

VYTAUTAS RINKEVIČIUS

ELEKTROMAGNETIZMAS

Paskaitų konspektas
ypatingai gabių mokinių
papildomojo ugdymo mokyklos
“Fizikos olimpas” moksleiviams

FIZIKOS OLIMPAS

Vilnius 1999

UDK 537.8(075.3)
EI-34

Parengė Vilniaus universiteto docentas Vytautas Rinkevičius

Ypatingai gabių mokinių papildomo ugdymo mokykla „Fizikos olimpas“

Ištaigos kodas 9174341
Saulėtekio al. 9, III rūmai, LT-10222 Vilnius
Tel. 8-5 2698676, 8-686 13779, 8-698 20707
El. paštas olimpas@ff.vu.lt
Interneto svetainė www.olimpas.lt

Turinys

1. Elektros srovės magnetinis laukas.....	4
2. Bio ir Savaro dėsnis.....	4
3. Judančio krūvio magnetinis laukas.....	7
4. Suminės srovės dėsnis.....	7
5. Kontūras su srove magnetiniame lauke.....	9
6. Medžiagų magnetinės savybės.....	11
7. Magnetinis jautris ir magnetinė skvarba.....	13
8. Nuolatiniai magnetai.....	14
9. Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnis. Lenco taisyklė.....	14
10. Saviindukcija ir abipusė indukcija. Induktyvumas ir abipusis induktyvumas.....	18
11. Nuolatinės srovės įjungimas ir išjungimas, kai grandinėje yra induktyvumas ir varža.....	20
12. Magnetinio lauko energija.....	21
13. Kintamoji elektros srovė.....	24
14. Aktyvioji, talpinė ir induktyvioji varžos.....	25
15. Kintamosios srovės grandinių skaičiavimas vektorinių diagramų ir kompleksinių dydžių metodais. Impedansas.....	27
16. Įtampos rezonansas.....	32
17. Srovės rezonansas.....	34
18. Kintamosios srovės darbas ir galia.....	36
19. Srovės stiprio ir įtampos efektinės vertės.....	37
20. Transformatorius.....	38
21. Virpesių kontūras. Laisvieji elektromagnetiniai virpesiai.....	40
22. Grįžtamojo ryšio generatorius.....	42
23. Elektromagnetinės bangos.....	42

1. Elektros srovės magnetinis laukas

Kai kurių gamtoje randamų rūdų savybė traukti geležinius daiktus buvo žinoma jau senovėje. Tačiau ryšys tarp magnetinių ir elektrinių reiškinių paaiškėjo tik XIX amžiuje, kai Erstedas (H. K. Oersted) pastebėjo, kad netoli laido lygiagrečiai su juo padėta magnetinė rodyklė pasisuka, kai laidu ima tekėti elektros srovė. Šis bandymas rodo, kad **elektros srovė kuria magnetinį lauką**, kuris ir veikia magnetinę rodyklę. Tais pačiais metais Amperas (A. M. Ampere) nustatė, kad du lygiegretūs laidininkai vienas kitą traukia, kai jais teka tos pačios krypties elektros srovės, ir stumia, kai priešingų kryptių.

Bandymai rodo, kad elektros srovės sukurtas magnetinio srauto tankis (magnetinio lauko indukcija) priklauso ne tik nuo srovės stiprio bei atstumo iki laido, bet ir nuo laido formos, jo matmenų ir orientacijos. Todėl bendros formulės, pagal kurią galima apskaičiuoti elektros srovės kuriamo magnetinio srauto tankį, nėra.

2. Bio ir Savaro dėsnis

Palyginti nesudėtingai galima išreikšti tik labai trumpos plonos laido su srove atkarpėlės kuriamą magnetinį lauką. Atkarpėlės ilgį pažymėkime dl , o ja tekančios srovės stiprį I . Vektorius $d\vec{l}$ vadinamas **srovės elementu**. Čia $|d\vec{l}| = dl$, o $d\vec{l}$ kryptis sutampa su srovės tekėjimo kryptimi. Bandymai rodo, kad srovės elemento kuriamo magnetinio lauko srauto tankio modulis dB yra tiesiai proporcingas atstumo nuo srovės elemento r kvadratui ir tiesiai proporcingas sinusui kampo α tarp $d\vec{l}$ ir \vec{r} . Čia \vec{r} - vektorius, nukreiptas nuo srovės elemento į tašką, kuriame skaičiuojamas magnetinio srauto tankis. (Atkreipkime dėmesį, kad srovės elemento skersiniai matmenys turi būti maži lyginant su r). Proporcingumo daugiklį pažymėję K , galime užrašyti:

$$dB = K \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (1)$$

(1) formulė išreiškia Bio ir Savaro dėsnį (J. B. Biot, F. Savart).

Tarptautinėje (SI) vienetų sistemoje vietoj K įvedama kita konstanta $\mu_0 = 4\pi K$. Tada (1) užrašoma taip:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (2)$$

μ_0 vadinama **magnetine konstanta**. Jos skaitinė vertė tokia: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

Vektoriškai Bio ir Savaro dėsnis panaudojant dviejų vektorių $d\vec{l}$ ir \vec{r} vektorinę sandaugą gali būti užrašytas taip:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (3)$$

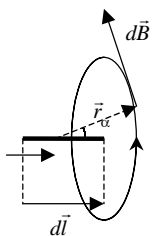
$d\vec{B}$ vektoriaus kryptį nusako dviejų vektorių $d\vec{l}$ ir \vec{r} vektorinės sandaugos taisyklė. Praktiškai $d\vec{B}$ kryptį nustatyti patogiau pasinaudoti dešiniojo sraigto (gražto) taisykle: **jei dešiniojo sraigto slenkamasis judesys sutampa su elektros srovės kryptimi srovės elemente, tai sraigto galvutės sukikmosi kryptis rodo magnetinio lauko jėgų linijų kryptį**.

$d\vec{B}$ vektorius esti nukreiptas jėgų linijos liestinės kryptimi. Srovės elemento kuriamo magnetinio lauko jėgų linijos yra apskritimai, kurių ašyje yra srovės elementas (žr. 1 pav.).

Kaip matyti iš (3), $d\vec{B} \perp d\vec{l}$ ir $d\vec{B} \perp \vec{r}$. Be to, $d\vec{B} = 0$, jei $d\vec{l} \parallel \vec{r}$, t.y. srovės elemento tęsinyje magnetinis laukas nesukuriamas.

\vec{B} vektoriui, panašiai kaip ir \vec{E} , galioja **superpozicijos principas**:

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (4)$$



1 pav.

Juo galima pasinaudoti norint apskaičiuoti bet kokios formos laidininku tekančio srovės sukurto magnetinio srauto tankį. Praktiškai tai atliekama integruojant.

Panagrinesime keletą svarbesnių pavyzdžių.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime tiesaus plono laido, kuriuo teka srovė I, sukurto magnetinio srauto tankį bet kokiame taške A, esančiame R atstumu nuo to laido (2 pav.).

I nuotolyje nuo statmens, nuleisto iš taško A į laidą, išskirkime srovės elementą $I d\vec{l}$. Jo sukurto magnetinio srauto tankio dB modulis nusakomas (2) formule.

Šiuo atveju $l=R \operatorname{ctg}\alpha$, taigi

$$dl = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Be to,

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Irašę šias dl ir r išraiškas į (2), gauname:

$$dB = -\frac{\mu_0 I \sin \alpha d\alpha}{4\pi R}.$$

Pagal gražto taisyklę nustatome, kad $d\vec{B}$ nukreiptas į mus (tuo atveju brėžinyje jo kryptį žymime \bullet) ir jo kryptis nekinta kintant $d\vec{l}$ padėčiai laide. Taigi galime integruoti nuo α_1 iki α_2 :

$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} |\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1|. \quad (5)$$

Jei laidas su srove yra begalinis, tuo atveju $\alpha_2 \rightarrow \pi$, $\alpha_1 \rightarrow 0$, ir pagal (5) gauname:

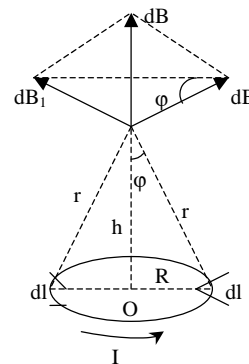
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (6)$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime apskritos R spindulio vijos, kuria teka srovė I, kuriamo magnetinio lauko srauto tankį taške C, esančiame statmenyje, iškeltame iš vijos plokštumos centro O ir nutolusiame nuo jo atstumu h (3 pav.).

Šiuo atveju iš pradžių galime vektoriškai sudėti dviejų vienodų modulių srovės elementų $I d\vec{l}$, esančių diametraliai priešingose vijos pusėse, kuriame lauko srauto tankius, kurių moduliai pagal (2):

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2},$$

nes kampas tarp $d\vec{l}$ ir \vec{r} $\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$. dB yra rombo, kurio kraštinė dB_1 , įstrižainė, taigi



3 pav.

