nuo ritinio paleidimo taško reikia pastatyti vertikalią lygią masyvią plokštumą, nuo kurios ritinys atšoka stangriai, kad galutinis ritinio greitis būtų didesnis už v_0? Kokiam kampiniam greičiui ω_0 tai apskritai įmanoma?

Sprendimas

1) Ritinį veikia vienintelė trinties jėga, kuri jį stabdo. Vadinasi, ritinys juda tolygiai lėtėjančiai. Pasinaudojame 2-uoju Niutono dėsniu slenkamajam judėjimui: $\mu mg = ma$ (čia aišku, kad $\boldsymbol{a}$ kryptis priešinga $\boldsymbol{v}_0$ krypčiai). Iš čia

$$a = \mu g$$

2) Pasinaudojame 2-uoju Niutono dėsniu sukamajam judėjimui ritiniui jo centro atžvilgiu:

$$I\beta = \mu mg$$

Čia $I = \dfrac{mR^2}{2}$ - vienalyčio ritinio inercijos momentas jo simetrijos ašies atžvilgiu, β - kampinis ritinio pagreitis. Iš čia

$$\beta = \frac{2\mu g}{R}$$

Atkreipiame dėmesį, kad ritinys sukasi tolygiai lėtėdamas, t.y. kampinis greitis mažėja.

3) Surandame laiką t, kurį ritinys juda iki visiško sustojimo: $v = v_0 - at = 0$. Pasinaudoję a išraiška iš 1-o klausimo atsakymo, gauname:

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{\mu g}$$

Kampiniam greičiui $\omega = \omega_0 - \beta t$. Mus dominančiu laiko momentu $\omega = 0$, o $\omega_0 = \omega'$.
Įrašę gautą t išraišką, gauname

$$\omega' = \frac{2v_0}{R}.$$

4) Pritaikome nueito kelio formulę tolygiai lėtėjančiam judėjimui, panaudodami a it t išraiškas:

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

5) Iki visiško sustojimo ritinys įveikia kampinį atstumą

$$\varphi = \frac{\beta t^2}{2} = \frac{2\mu g}{R}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2}{(\mu g)^2} = \frac{v_0^2}{\mu g R}.$$

Čia taip pat panaudojome jau gautas β ir t išraiškas. Vienas apsisukimas turi 2π radianų, todėl apsisukimų skaičius lygus

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{v_0^2}{2\pi\mu g R}.$$

6) Ritinys galiausiai sustojo, todėl šiluma virto visa pradinė jo kinetinė energija, kurią sudaro ritinio linijinio (slenkamojo) judesio kinetinė energija ir sukimosi kinetinė energija:

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega'^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4v_0^2}{R^2} = \frac{3}{2}mv_0^2.$$

7) Pagal entropijos pokyčio apibrėžimą

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{3mv_0^2}{2T}.$$

8) (a) Kai $\omega_0 < \omega'$, ritinys nesustos. Jis pradės riedėti nepraslysdamas (tegul laiko momentu t_1), esant tos pačios krypties ritinio linijiniam greičiui kaip ir $\boldsymbol{v_0}$. Tuo tarpu ritinio kampinis greitis mažėja iki 0, o po to keičia ženklą, t.y. ritinys pradeda suktis pagal laikrodžio rodyklę. Tuo būdu, ritinys pradeda judėti pastoviu linijiniu greičiu v_1 (nepraslystant trinties jėga lygi 0, o riedėjimo trintis labai maža), ir sukasi pagal laikrodžio rodyklę kampiniu greičiu $\omega_1 = v_1/R$. Tuo būdu, ritinio linijiniam ir kampiniam greičiams galime užrašyti:

$$v_1 = v_0 - at_1$$

$-\omega_1 = \omega_0 - \beta t_1$

Pasinaudoję jau gautomis a ir β išraiškomis ir eliminavę iš lygčių t_1, surandame

$v_1 = \dfrac{2v_0 - \omega_0 R}{3}$.