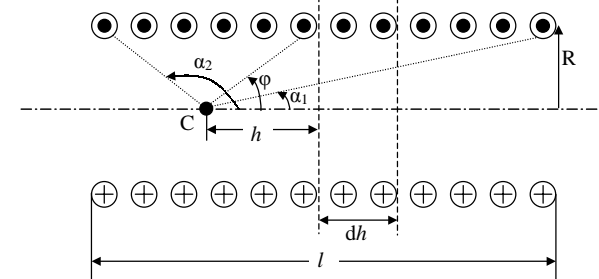
$$dB = 2dB_1 \sin \varphi = 2dB_1 \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I R dl}{2\pi r^3}, \quad (7)$$

$$= \frac{\mu_0 I R}{2\pi r^3} \int_0^{2\pi} dl = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I \sin^3 \varphi}{2R},$$

nes $\sin \varphi = R/r$, o $r = (R^2 + h^2)^{1/2}$. Vektorius \vec{B} nukreiptas išilgai vijos ašies.

Pastebėsime, kad apskritos vijos atveju patogiau naudotis apgėžta dešininio sraigto taisykle: jei sraigta suktume taip, kad jo galvutės sukimosi kryptis sutaptų su srovės vijoje kryptimi, tada sraigto slenkamasis judesys rodytų vektorius \vec{B} kryptį vijos ašyje.

3. pavyzdys. Apskaičiuosime rite tekančios srovės I kuriamo magnetinio lauko srauto tankį bet kuriame taške C, esančiame ritės ašyje. Ritės spindulys R, ilgis l, vijų skaičius N.



4 pav.

4 pav. vaizduoja ritės išilginį pjūvį brėžinio plokštuma. h nuotolyje nuo taško C mintyse išskirkime be galo trumpo dh ilgio ritės dalį. Tos dalies kuriamą magnetinio srauto tankį dB taške C galime apskaičiuoti pagal apskritos vijos formulę (7), padauginę ją iš vijų skaičiaus dN , tenkančio ritės ilgiui dh :

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin^3 \varphi}{2R} dN.$$

Šiuo atveju

$$dN = \frac{N}{l} dh,$$

o

$$h = R \operatorname{ctg} \varphi, dh = -\frac{R d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Taigi

$$dB = -\frac{\mu_0 IN}{2l} \sin \varphi d\varphi$$

ir

$$B = -\frac{\mu_0 IN}{2l} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \varphi d\varphi = \frac{\mu_0 IN}{2l} |\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1|. \quad (8)$$

Ilgos ritės (ji dar vadinama solenoidu) atveju taškui C esant ritės viduje toli nuo galų $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow \pi$ ir

$$B = \frac{\mu_0 IN}{l} = \mu_0 In. \quad (9)$$

Čia $n=N/l$ – vijų skaičius ritės ilgio vienetu. Iš (9) matyti, kad ilgoje ritėje toli nuo jos galų magnetinio srauto tankis nepriklauso nuo vietos ritės ašyje. Sudėtingesni skaičiavimai rodo, kad šiuo atveju B vertė nekinta ir einant skersai ritės. Taigi **tekant srovei ilgios ritės vijomis, jos viduje toli nuo galų sukuriama vienalytis magnetinis laukas.**

3. Judančio krūvio magnetinis laukas

Elektros srovė yra kryptingas krūvininkų judėjimas (dreifas). Krūvininko krūvį pažymėkime q , jų skaičiaus tankį n , dreifo greitį v , srovės elemento (žr. 1 pav.) skerspjūvio plotą S .

Tada srovės stipris $I = q n v S$. Įrašę šią srovės stiprio išraišką į (2) formulę, gausime:

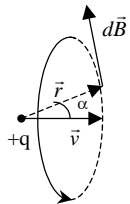
$$dB = \frac{\mu_0 q n v S dl \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (10)$$

Sdl yra srovės elemento tūris, o $nSdl$ – krūvininkų skaičius srovės elemente. (10) lygybės abi puses padaliję iš $nSdl$ apskaičiuojame vieno judančio krūvininko kuriamo magnetinio lauko srauto tankio modulį:

$$dB = \frac{\mu_0 q v \sin \alpha}{4\pi r^2}. \quad (11)$$

Vektoriškai ši formulė užrašoma taip:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q [\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (12)$$



5 pav.

Vektoriaus \vec{B} kryptis susijusi su teigiamo krūvio judėjimo kryptimi dešiniojo sraigto taisykle (5 pav.). Kaip matyti iš (12), $\vec{B} \perp \vec{v}$, $\vec{B} \perp \vec{r}$.

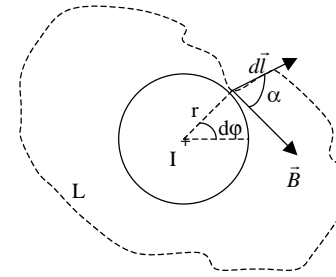
Judant neigiamam krūviui sraigto slenkamasis judesys turi būti nukreiptas prieš krūvio greičio kryptį.

4. Suminis srovės dėsnis

Apskaičiuosime

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l})$$

bet kokių kontūrų L, apjuosiančių tiesę begalinį laidą su srove I (6 pav.).

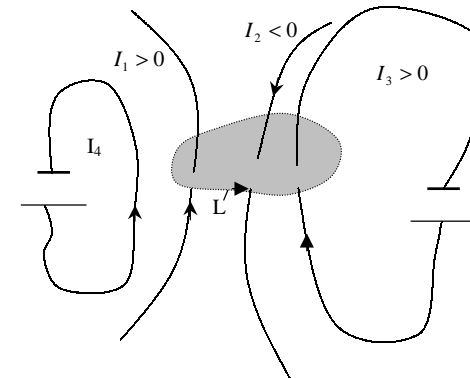


6 pav.

Pasinaudodami (6) formule, galime užrašyti:

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \int_0^{2\pi} B r d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I. \quad (13)$$

Apibendrinsime (13) formulę bet kokiai srovių sistemai, pavyzdžiui, pavaizduotai 7 pav.



7 pav.

Bent dalį srovių (pvz., I_1, I_2 ir I_3) apjuoskime bet kokios formos uždaru kontūru L. Tada

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 (I_1 - I_2 + I_3).$$

Srovės, kurių kryptis susijusi su pasirinktąja kontūro L apėjimo kryptimi pagal sraigto taisyklę, rašomos su „+“ ženklu, priešingu atveju – su „-“ ženklu. Srovės, kurios neperveria kontūro L ribojamo ploto, iš viso neįskaitomos (pvz., I_4).

Apskritai suminės srovės dėsnį galima užrašyti taip:

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum_k I_k, \quad (14)$$

o žodžiais suformuluoti taip: **\vec{B} cirkuliacija yra lygi magnetinei konstantai μ_0 , padaugintai iš algebrinės sumos srovių, kertančių to kontūro apjuosiamą plotą.**

Priminsime, kad elektrostatinio lauko atveju \vec{E} vektoriaus cirkuliacija visada lygi nuliui ir tai yra elektrostatinio lauko potencialumo matematinė formulė. Matome, kad \vec{B} vektoriaus pobūdis yra kitoks, nes jo cirkuliacija gali būti nelygi nuliui. Taigi **magnetinis laukas nėra**

potencialinis. Jo jėgos linijos neturi nei pradžių, nei pabaigos, o yra uždaros kreivės. Toks laukas vadinamas **sūkuriniu** lauku. Todėl Gauso dėsnis vektoriui \vec{B} užrašomas taip:

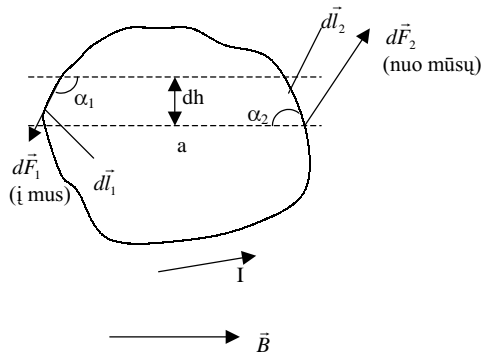
$$\oint_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = 0,$$

t.y. magnetinis srautas per bet kokį uždara paviršių visada esti lygus nuliui.

Suminės srovės dėsnį galima panaudoti elektros srovės kuriamo magnetinio lauko srauto tankiui apskaičiuoti kai kuriais simetriškais atvejais (panašiai, kaip Gauso dėsnį elektrostatiškoje).

5. Kontūras su srove magnetiniame lauke

1) Vienalytis laukas. Iš pradžių panagrinėkime bet kokios formos kontūrą su srove I, kai magnetinis laukas yra lygiagretus su kontūro plokštuma (8 pav.).



8 pav.

veikia jėgų pora. Jos momentas $dM = dFa = Ibadh = IbdS$. Čia a – atstumas tarp elementų (jėgų poros petys), o $dS = adh$ – kontūro dalies, esančios tarp punktyrinių linijų, plotas. Visą kontūrą veikiančių jėgų momentą apskaičiuosime integruodami:

$$M = IB \int_{(S)} dS = BIS. \quad (15)$$

Jėgų momento veikiamas kontūras stengiasi taip pasisukti, kad vektorius \vec{B} būtų statmenas kontūro plokštumai.

Srovės stiprio ir kontūro ploto sandauga vadinama **kontūro magnetiniu momentu**:

$$p_m = IS.$$

Magnetinio momento SI vienetas yra $1 \text{ A} \cdot \text{m}^2$.