(b) Šiuo atveju ($\omega_0 > \omega'$) ritinys sustoja, bet kartu jis vis dar sukasi praslysdamas, todėl veikia ta pati tos pačios krypties trinties jėga, kuri verčia ritinį pradėti judėti atgal. Pagreičiai a ir β nesikeičia. Linijinis ritinio greitis didėja (juda priešinga pradiniam greičiui kryptimi), o kampinis sukimosi greitis ir toliau mažėja. Tam tikru laiko momentu ritinys pradeda nebepraslysti, ir toliau rieda atgal pastoviu linijiniu greičiu v_2. Tuo pačiu metu jis sukasi nepraslysdamas kampiniu greičiu $\omega_2 = v_2/R$. Tuo būdu, ritinio linijiniam ir kampiniam greičiams šiuo atveju, tarkime laiko momentu t_2, galime užrašyti:

$-v_2 = v_0 - at_2$

$\omega_2 = \omega_0 - \beta t_2$

Pasinaudoję jau gautomis a ir β išraiškomis ir eliminavę iš lygčių t_2, surandame

$v_2 = \dfrac{\omega_0 R - 2v_0}{3}$.

9) Šiluma virsta ta mechaninės ritinio energijos dalis, kuri lieka atėmus ritinio galutinę kinetinę energiją iš jo pradinės kinetinės energijos. Energija proporcinga greičio kvadratui, todėl abiem atvejais (tiek $\omega_0 < \omega'$, tiek $\omega_0 > \omega'$) formulė ta pati (konkretumo dėlei imkime, pvz.atvejį, kai $\omega_0 > \omega'$ ir $\omega_2 = v_2/R$):

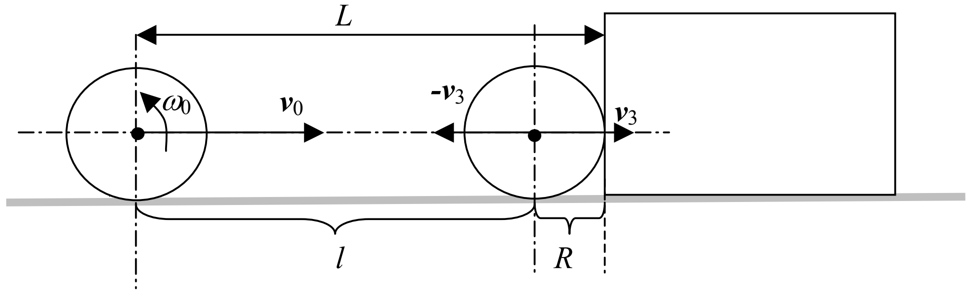
$$Q' = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} - \frac{I\omega_2^2}{2} = \frac{m}{2}\left[v_0^2 + \frac{R^2}{2}\omega_0^2 - \frac{(\omega_0 R - 2v_0)^2}{9} - \frac{R^2}{2\cdot 9}\left(\omega_0 - \frac{2v_0}{R}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{m}{6}(v_0^2 + \omega_0^2 R^2 + 2\omega_0 R v_0) = \frac{m(v_0 + \omega_0 R)^2}{6}.$$

Čia nesuku patikrinti atvejį, kai $\omega_0 = \omega' = \frac{2v_0}{R}$. Tuomet gautume, kad $Q = Q' = \frac{3}{2}mv_0^2$ - sutampa su 6 klausimo atsakymu.

10) Ritiniui atsitrenkiant į lygią masyvią sieną tampriai, jo judesio kiekis tampa priešingu (greitis tampa $-v_0$), o ritinio judesio kiekio momentas jo simetrijos ašies atžvilgiu smūgio metu nepakinta (sienelė lygi, todėl tarp jos ir ritinio trinties nėra), todėl nepakinta ir ritinio kampinis greitis.

Iš karto taip pat aišku, kad turi būti tenkinama sąlyga $\omega_0 > v_0/R$, nes antraip net prie pat ritinio (atstumu $L = R$) pastačius sienelę, jam atsitrenkus ritinio greitis v_0 iš karto pradės mažėti, t.y. niekada negalės tapti didesniu už v_0.



Tegul iki susidūrimo su sienele nuo ritinio paleidimo momento praeina laikas t_3. Po atsitrenkimo ritinys savo linijinį greitį didins tuo atveju, jei ritinys dar suksis praslysdamas. Tuomet jis greitės (judėdamas į priešingą pradinio greičio $\boldsymbol{v}_0$ pusę), o pagal sąlygos reikalavimą ritinio greitis (greičio modulis) turi tapti didesnis už v_0. Tegul turime ribinį atvejį, kuomet šis greitis v_0. Pasiekęs šį greitį (tegul per laiką t_4 po atsitrenkimo į sienelę), ritinys nebegreitėja, t.y. baigiasi jo praslydimas, ir ritinys juda šiuo pastoviu greičiu ir tuo pat metu rieda, t.y. sukasi kampiniu greičiu $\omega_4 = v_0/R$. Jei prieš pat susidūrimą su sienele (ir iš karto po smūgio) ritinio linijinis greitis v_3, galime užrašyti tokias ritinio greičių išraiškas:

$v_3 = v_0 - at_3$,

$v_4 = v_0 = v_3 + at_4$.