Žinome, kad plotui gali būti suteiktos vektoriaus savybės: $\vec{S} = S\vec{n}$. Čia \vec{n} – ploto normalės (statmens) vienetinis vektorius ($|\vec{n}| = 1$). Teigiamąją \vec{n} vektoriaus kryptimi šiuo atveju reikia imti tą, kuri susijusi su srovės kryptimi dešiniojo sraigto taisykle. Tada magnetinio momento vektorius

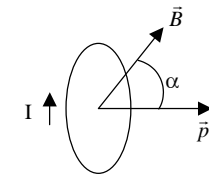
$$\vec{p}_m = I\vec{S}. \quad (16)$$

Bendru atveju, kai kontūro plokštuma nėra lygiagreti su magnetinio srauto tankio vektoriui \vec{B} (9 pav.), kontūrą veikiančių jėgų momento modulis

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (17)$$

o jo vektorius

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (18)$$



9 pav.

Iš (18) matyti, kad $\vec{M} = 0$, kai $\vec{p}_m \parallel \vec{B}$. Taigi vienalyčiame magnetiniame lauke kontūras su srove stengiasi taip pasisukti, kad jo magnetinis momentas \vec{p}_m būtų lygiagretus su magnetinio srauto tankio vektoriui \vec{B} .

Apskaičiuosime kontūro su srove, esančio vienalyčiame magnetiniame lauke, energiją. Iš mechanikos kurso žinome, kad jėgų poros darbas, atliekamas pasukant mažu kampu $d\alpha$, yra $dA = M d\alpha$. Kontūro su srove atveju M nusakomas (17) formule, tad

$$dA = p_m B \sin \alpha d\alpha.$$

Suintegravę gauname:

$$W = p_m B \int \sin \alpha d\alpha = -p_m B \cos \alpha + C.$$

Potencinės energijos išraiškose integravimo konstantą C galima laisvai pasirinkti. Šiuo atveju pasirinkime $C = 0$. Tada

$$W = -p_m B \cos \alpha = -(\vec{p}_m, \vec{B}). \quad (19)$$

Taigi kontūro su srove energija nusakoma (19) formule. Pasinaudodami (16), ją galime užrašyti ir taip:

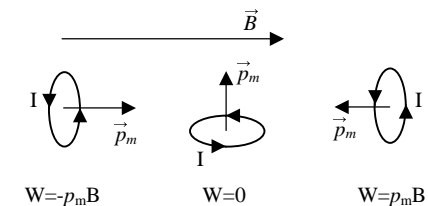
$$W = -I(\vec{S}, \vec{B}) = -I\Phi. \quad (20)$$

Čia

$$\Phi = (\vec{S}, \vec{B}) = BS \cos \alpha \quad (21)$$

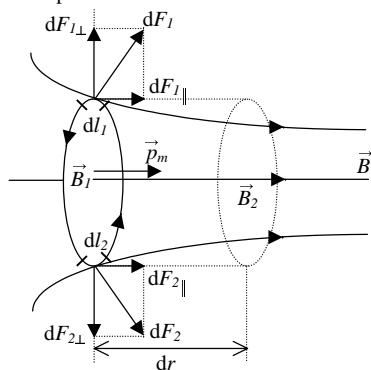
yra magnetinis srautas per kontūro ribojamą plotą.

Kaip aiškėja iš (19) ir (20), energija esti mažiausia, kai $\vec{p}_m \parallel \vec{B}$ (pastovios pusiausvyros padėtis), lygi nuliui, kai $\vec{p}_m \perp \vec{B}$, ir didžiausia, kai $\vec{p}_m \parallel -\vec{B}$ (nepastovios pusiausvyros padėtis) (žr. 10 pav.).



10 pav.

2) Nevienalytis laukas. Nevienalyčiame lauke kontūras su srove irgi esti orientuojamas taip, kad jo magnetinis momentas būtų lygiagretus su magnetinio srauto tankio vektoriumi \vec{B} . Tačiau ir tada atskiras kontūro dalis veikiančių jėgų atstojamoji nepasidaro lygi nuliui. Tai matyti iš 11 pav.



11 pav.

Panagrinėkime priešingose kontūro pusėse esančius du srovės elementus Idl_1 ir Idl_2 veikiančias jėgas $d\vec{F}_1$ ir $d\vec{F}_2$. Šios jėgos yra statmenos vektoriumi \vec{B} tose vietose, kur yra tie srovės elementai. Išskaidykime jas į dedamasias, statmenas vektoriumi \vec{B} ties kontūro centru $d\vec{F}_{1\perp}$ ir $d\vec{F}_{2\perp}$ ir lygiagretes $d\vec{F}_{1\parallel}$ ir $d\vec{F}_{2\parallel}$. Matome, kad statmenosios dedamosios yra priešingų krypties. Jas atsveria kontūro tamprumo jėgos. Lygiagrečiosios dedamosios nukreiptos ta pačia kryptimi. Jų atstojamoji nelygi nuliui, o yra nukreipta lauko stiprėjimo kryptimi. Norėdami apskaičiuoti visą kontūrą veikiančią tą atstojamąją jėgą, tarkime, kad jos veikiamas kontūras paslinko į stipresnio lauko sritį mažu atstumu dr . Vidutinį magnetinio srauto tankį kontūrus esant pradinėje padėtyje pažymėkime B_1 , o galinėje B_2 . Sutinkamai su (20), kontūro

energijos lygios atitinkamai $W_1 = -I\Phi_1 = -ISB_1$, $W_2 = -ISB_2$. Paslenkant kontūrui atliekamas darbas

$$dA = F \cdot dr = W_1 - W_2 = IS(B_2 - B_1) = p_m(B_2 - B_1).$$

Sąryšį tarp B_1 ir B_2 galima išreikšti taip:

$$B_2 = B_1 + \frac{dB}{dr} dr.$$

Taigi

$$B_2 - B_1 = \frac{dB}{dr} dr$$

ir

$$F \cdot dr = p_m \frac{dB}{dr} dr.$$

Iš čia nustatome, kad

$$F = p_m \frac{dB}{dr}. \quad (22)$$

(16), (18), (19) ir (22) formulės labai panašios į atitinkamas formules, aprašančias elektrinį dipolį ir jį veikiančias jėgas bei energiją elektriniame lauke. Todėl kontūras su srove dar vadinamas **magnetiniu dipoliu**.

6. Medžiagų magnetinės savybės

Bandymai rodo, kad medžiagoje magnetinis laukas esti kitoks negu vakuume. Tai rodo, kad medžiaga, patekusi į išorinį magnetinį lauką, pati kuria savo magnetinį lauką, kuris vektoriskai sumuojasi su išoriniu lauku. Sakoma, kad medžiagos magnetiniame lauke **įmagnetėja**. Įmagnetėjančios medžiagos vadinamos **magnetikais**.

\vec{B}_0 pažymėkime magnetinio srauto tankį vakuume, \vec{B}' - medžiagos kuriamo lauko magnetinio srauto tankį, \vec{B} - magnetinio srauto tankį medžiagoje. Tada

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (23)$$

Medžiagos, kuriose $B < B_0$, vadinamos **diamagnetikais**. Jose \vec{B}' yra priešingos krypties negu \vec{B}_0 (t.y. $\vec{B}' \parallel -\vec{B}_0$).

Medžiagos, kuriose $B > B_0$, vadinamos **paramagnetikais**. Jose \vec{B}' ir \vec{B}_0 kryptys sutampa (t.y. $\vec{B}' \parallel \vec{B}_0$).

Medžiagos, kuriose $B \gg B_0$, vadinamos **feromagnetikais**. Šie magnetikai turi didžiausią praktinį pritaikymą.

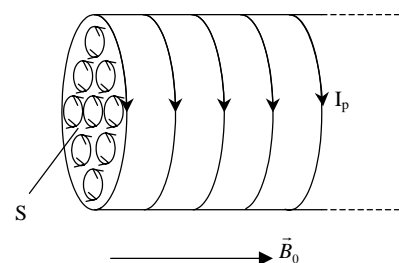
Daugelio medžiagų atomai turi savo magnetinius momentus. Juos sąlygoja elektronų skriejimas aplink branduolius uždromis elipsinėmis orbitomis, taip pat elektronų sukiniai. Nesant išorinio magnetinio lauko, atomų magnetiniai momentai esti netvarkingai išsidėstę, ir jų kuriamas magnetinis laukas pasinaikina. Išorinis magnetinis laukas stengiasi orientuoti atomų magnetinius momentus panašiai, kaip kontūrą su srove, todėl medžiaga įmagnetėja.

Įmagnetėjimo didumą apibūdina medžiagos tūrio vieneto magnetinis momentas, vadinamas **įmagnetėjimo vektoriumi \vec{J}** :

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_i \vec{p}_{ami}. \quad (24)$$

Čia $\sum_i \vec{p}_{ami} - \Delta V$ tūryje esančių atomų magnetinių momentų vektorinė suma.

Kad būtų paprasčiau skaičiuoti, imkime ilgo ritinio formos magnetiko gabalą (12 pav.).



12 pav.