Iš šių lygčių gauname, kad $t_3 = t_4$.

Kampiniam ritinio greičiui po paleidimo praėjus laikui $t_3 + t_4$

$\omega_4 = \omega_0 - \beta(t_3 + t_4)$. Bet $\omega_4 = v_0/R$ ir $t_3 = t_4$, todėl (vėlgi imdami anksčiau rastą β išraišką) gauname

$$t_3 = \frac{\omega_0 R - v_0}{4\mu g}.$$

Tuomet (žiūr. brėž.)

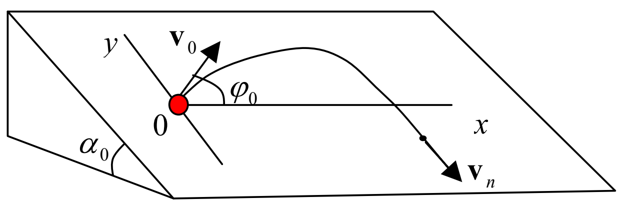
$$l = v_0 t_3 - \frac{at_3^2}{2} = v_0 \frac{\omega_0 R - v_0}{4\mu g} - \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{32\mu g} = \frac{10 v_0 \omega_0 R - 9v_0^2 - \omega_0^2 R^2}{32\mu g}.$$

Taigi, galiausiai gauname, kad

$$L < l + R = \frac{10 v_0 \omega_0 R - 9v_0^2 - \omega_0^2 R^2}{32\mu g} + R.$$

Kai kampinis greitis pasiekia vertę $\omega'' = \frac{2v_0}{R}$, nuotolis tampa $l = \frac{v_0^2}{2\mu g}$, kuriam ir be sienelės ritinys rieda atgal greičiu v_0. Taigi, jei kampinis greitis didesnis už ω'', ir be jokios sienelės ritinys riedės atgal didesniu už v_0 greičiu.

14. Nuožulniosios plokštumos polinkio kampą galima keisti. Ant jos padedamas kūnas ir parenkamas toks ribinis kampas α_0, kai šis kūnas dar neslysta. Išlaikant šį kampą, kūnui suteikiamas pradinis greitis v_0, lygiagretus nuožulniajai plokštumai ir sudarantis kampą φ_0 su horizontaliąja x-ašimi (žiūr. brėž.). Trinties koeficientas tarp plokštumos ir kūno μ. 1) Rasti minėtą ribinį kampą α_0. 2) Rasti nusistovėjusį kūno slydimo greitį $\mathbf{v}_n$ kaip v_0 ir φ_0 funkciją. 3) Kaip elgiasi kūnas, kai nuožulniosios plokštumos polinkio kampas skiriasi nuo α_0?



Ats.: 1) $\alpha_0 = arctg\mu$. 2) $v = \frac{1}{2} v_0 (1 - \sin\varphi_0)$.

Sprendimas

1) Kad kūnas neslystų, būtina sąlyga, jog atstojamoji jėga, veikianti išilgai plokštumos, būtų lygi 0. Taigi,

$mg \sin\alpha_0 = \mu mg \cos\alpha_0$, iš kur

$\alpha_0 = arctg\mu$.

2) Panagrinėkime kūno judėjimą tam tikru laiko momentu dviem kryptimis: *y*-kryptimi ir išilgai liestinės duotajame taške (tarkime, tuo metu liestinė sudaro kampą φ su *x*-ašimi). Pastebėsime, kad kūnui judant plokštuma **bet kuria kryptimi**, jį veikia vienoda trinties jėga, nukreipta priešinga greičiui **v** ir lygi $\mu mg \cos\alpha_0$. Taigi, **liestinės** kryptimi

$$\frac{dv}{dt} = \mu g \cos\alpha_0 + g \sin\alpha_0 \sin\varphi .$$

Išilgai *y*-krypties galime užrašyti

$\ddot{y} = g \sin\alpha_0 + \mu g \cos\alpha_0 \sin\varphi$. Atsižvelgę į (1) klausimo išvadą (pertvarkius ją turėtume $\sin\alpha_0 = \mu \cos\alpha_0$), gauname

$\ddot{y} = \frac{dv}{dt}$. Suintegravę vieną kartą randame

$\dot{y} = v + C$.

Kai $t = 0$, $\dot{y}(0) = v_0 \sin\varphi_0$, o $v(0) = v_0$, todėl $C = v_0 (\sin\varphi_0 - 1)$.

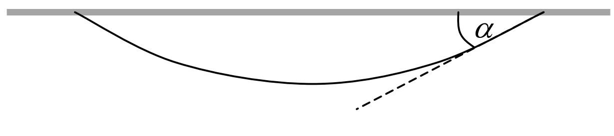
Kai $t \to \infty$, *x*-kryptimi greitis lygus 0, todėl $\dot{y} = -v_n$. Be to, ir $v = v_n$, todėl

$v_n = \frac{1}{2} v_0 (1 - \sin\varphi_0)$. Beje, kai $\varphi_0 = 0$, $v_n = \frac{v_0}{2}$.

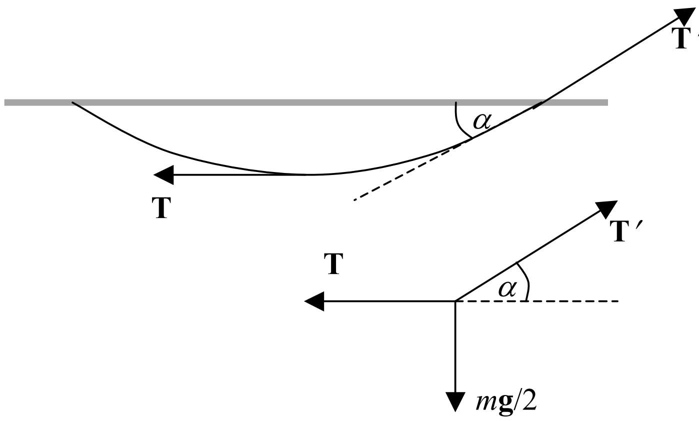
3) *x*-kryptimi kūnas galiausiai nebeturės jokio greičio. Jei $\alpha < \alpha_0$, sunkio jėgos dedamoji bus mažesnė už trinties jėgą, todėl galiausiai kūnas sustos.
Jei $\alpha > \alpha_0$, nusistovėjęs kūno judėjimas bus tolygiai greitėjantis priešinga *y*-ašiai kryptimi, o pagreitis lygus

$$a = g \sin\alpha - \mu g \cos\alpha .$$

15. Grandinė pakabinta ant lubų taip, kad ji ties galais su horizontu sudaro kampą α. Grandinės masė *m*. Kokios grandinės įtempimo jėgos jos centre ir galuose?



Sprendimas



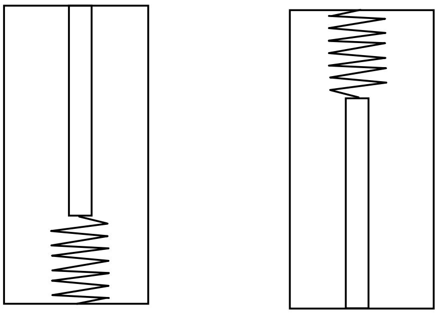
Padalinkime grandinę simetriškai per pusę ir panagrinėkime vieną jos dalį. Ją veikia trys jėgos: sunkio jėga, lygi $mg/2$ ir nukreipta žemyn, pakabinimo taške jėga, sudaranti kampą α su horizontu (T') ir horizontali jėga kitame grandinės dalies gale (T) (žr. brėž.). Jėgos grandinės dalies galuose lygios grandinės įtempimo jėgoms tuose taškuose. Grandinė statinėje pusiausvyroje, todėl suminė jėga turi būti lygi 0. Atidedame šias jėgas iš vieno taško ir užrašome lygtis horizontaliajai ir vertikaliajai projekcijoms:

$$\begin{cases} \dfrac{mg}{2} = T'\sin\alpha \\ T = T'\cos\alpha \end{cases}$$

Iš čia surandame:

$$T = \frac{mg}{2tg\alpha} \text{ ir } T' = \frac{mg}{2\sin\alpha}.$$

16. Dėžėje tarp jos horizontalių sienelių įsprausta spyruoklė su strypeliu, kurio masė m = 1,0 kg (žr. brėž. kairėje). Apvertus dėžę, strypelis į jos sienelę slegia α = 1,4 didesne jėga (brėž. dešinėje). Kokia jėga slegia strypas sienelę abiem atvejais?