Tarkime, kad išorinis magnetinis laukas \vec{B}_0 yra lygiagretus su ritinio ašimi, o atomų magnetiniai momentai orientuoti viena kryptimi. Ant elektronų orbitų pažymėtos rodyklės rodo skriejančių elektronų sąlygotos elektros srovės kryptį. Jei medžiaga vienalytė, tūryje esančių kaimyninių atomų srovės „teka“ priešingomis kryptimis, todėl jų sukurti magnetiniai laukai vienas kitą kompensuoja. Tokios kompensacijos nėra atomams, esantiems prie ritinio šoninio paviršiaus. Todėl galima tarti, kad aplink ritinį teka tam tikra **paviršinė srovė I_p** , kuri ir sukuria magnetinį lauką \vec{B}' . To lauko

magnetinio srauto tankį galima apskaičiuoti pagal solenoido formulę (9), vietoj IN įrašant I_p

$$B' = \frac{\mu_0 I_p}{l} = \mu_0 j_p. \quad (25)$$

Čia $j_p = I_p/l$ - paviršinė srovė, tenkanti ritės ilgio vienetai, dar vadinama paviršinės srovės tankiu. Ritinio skerspjūvio plotą pažymėkime S . Tada paviršinės srovės sąlygotas ritinio magnetinis momentas sutinkamai su (16)

$$P_{m(rininio)} = I_p S.$$

Ritinio tūris $V = IS$, tad įmagnetėjimo vektoriaus modulis pagal (24)

$$J = \frac{P_{m(rininio)}}{V} = \frac{I_p S}{IS} = \frac{I_p}{I} = j_p. \quad (26)$$

Į (25) įrašę vietoj j_p jam lygų J , gauname

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J}, \quad (27)$$

o (27) įrašę į (23), gausime, kad

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}. \quad (28)$$

Nors skaičiavimus atlikome tarę, kad magnetikas yra ilgo cilindro formos, tačiau jie tinka ir magnetiku užpildytai begalinei aplinkai.

7. Magnetinis jautris ir magnetinė skvarba

Medžiagos įmagnetėja veikiant išoriniam magnetiniam laukui, todėl $\vec{J} \sim \vec{B}_0$. Proporcingumo koeficientas priklauso nuo medžiagos rūšies. Kad jis būtų bematis dydis, užrašoma taip:

$$\vec{J} = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B}_0. \quad (29)$$

χ vadinamas **magnetiniu jautriu** (magnetine juta). (29) įrašę į (28), gausime

$$\vec{B} = (1 + \chi) \vec{B}_0. \quad (30)$$

Medžiagų magnetinėms savybėms apibūdinti naudojamas ir kitas dydis, vadinamas **magnetine skvarba** (μ). Jis parodo, kiek kartų magnetinio srauto tankis medžiagoje yra didesnis negu vakuume:

$$\mu = \frac{\vec{B}}{\vec{B}_0}. \quad (31)$$

(31) palyginę su (30), matome, kad

$$\mu = 1 + \chi. \quad (32)$$

Diamagnetikų $B < B_0$, vadinasi, $\mu < 1, \chi < 0$.

Paramagnetikų $B > B_0$, vadinasi, $\mu > 1, \chi > 0$.

Feromagnetikų $B \gg B_0, \mu \gg 1, \chi \gg 0$. Skirtumas tarp μ ir χ feromagnetikuose neesminis, todėl dažniausiai naudojama magnetinė skvarba μ . Jos vertė gali siekti tūkstančius ir daugiau. Be to, ji nėra pastovi, o priklauso nuo B_0 , temperatūros ir kitų parametrų.

Labiausiai išreikštas diamagnetines savybes turi bismutas (Bi). Jo $\chi = -1,76 \cdot 10^{-4}, \mu = 0,999824$.

Paramagnetikų magnetinės skvarbos irgi esti artimos vienetui. Pavyzdžiui, skysto deguonies $\chi = 3,4 \cdot 10^{-3}, \mu = 1,0034$. Todėl, kai nesiekiami ypač didelio tikslumo, visoms medžiagoms, išskyrus feromagnetikus, galima tarti, kad $\mu \approx 1$.

Skaičiuojant elektros srovės kuriamą magnetinį lauką magnetikuose vietoj μ_0 reikia įrašyti $\mu\mu_0$. Pavyzdžiui, Bio ir Savaro dėsnį reikia užrašyti:

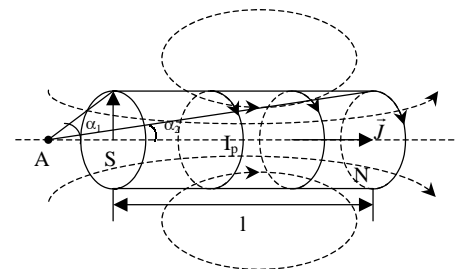
$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 I [d\vec{l}, \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad (33)$$

o suminės srovės dėsnį (14) –

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu\mu_0 \sum_k I_k. \quad (34)$$

8. Nuolatiniai magnetai

Kai kurie feromagnetikai (pavyzdžiui, plienas) pasižymi dideliu **liktiniu įmagnetėjimu**, t.y. jų $\vec{J} \neq 0$ net esant $\vec{B}_0 = 0$. Iš tokių feromagnetikų daromi nuolatiniai magnetai.



13 pav.

Tarkime, nuolatinis magnetas yra ritinio formos (13 pav.).

Ritinio ilgį pažymėkime l , liktinį įmagnetėjimą J , skerspjūvio plotą S . Magnetinį lauką šiuo atveju kuria tik paviršinė srovė I_p , kuri pagal (25) yra $I_p = j_p l$, o jos tankis pagal (26) $j_p = J$. Magnetinio lauko jėgų linijos magneto viduje nukreiptos vektoriaus \vec{J} kryptimi. Tą magneto galą, iš kurio jėgos linijos išeina į išorę, priimta vadinti šiauriniu (N) poliumi, o į kurį įeina – pietiniu (S) poliumi. Magneto kuriamą magnetinio srauto tankį bet

kokiame taške, esančiame ritinio ašyje šalia magneto, galime skaičiuoti pagal ritės formulę (8), vietoj IN/l įrašydami J :

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 J |\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1|. \quad (35)$$

Magneto magnetinis momentas sutinkamai su (24)

$$p_m = JV = SIJ. \quad (36)$$

Jėga, kuria magnetas traukia ar stumia kitą magnetą, kurio magnetinis momentas p_m , galime apskaičiuoti pagal (22) formulę.

(35) ir (36) formulės gali būti apytiksliai taikomos ne tik cilindriniam, bet ir kitokios formos (pvz., stačiakampio skerspjūvio) tiesiesiems magnetams.

9. Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnis. Lenco taisyklė

Jau žinome, kad elektros srovė sukuria magnetinį lauką. Ar nėra atvirkštinio reiškinio, kada magnetinis laukas sukuria elektros srovę? Pirmasis į šį klausimą teigiamą bandymais pagrįstą atsakymą davė Faradėjus (M. Faraday) 1831 m. Jis pastebėjo, kad kintant uždara laidų kontūrai kertančiam magnetiniam laukui, tame kontūre atsiranda elektros srovė. Ji buvo pavadinta **indukuotąja srove**, o šis reiškinys – **elektromagnetine indukcija**.

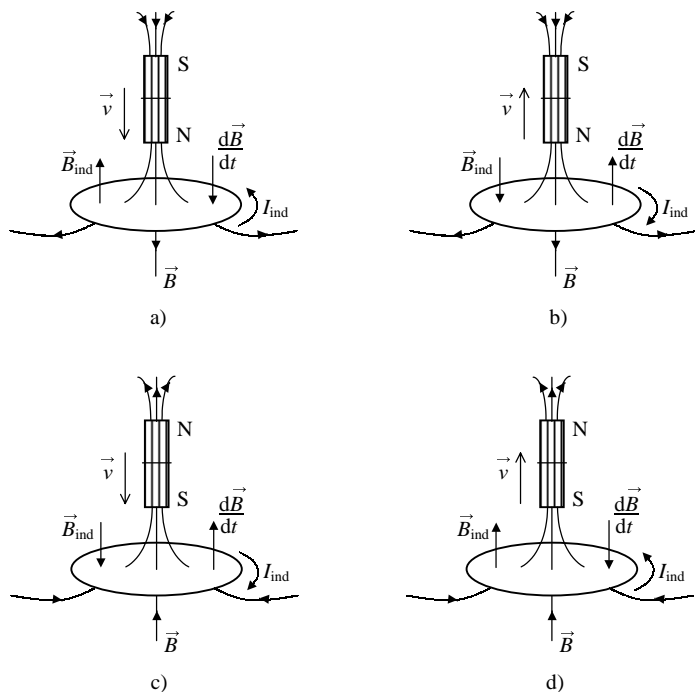
Bandymais buvo nustatyta, kad indukuotosios srovės stipris proporcingas magnetinio srauto kitimo spartai: $I_{ind} \sim d\Phi/dt$ nepriklausomai nuo to, dėl kokios priežasties kinta srautas

$$\Phi = \int_{(S)} (\vec{B}, d\vec{S}) = \int_{(S)} B dS \cos \alpha. \quad (37)$$

Srautas gali kisti judant kontūriui magneto atžvilgiu (kinta B), jam

pasiskaitant (kinta α) arba jam deformuojantis (kinta S). Suprantama, jog vienu metu gali veikti du ar visi trys šie veiksniai.