Sprendimas

Abiem atvejais yra statinė jėgų pusiausvyra. Taigi, pvz., strypelį veikiančių jėgų suma lygi 0. Pirmuoju atveju $mg + f_1 - k\Delta l = 0$ (čia f_1 – jėga, kuria sienelė veikia strypelį – ji lygi jėgai, kuria strypelis slegia sienelę, Δl - spyruoklės sutrumpėjimas, k – spyruoklės standumas).

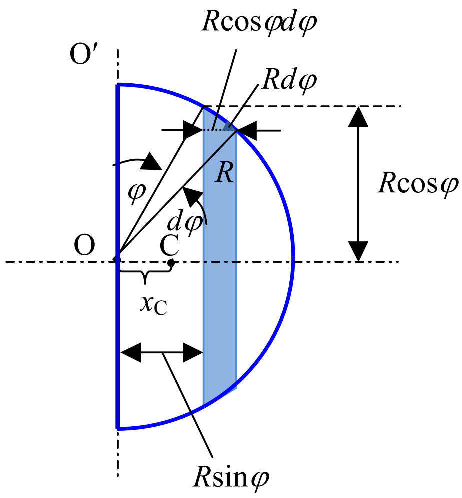
Apvertus dėžę, suminė jėga taip pat lygi 0, bet jėgų pusiausvyra šiuo atveju nusakoma lygtimi $mg + k\Delta l - f_2 = 0$ (čia f_2 - jėga, kuria sienelė veikia strypelį – ji lygi jėgai, kuria strypelis slegia sienelę). Pasinaudoję tuo, kad $f_2 = \alpha f_1$, išsprendžiame lygtis ir surandame, kad

$$f_1 = \frac{2mg}{\alpha - 1} = 49\,\text{N}, \; f_2 = \alpha f_1 = 69 \; \text{N}.$$

17. Rasti vienalyčio spindulio R pusrutulio masės centrą.

Sprendimas

Sudaliname pusrutulį į plonus skritulėlius. Pasirenkame integravimo kampą φ, kuris turi kisti ribose nuo 0 iki $\pi/2$, kad būtų apimtas visas pusrutulio tūris (žr. pusrutulio pjūvio brėž.).



Tuomet $mx_C = \int_0^R xdm$. Čia m – pusrutulio masė, o dm – pasirinkto skritulėlio masė (patamsinta rutulio skerspjūvio sritis brėžinyje). Pusrutulis vienalytis, todėl skritulėlio masė lygi jo tūrio ir pusrutulio medžiagos tankio ρ sandaugai. Taigi,

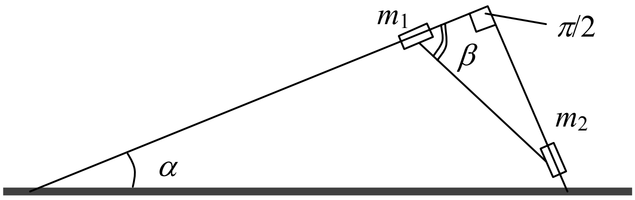
$$\frac{2}{3}\pi R^3 \rho x_C = \int_0^{\pi/2} \pi R^2 \cos^2\varphi R\cos\varphi d\varphi\rho R\sin\varphi,$$

$$\frac{2}{3}\pi R^3 \rho x_C = \rho R^4 \rho \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi \sin\varphi d\varphi.$$

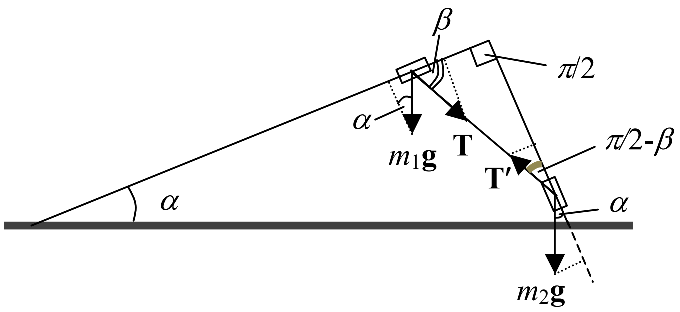
Suintegravę ap

skaičiuojame: $x_C = \dfrac{3R}{8}$.