Bandymai rodo, kad indukuotosios srovės kryptis priklauso nuo to, didėja ar mažėja kontūrą kertantis magnetinis srautas, taip pat nuo magnetinio srauto tankio vektoriaus krypties kontūro atžvilgiu. Apibendrintą taisyklę, pagal kurią galima nustatyti indukuotosios srovės kryptį, 1883 m. suformulavo Lencas (E. Lenz): **uždarame kontūre indukuota elektros srovė teka tokia kryptimi, kad jos kuriamas magnetinis srautas, kertantis kontūro ribojamą plotą, kompensuotų magnetinio srauto, sukeliančio šią srovę, kitimą.**



14 pav.

Panagrinėkime keletą konkrečių atvejų. Tarkime, tiesusis magnetas šiauriniu poliumi artinamas prie uždaros vijos (14a pav.).

Šiuo atveju viją kertantis magnetinis srautas nukreiptas žemyn ir didėja, tad vijoje indukuotoji srovė I_{ind} tekės tokia kryptimi, kad jos kuriamas magnetinis srautas būtų nukreiptas į viršų ir kompensuotų magnetinio srauto didėjimą. Kontūro ribojamas plotas S šiuo atveju nekinta, taigi $\frac{d\Phi}{dt} = S \frac{dB}{dt}$. Vektoriaus \vec{B} moduliui didėjant, jo išvestinės $\frac{dB}{dt}$ kryptis sutampa su \vec{B} kryptimi,

t.y. $\frac{d\vec{B}}{dt}$ nukreiptas žemyn. Sutinkamai su Lenco taisykle indukuotoji srovė turi tekėti tokia kryptimi, kad jos kuriamas magnetinio lauko srauto tankis būtų nukreiptas į viršų. Priminsime, kad vektoriaus \vec{B}_{ind} kryptis susijusi su I_{ind} kryptimi dešiniojo sraigto taisykle.

Nesunku įsitikinti, kad tolinant magnetą nuo vijos (14b pav.) magnetinis srautas, kertantis vijos plotą, mažėja, tad $\frac{d\vec{B}}{dt}$ nukreipta prieš \vec{B} kryptį, t.y. į viršų. \vec{B}_{ind} ir šiuo atveju turi būti nukreipta

prieš $\frac{d\vec{B}}{dt}$ kryptį, t.y. žemyn. Išsiaiškinę \vec{B}_{ind} kryptį, pagal dešiniojo sraigto taisyklę nustatome I_{ind} kryptį.

Panašiai samprotaujant lengva nustatyti indukuotosios srovės kryptį, kai magnetas pietiniu poliumi artėja prie vijos (14c pav.) ar tolsta nuo jos (14d pav.).

Atkreipsime dėmesį, kad **indukuotosios srovės kryptis susijusi su $\frac{d\vec{B}}{dt}$ vektoriaus kryptimi**

kairinio sraigto taisykle.

Elektros srovės atsiradimas uždarame kontūre rodo, kad kontūrą veikia neelektrostatinės kilmės pašalinis laukas, kuris sąlygoja indukcinę elektrovarą ϵ_{ind} . Remiantis Omo dėsnio indukuotosios srovės stipris

$$I_{ind} = \frac{\epsilon_{ind}}{R}. \quad (37)$$

Čia R – kontūro varža.

Pagal Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnį

$$\epsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (38)$$

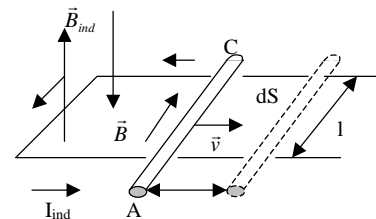
Minusas ženklas čia rašomas atsižvelgiant į Lenco taisyklę.

Jei kontūras būtų superlaidus ($R=0$), tada jame indukuotųsi tokio stiprio srovė, kad jos sukurtas magnetinis srautas visiškai kompensuotų magnetinio srauto kitimą, t.y. superlaidaus kontūro ribojamą plotą kertantis magnetinis srautas nepakistų. Taigi superlaidaus kontūro atveju

$$\Phi = const.$$

Jei kelis nuosekliai sujungtus kontūrus kerta tas pats magnetinis srautas, tada indukcinė ev lygi indukcinė ev kiekviename kontūre sumai. Pavyzdžiui, jei tas pats magnetinis srautas kerta ritę, turinčią N vijų, ritėje indukuojama ev

$$\epsilon_{ind} = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (39)$$



15 pav.

Panagrinėkime, kokios kilmės yra pašalinis laukas, sąlygojantis indukcinę ev. Pasirodo, jog šio lauko kilmė gali būti dvejopa.

Kai magnetinis laukas pastovus, o kontūrą kertantis magnetinis srautas kinta dėl kontūro laidininkų judėjimo magnetiniame lauke, indukcinės ev priežastis esti Lorencio jėga. Panagrinėkime stačiakampį kontūrą, esantį vianalyčiame magnetiniame lauke, kurio srauto tankio vektorius \vec{B} statmenas kontūro plokštumai (15 pav.).

Tarkime, laidininkas AC greičiu \vec{v} šliaužia dviem kontūro laidais, tarp kurių atstumas l . Kartu su laidininku judančius jame esančius laisvuosius krūvininkus veikia Lorencio jėga

$$F_L = qvB,$$

kurios kryptį nustatome pagal kairiosios rankos taisyklę. Čia q - krūvininko krūvis. Kelyje l ši jėga atlieka darbą

$$A = F_L l = qvBl.$$

Nejudančio kontūro dalyse $F_L=0$, todėl visas darbas, kurį atlieka Lorencio jėga perkeldama krūvi q uždarą kontūrą, lygus jos darbui A judančioje kontūro dalyje. Taigi

$$\varepsilon_{ind} = \frac{A}{q} = vBl.$$

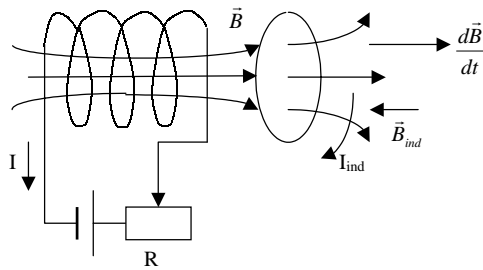
Bendru atveju, jei kampas tarp vektorių \vec{B} ir \vec{v} yra α , $F_L = qvB \sin \alpha$ ir

$$\varepsilon_{ind} = vBl \sin \alpha. \quad (40)$$

(40) formulę galime gauti ir kitokiu būdu, remdamiesi Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnio (38). Per laiką dt judantis laidininkas AC paslenka atstumu $ds=vdt$, o kontūrą kertantis magnetinis srautas pakinta dydžiu $d\Phi = Bl ds = Blv dt$, taigi

$$|\varepsilon_{ind}| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = Blv.$$

15 pav. pavaizduotu atveju kontūrą kertantis magnetinis srautas didėja, todėl srovės I_{ind} kuriamas magnetinis laukas nukreiptas prieš išorinio magnetinio lauko \vec{B} kryptį.



16 pav.

Dabar smulkiau panagrinėkime indukcinės ev atsiradimą, kai kontūras ar jo dalys magnetiniame lauke nejuda, bet magnetinis srautas kinta dėl to, kad kinta magnetinio srauto tankis B . Sakykime, kad magnetinį lauką sukuria rite tekanti srovė I , o vija yra tos ritės magnetiniame lauke (16 pav.).

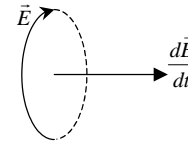
Magnetinio srauto tankį galime keisti reostatu keisdami srovės I stiprį. Tarkime, jog I stiprėja. Tada kontūrą kertantis magnetinis srautas irgi didėja, o kontūre atsiranda indukuotoji srovė I_{ind} , kurianti magnetinį lauką \vec{B}_{ind} , nukreiptą prieš $\frac{d\vec{B}}{dt}$ kryptį. Kokios kilmės yra ši indukuotąją

srovę sąlygojanti ev? Lorencio jėga šiuo atveju neveikia kontūro laidininko krūvių, nes laidininkas su krūviais nejuda. Atsakymą į šį klausimą pirmasis rado Maksvelis (J. K. Maxwell). Nejudančius krūvius gali veikti tiksliai elektrinis laukas. Vadinasi, **kintant magnetiniam laukui erdvėje atsiranda elektrinis laukas**. Jis veikia kontūro laidininke esančius laisvuosius krūvius, ir šie juda sukurdami indukuotąją srovę. Šis elektrinis laukas, skirtingai nuo elektros krūvių kuriamo elektrostatinio lauko, nėra potencialinis, todėl

$$\oint_{(L)} (\vec{E}, d\vec{l}) = \varepsilon_{ind} \neq 0. \quad (41)$$

Kintamojo magnetinio lauko kuriamas elektrinis laukas vadinamas **sūkuriniu elektriniu lauku**. Jo stiprio linijos yra uždaros, panašiai, kaip magnetinio srauto tankio linijos.

Atkreipkime dėmesį, kad kintant magnetiniam laukui sūkurinis elektrinis laukas atsiranda ir nesant laidaus kontūro. Indukuotosios srovės tada, be abejo, nesti. Vektorius \vec{E} visais atvejais esti statmenas vektoriui \vec{B} ($\vec{E} \perp \vec{B}$), o \vec{E} **kryptis susijusi su $\frac{d\vec{B}}{dt}$ kryptimi kairinio sraigto taisykle** (17 pav.).



17 pav.

10. Saviindukcija ir abipusė indukcija. Induktyvumas ir abipusis induktyvumas

Jei laidžiu kontūru tekančios srovės stipris kinta, tos srovės kuriamas magnetinis laukas irgi kinta. Pagal elektromagnetinės indukcijos dėsnį šis kintamas magnetinis laukas erdvėje kuria sūkurinį elektrinį lauką, kuris sąlygoja indukcinės elektrovaros atsiradimą. Indukcinė elektrovara atsiranda tiek kitame kontūre, jeigu jis esti pirmojo kontūro magnetiniame lauke, tiek ir tame pačiame kontūre, kuriuo teka kintančioji srovė. Pirmuoju atveju turime **abipusės indukcijos** reiškinių, antruoju – **saviindukcijos** reiškinių, o kontūruose atsiranda atitinkamai abipusės indukcijos ir saviindukcijos elektrovaros.

Saviindukcijos atveju magnetinį lauką kuria tuo pačiu kontūru tekanti srovė, todėl kontūro ribojamą plotą kertantis magnetinis srautas yra proporcingas tos srovės stipriui I , nes magnetinio srauto tankis B pagal Bio ir Savaro dėsnį (žr. (1)) yra proporcingas I , o magnetinis srautas savo ruožtu proporcingas B . Taigi $\Phi \sim B \sim I$. **Proporcingumo koeficientas tarp srovės stiprio kontūre ir šios srovės sukurto šio kontūro ribojamą plotą kertančio magnetinio srauto vadinamas kontūro induktyvumu L :**

$$\Phi = LI. \quad (42)$$

Induktyvumas priklauso nuo laidininko matmenų ir formos, taip pat nuo aplinkos, kurioje yra laidininkas, magnetinių savybių. Induktyvumo SI vienetas yra **henris** (H). Jis apibrėžiamas remiantis (42) formule

$$L = \frac{\Phi}{I}. \quad (43)$$

Sutinkamai su (43), 1H lygus induktyvumui tokio kontūro, kuriuo tekanti 1A stiprio srovė sukuria 1 Wb magnetinį srautą, kertantį šio kontūro ribojamą plotą: 1H=1 Wb /1A.

Jei tas pats magnetinis srautas Φ kerta N nuosekliai sujungtų vijų (tarkime, ritę), tada induktyvumas:

$$L = N \frac{\Phi}{I}. \quad (44)$$

Jei kontūro aplinkoje yra magnetikas, kurio magnetinė skvarba μ , tada tos srovės kuriamas magnetinio srauto tankis B padidėja μ kartų lyginant su srauto tankiu vakuume (žr. (31)). μ kartų padidėja ir magnetinis srautas Φ , taigi μ kartų padidėja ir induktyvumas:

$$L = \mu L_0.$$

Čia L_0 – vakuume esančio kontūro induktyvumas. Paramagnetikų ir diamagnetikų $\mu \approx 1$, todėl $L \approx L_0$. Feromagnetikai, turintys dideles μ vertes, ženkliai padidina kontūro induktyvumą. Tačiau feromagnetikų atveju μ verė nėra pastovi, o priklauso nuo B_0 , taigi ir nuo srovės stiprio. Todėl ir ritės su feromagnetine šerdimi induktyvumas priklauso nuo jos vėjomis tekančios srovės stiprio.

Saviindukcijos ε_s galime išreikšti remdamiesi (38) ir (42) formulėmis:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (45)$$

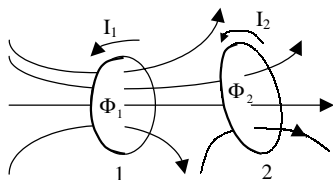
Ritės atveju sutinkamai su (39) ir (44):

$$\varepsilon_s = -N \frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt},$$

t.y. gauname tą pačią (45) formulę.

Panagrinėkime dviejų kontūrų abipusę indukciją (18 pav.).

Tarkime, 1 kontūru teka srovė I_1 , o 2 kontūru – I_2 . Aplinkoje nesant feromagnetikų kiekvieną kontūrą kertantį magnetinį srautą kuria abi



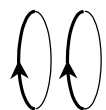
18 pav.

srovės:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 I_1 + L_{12} I_2, \\ \Phi_2 &= L_{21} I_1 + L_2 I_2. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

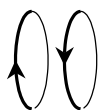
Čia L_1 ir L_2 – 1 ir 2 kontūrų induktyvumai, o L_{12} ir L_{21} – tų dviejų kontūrų **abipusiai induktyvumai**. Jų fizikinę prasmę nesunku išsiaiškinti remiantis (46) formulėmis. Pavyzdžiui,

$$\left. \begin{aligned} L_{12} &= \frac{\Phi_1}{I_2}, \text{ kai } I_1 = 0, \\ L_{21} &= \frac{\Phi_2}{I_1}, \text{ kai } I_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$



$$L_{12} > 0$$

a)



$$L_{12} < 0$$

b)

Kaip paaiškėja iš (47), abipusiai induktyvumai sieja vienu kontūru tekančią srovę su jos kuriamu kitą kontūrą kertančiu magnetiniu srautu.

Atlikus sudėtingesnius skaičiavimus galima įrodyti, kad neferomagnetinėse aplinkose visada galioja lygybė:

$$L_{12} = L_{21}.$$

Ši lygybė išreiškia **abipusiškumo teoremą**. Ją patvirtina ir eksperimentiniai matavimai.

19 pav.

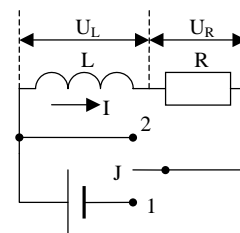
Abipusis induktyvumas priklauso nuo abiejų kontūrų formos, matmenų, atstumo tarp jų, jų tarpusavio orientacijos bei aplinkos, kurioje yra kontūrai, magnetinės skvarbos.

Reikia pažymėti, kad kontūro induktyvumas L visada esti teigiamas dydis, o abipusis induktyvumas L_{12} (ar L_{21}) gali būti teigiamas, neigiamas, arba lygus nuliui. Jei abiejuose kontūruose srovių kryptys tokios, kad jų kuriami magnetiniai srautai vienas kitą stiprina, tada $L_{12} > 0$, jei vienas kitą silpnina, tada $L_{12} < 0$. Tai matyti ir iš (46) lygybių. Pavyzdžiui, jei abiejų srovių I_1 ir I_2 kuriamas 1 kontūrą kertantis magnetinis srautas Φ_1 yra mažesnis už srautą, kuriamą vien tik srovės I_1 , tai nariai $L_1 I_1$ ir $L_{12} I_2$ turi būti priešingų ženklų, o tai galima esant $L_{12} < 0$. Pakeitus viename iš kontūrų srovės kryptį į priešingą, pasikeičia ir L_{12} ženklas.

Dviejų bendraašių kontūrų srovių kryptys, kai $L_{12} > 0$ ir $L_{12} < 0$, parodytos 19 pav.

11. Nuolatinės srovės įjungimas ir išjungimas, kai grandinėje yra induktyvumas ir varža

Grandinėje, kurios schema pavaizduota 20 pav., jungiklį J įjunkime į 1 padėtį.



ε

20 pav.

Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę

$$IR = \varepsilon + \varepsilon_s. \quad (48)$$

Į (48) įrašę ε_s (45) išraišką, gauname:

$$IR = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}. \quad (49)$$

Kaip matyti iš (49), srovės kitimas laikui bėgant aprašomas pirmos eilės diferencialine lygtimi. Ją sprendžiame atskirdami kintamuosius t ir I . Tam tikslui (49) pertvarkome taip:

$$L \frac{dI}{dt} = \varepsilon - IR,$$

$$\frac{dI}{\varepsilon - IR} = \frac{dt}{L},$$

$$\int \frac{dI}{\varepsilon - IR} = \int \frac{dt}{L},$$

$$-\frac{1}{R} \int \frac{d(\varepsilon - IR)}{\varepsilon - IR} = \frac{t}{L},$$

$$-\frac{1}{R} \ln(\varepsilon - IR) = \frac{t}{L} + A.$$

Čia A – integravimo konstanta. Ją nustatome iš pradinės sąlygos, kuri šiuo atveju tokia:

$$I=0, \text{ kai } t=0.$$

Iš čia nustatome, kad

$$A = -\frac{1}{R} \ln \varepsilon.$$

Įrašę šią konstantą į sprendinį, gauname

$$-\frac{1}{R} \ln(\varepsilon - IR) = \frac{t}{L} - \frac{1}{R} \ln \varepsilon,$$

arba

$$\ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon - IR} = \frac{Rt}{L}.$$

Antilogaritmuojame ir išreiškiame I:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon - IR} = e^{\frac{Rt}{L}},$$

$$\frac{\varepsilon - IR}{\varepsilon} = e^{-\frac{Rt}{L}},$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} (1 - e^{-\frac{Rt}{L}}).$$

(50) aprašo srovės stiprio kitimą grandinėje po to, kai laiko momentu $t=0$ įjungiamas nuolatinės įtampos šaltinis. Iš (50) matome, jog I artėja prie nuostoviosios vertės $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$, kai $t \rightarrow \infty$.