18. Iš vielos sulenktas status kampas ir vertikaliai įtvirtintas ant horizontalios plokštumos, kaip parodyta brėžinyje. Ant vielos užmauti masių m_1 = 100 g ir m_2 = 300 g nedideli ritinėliai, kurie gali ja judėti be trinties. Vielos dalis, ant kurios slankioja mažesnysis ritinėlis, su horizontu sudaro kampą α = 30°. Sujungus ritinėlius netąsiu siūlu, nusistovi pusiausvyra. Kokia siūlo įtempimo jėga ir koks kampas β?



Sprendimas



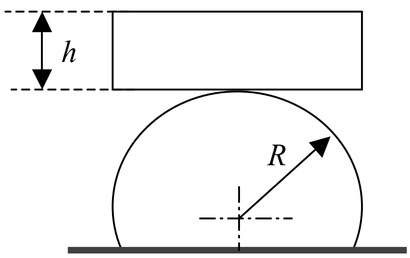
Siūlo tempimo jėga visur vienoda, t.y. $|\mathbf{T}| = |\mathbf{T}'|$. Užrašome jėgų lygybes išilgai kiekvienos vielos dalies:

$$\begin{cases} m_1 g \sin\alpha = T\cos\beta \\ m_2 g \cos\alpha = T\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \beta\right) \end{cases}.$$

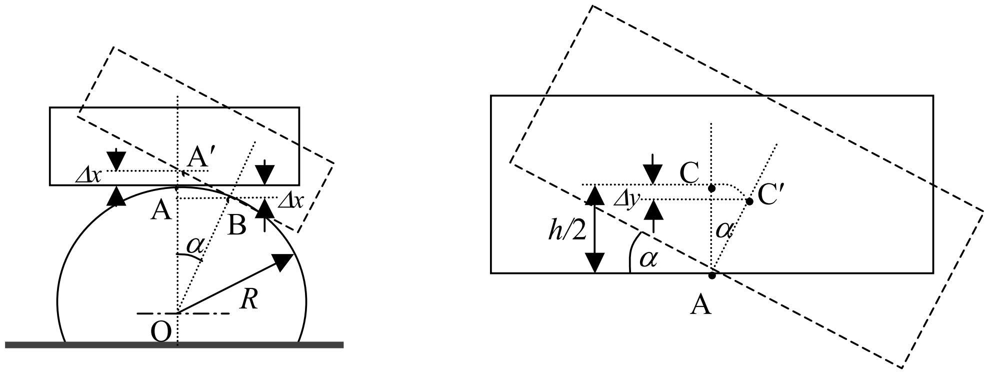
Išsprendę lygčių sistemą, gauname:

$$\beta = arctg\left(\frac{m_2}{m_1 tg\alpha}\right) = 79°\,;\ T = \frac{m_1 g \sin\alpha}{\cos\beta} = 2{,}6\ \text{N}.$$

19. Storio h vienalytis tašelis padėtas ant įtvirtinto horizontalaus ritinio, kurio spindulys R (žr. brėž.). Koks turi būti h ir R santykis, kad tašelis būtų stabilioje pusiausvyroje? Trintis tarp ritinio ir tašelio labai didelė.



Sprendimas



Kūnas yra stabilioje pusiausvyroje, jei jį išvedus iš pusiausvyros padėties, kūno masės centras pakyla. Tarkime, kad tašelį pakreipiame kampu α (žr. brėž.). Taškas A, virš kurio aukštyje $h/2$ buvo tašelio masės centras, pakyla dydžiu Δx, o tašelio ir ritinio lietimosi tarp taškas B po pakreipimo nusileidžia tokiu pat dydžiu (žr. brėž. kairėje). Tuo tarpu tašelio masės centras C taško A atžvilgiu tašelį pakreipus nusileidžia dydžiu Δy (žr. brėž. dešinėje). Taigi, bendras tašelio masės centras stabilios pusiausvyros atveju turi tenkinti nelygybę $\Delta x > \Delta y$. Apskaičiuojame pokyčius Δx ir Δy.

$\Delta x = R(1-\cos\alpha)$, $\Delta y = \dfrac{h}{2}(1-\cos\alpha)$. Tuo būdu gauname $R > \dfrac{h}{2}$.

Ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2008 04 10.