Kai grandinėje nusistovi srovė $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$, jungiklį J perjunkime į 2 padėtį. Dabar grandinėje

$\varepsilon = 0$, ir pagal (49)

$$IR = -L \frac{dI}{dt}.$$

Atskyrę kintamuosius, gauname:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt,$$

o suintegravę –

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + B.$$

Integravimo konstantą B nustatome iš pradinės sąlygos, kuri šiuo atveju tokia:

$$I = I_0 = \frac{\varepsilon}{R}, \text{ kai } t = 0.$$

Taigi

$$B = \ln \frac{\varepsilon}{R},$$

o

$$\ln I = -\frac{R}{L} t + \ln I_0,$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t,$$

(51)

$$I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Kaip matome iš (51), srovės stipris grandinėje eksponentiškai mažėja artėdamas prie nulio, kai $t \rightarrow \infty$.

12. Magnetinio lauko energija

Prie grandinės, susidedančios iš nuosekliai sujungtų induktyvumo L ir varžos R, prijunkime nuolatinės įtampos šaltinį, kurio elektrovara ε (žr. 20 pav., jungiklio J 1 padėtis). Grandine ims tekėti srovė I. (49) formulę galime užrašyti ir taip:

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt}.$$

Šios lygybės abi puses padauginę iš Idt, gausime:

$$\varepsilon Idt = I^2 R dt + LI dI.$$

$\varepsilon Idt = dA_{\text{pas}}$ – šaltinio pašalinių jėgų per laiką dt atliktas darbas, $I^2 R dt = dQ$ - per tą patį laiką varžoje R išsiskyręs šilumos kiekis. Matome, kad

$$dA_{\text{pas}} = dQ + LI dI,$$

t.y. šaltinio pašalinių jėgų atliktas darbas yra didesnis už grandinėje išsiskyrusį šilumos kiekį per tą patį laiką. Šio darbo ir šilumos kiekio skirtumas $LI dI$ virto magnetinio lauko energija. Taigi

$$dW = LI dI. \quad (52)$$

Jei srovės stipris grandinėje padidėja nuo 0 iki I, integruodami (52) gauname:

$$W = \int_0^I LI' dI' = \frac{LI^2}{2}. \quad (53)$$

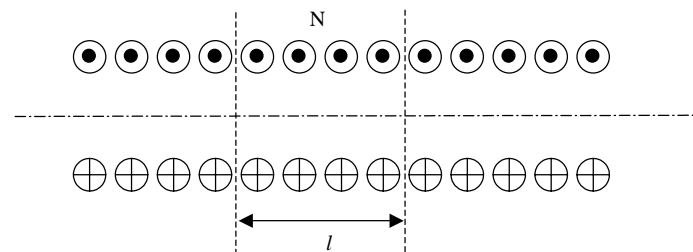
Atsižvelgdami į (42), kontūro su srove magnetinio lauko energiją galime apskaičiuoti pagal vieną iš šių formulių:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Phi}{2} = \frac{\Phi^2}{2I}. \quad (54)$$

Galima gauti ir kitokią magnetinio lauko energijos išraišką, į kurią įeitų ne srovės stipris I, o magnetinio srauto tankis B.

Žinome, kad ilgos ritės (solenoido) vijomis tekanti elektros srovė toli nuo ritės galė sukuria vienalytį magnetinį lauką.

Išskirkime ilgoje ritėje toli nuo galų esančią l ilgio jos dalį, kurios vijų skaičius yra N (21 pav.). Ritės skerspjūvio plotą pažymėkime S.



21 pav.

Tos dalies induktyvumą skaičiuosime pagal (44) formulę, kurioje magnetinis srautas: $\Phi = BS$,

o srauto tankis B sutinkamai su (9)

$$B = \mu_0 In = \mu_0 I \frac{N}{l}. \quad (55)$$

Šias išraiškas įrašę į (44), nustatome, kad induktyvumas

$$L = \frac{NBS}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}, \quad (56)$$

o jame sukaupta magnetinio lauko energija

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{2l}.$$

Pasinaudoję (55), nustatome, kad

$$W = \frac{\mu_0 N^2 S}{2l} \cdot \left(\frac{Bl}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{B^2 Sl}{2\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} V.$$

Čia $V=Sl$ – išskirtosios ritės dalies tūris. Matome, kad magnetinio lauko energija proporcinga tūriui erdvės, kurioje yra magnetinis laukas. Apskaičiuojame energiją, tenkančią tūrio vienetui:

$$u_m = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (57)$$

Jeigu solenoide būtų magnetikas, tuo atveju

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (58)$$

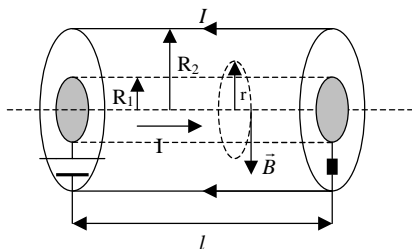
Dydis u_m vadinamas **magnetinės energijos tūriniu tankiu**.

Nevienalyčio magnetinio lauko atveju energijos tūrinį tankį reikėtų išreikšti taip:

$$u_m = \frac{dW}{dV}. \quad (59)$$

Tuo atveju tūryje V sukaupta magnetinio lauko energija turi būti skaičiuojama taip:

$$W = \int_{(V)} u_m dV. \quad (60)$$



22 pav.

Tarkime, jog viename gale tarp kabelio vidinio laido ir apvalkalo prijungtas nuolatinės įtampos šaltinis, kitame gale tie laidininkai sujungti varža, ir vidiniu laidu bei apvalkalu teka vienodo dydžio, bet priešingų kryptų srovės I (22 pav.).

Magnetinio srauto tankį B r atstumu nuo kabelio ašies apskaičiuojame pasinaudodami suminės srovės dėsnio (14).

Kai $R_1 < r < R_2$,

$$2\pi r B = \mu_0 I, \quad (62)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Kai $r < R_1$,

$$2\pi r B = \frac{\mu_0 I \cdot \pi r^2}{\pi R_1^2} = \frac{\mu_0 I r^2}{R_1^2}, \quad (63)$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}.$$

Kai $r > R_2$, $B = 0$, nes $\sum I_i = I - I = 0$.

Magnetinio lauko energija, esant r spindulio dr storio cilindriniam sluoksnyje, kurio ilgis l , o tūris $dV=2\pi r l dr$, manant, kad vidinio laido ir izoliatoriaus $\mu=1$,

$$dW = u_m dV = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot 2\pi r l dr = \frac{\pi B^2 l r dr}{2\mu_0}.$$

Visą kabelio magnetinio lauko energiją apskaičiuojame į šią išraišką įrašę magnetinio srauto tankius pagal (62) ir (63) ir integruodami:

$$W = \int_0^{R_1} \frac{\mu_0 I^2 l r^3 dr}{4\pi R_1^4} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2 l dr}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right).$$

Kabelio induktyvumas pagal (61)

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{R_2}{R_1} \right). \quad (64)$$

Kabelio induktyvumą skaičiuodami pagal (43) formulę neatsižvelgdami į magnetinį srautą vidiniame laide gautume (64) išraišką be $\frac{1}{4}$. Taip skaičiuoti būtų galima, jei vidinis laidas būtų ganėtinai plonas, ir todėl $\ln \frac{R_2}{R_1} \gg \frac{1}{4}$. Jei skaičiuodami induktyvumą pagal (43) formulę

įskaitytume magnetinį srautą laido viduje, (64) išraiškoje vietoj $\frac{1}{4}$ gautume $\frac{1}{2}$. Šis rezultatas irgi būtų neteisingas, nes laido viduje einančios lauko jėgų linijos apjuosia ne visą vidinį laidą, o tik jos dalį.

13. Kintamoji elektros srovė

Kintamosios elektros srovės stipris kinta laikui bėgant. Čia nagrinėsime tik tokias kintamąsias sroves, kurios kinta pagal harmoninį dėsnį, apibūdinamą lygtimis

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (65)$$

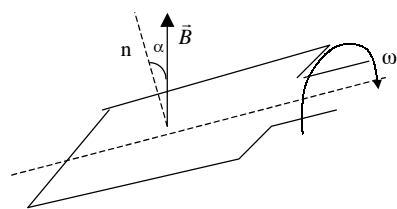
arba

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (66)$$

Čia I – srovės stiprio **momentinė** vertė, I_0 – jos **amplitudė**, $\omega t + \varphi$ – **fazė**, ω – **kampinis dažnis**, t – laikas, φ – **pradinė fazė**. Kampinis dažnis ω taip susijęs su **dažniu** ν bei **periodu** T :

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (67)$$

Kintamąją srovę grandinėje sukulia kintamoji elektrovara. Nedidelio dažnio kintamoji ev gaunama pastoviu kampiniu greičiu sukant vielinį rėmelį vianalyčiame magnetiniame lauke.



23 pav.

Sakykime, rėmelio plotas S , o magnetinio srauto tankio \vec{B} vektorius su statmeniu rėmelio plokštumai n sudaro kampą α (23 pav.). Rėmelio plotą kertantis magnetinis srautas Φ šiuo atveju išreiškiamas taip:

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Rėmeliui sukantis kampiniu greičiu ω , kampas α kinta pagal dėsnį $\alpha = \omega t$. Tada

$$\Phi = BS \cos \omega t,$$

o indukcinė ev sutinkamai su Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsniu (38)

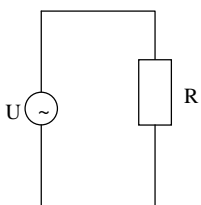
$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = \varepsilon_0 \sin \omega t. \quad (68)$$

Čia $\varepsilon_0 = BS\omega$ - kintamosios elektrovaros amplitudė.

Didelio dažnio kintamoji ev gaunama lempiniuose ar puslaidininkiniuose generatoriuose (žr.42 psl.).

14. Aktyvioji, talpinė ir induktyvioji varžos

Tarkime, kad prie kintamosios įtamos šaltinio prijungta varža R (24 pav.).



24 pav.

Jei šaltinio gnybtų įtampa kinta pagal dėsnį

$$U = U_0 \sin \omega t, \quad (69)$$

grandine teka kintamoji srovė

$$I = I_0 \sin \omega t.$$

Pagal Omo dėsnį varžos įtampa

$$U_R = IR = I_0 R \sin \omega t.$$

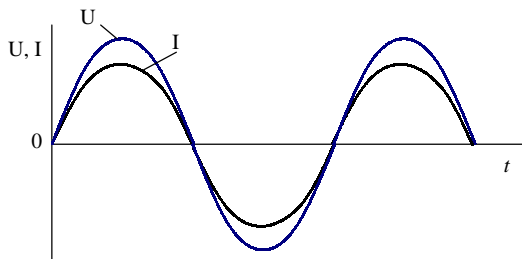
Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę šiuo atveju $U_R = U$. Taigi

$$I_0 R \sin \omega t = U_0 \sin \omega t,$$

$$\text{arba } I_0 = \frac{U_0}{R}. \quad (70)$$

Iš (70) matome, kad sąryšis tarp kintamosios srovės ir įtamos amplitudžių yra toks pat, kaip ir nuolatinės srovės grandinėje tarp srovės ir įtamos, o fazių skirtumas tarp srovės ir įtamos virpesių nesidaro (25 pav.).

Dabar panagrinėkime kondensatorių, kurio talpa C , prijungtą prie kintamosios įtamos šaltinio U (26 pav.).



25 pav.

Kondensatoriaus įtampą bet koku laiko momentu t pažymėkime U_C . Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę $U_C = U$. Kondensatoriaus įtampa U_C susijusi su jo krūviu taip:

$$U_C = \frac{q}{C},$$

taigi

$$\frac{q}{C} = U_0 \sin \omega t.$$

Šią lygybę išdiferencijavę pagal laiką t ir turėdami omenyje,

kad $\frac{dq}{dt} = I$, gauname

$$\frac{I}{C} = U_0 \omega \cos \omega t = U_0 \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Iš čia nustatome, kad

$$I = U_0 C \omega \sin(\omega t + \pi/2), \quad (71)$$

o srovės stiprio amplitudė

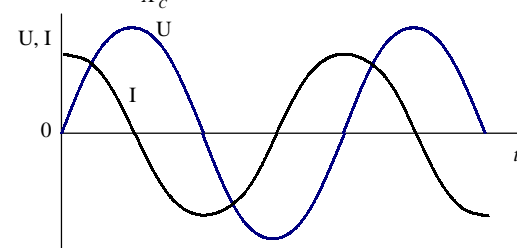
$$I_0 = U_0 C \omega. \quad (72)$$

Pažymėkime

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (73)$$

Tada (72) galima suteikti Omo dėsnio pavidalą

$$I_0 = \frac{U_0}{X_C}. \quad (74)$$



27 pav.

Dydis $X_C = \frac{1}{\omega C}$ vadinamas

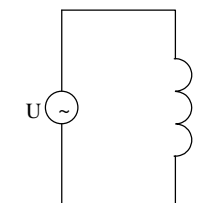
talpine varža.

Iš (71) matome, kad srovės stiprio kondensatoriuje fazė pralenkia jo įtamos fazę $\pi/2$ rad (arba 90°) kampu (27 pav.).

Pagaliau tarkime, kad prie kintamosios įtamos šaltinio prijungta ritė, kurios induktyvumas L , o varža nuolatinei srovei labai maža (28 pav.). Kintant srovei ritėje atsiranda saviindukcijos ev (žr. (45)). Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę $U = U_L$. Čia $U_L = -\varepsilon_s = L \frac{dI}{dt}$. Vietoj U įrašę (69) išraišką, gauname diferencialinę lygtį

$$U_0 \sin \omega t = L \frac{dI}{dt}.$$

Atskiriame kintamuosius:



28 pav.

$$dI = \frac{U_0}{L} \sin \omega t dt.$$

Integruodami gauname:

$$I = \frac{U_0}{L} \int \sin(\omega t) dt = \frac{U_0}{\omega L} \int \sin(\omega t) d(\omega t) = -\frac{U_0}{\omega L} \cos \omega t = -\frac{U_0}{\omega L} \sin(\pi/2 - \omega t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2). \quad (75)$$

Iš (75) matome, kad srovės stiprio amplitudė

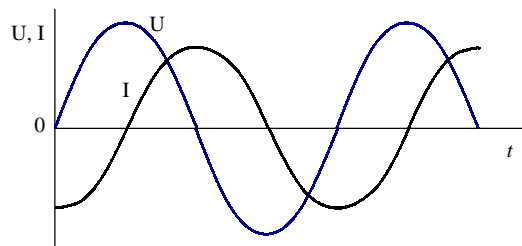
$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L}. \quad (76)$$

Dydis

$$X_L = \omega L$$

(77)

vadinamas **induktyviaja varža**.



29 pav.

Iš (75) matome, kad **induktyviojoje varžoje srovės stiprio fazė atsilieka nuo įtampos fazės $\pi/2$ rad (arba 90°) kampu** (29 pav.).

Kaip išsiaiškinsime toliau, tekant srovei talpinėje ir induktyviojoje varžose neišsiskiria šiluma. Todėl tos varžos dar vadinamos **reaktyviosiomis varžomis**. Elektros energija virsta šilumine energija tik varžoje

R, todėl ji vadinama **aktyviaja (omine) varža**.

15. Kintamosios srovės grandinių skaičiavimas vektorinių diagramų ir kompleksinių dydžių metodais. Impedansas

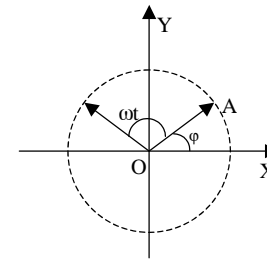
Nagrinėjant kintamosios srovės grandines, tenka sumuoti vienodo dydžio, bet nevienodų amplitudžių bei pradinių fazių harmoningai kintančias elektrovaras, įtampas ar sroves. Šis uždavinys gana paprastai ir vaizdžiai išsprendžiamas harmonines funkcijas atvaizduojant besisukančiais vektoriais. Pavyzdžiui, elektrovarą

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

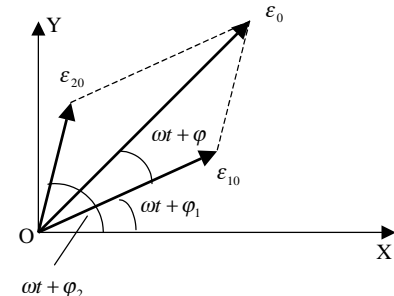
galima atvaizduoti taip. Pasirinkime stačiakampią koordinatų sistemą XOY ir susitarsime teigiamuosius kampus atidėti kryptimi, priešinga laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi. Kampu φ į X ašį atidūsime vektorių OA , kurio ilgis pasirinktu masteliu lygus ev amplitudei ε_0 (30 pav.). Vektorių OA sukime apie koordinatų pradžią teigiamąja kryptimi pastoviu kampiniu greičiu ω , lygiu ev kampiniam dažniui. Praslinkus laikotarpiui t vektorius OA pasisuks kampu ωt ir su X ašimi sudarys kampą $\omega t + \varphi$. To vektoriaus projekcija į Y ašį bus lygi $OAsin(\omega t + \varphi) = \varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi) = \varepsilon$, o jo projekcija į X ašį - $OAcos(\omega t + \varphi) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi)$.

Tarkime, jod turime sudėti dvi to paties dažnio sinusines ev $\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} \sin(\omega t + \varphi_1)$ ir $\varepsilon_2 = \varepsilon_{20} \sin(\omega t + \varphi_2)$. Tuo pačiu masteliu nubrėžkime du vektorius, kurių ilgiai ε_{10} ir ε_{20} sudarančius su X ašimi kampus $\omega t + \varphi_1$ ir $\omega t + \varphi_2$ atitinkamai ir juos geometriškai sudėkime (pavyzdžiui, pagal lygiagrečio taisyklę) (31 pav.).

Kadangi vektorių projekcijų į tą pačią ašį suma lygi tų vektorių sumos projekcijai į tą ašį, akivaizdu, kad vektoriaus ε_0 ilgis yra lygus pasirinktu masteliu atvaizduotų harmoninių funkcijų amplitudžių sumai $\varepsilon_0 = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{20}$, o kampas $\omega t + \varphi$ reiškia suminės ev fazę.



30 pav.

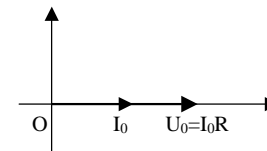


31 pav.

Jeigu mums rūpi tik ev, įtampų ar srovių amplitudės ir fazių skirtumo tarp jų kampai, kaip dažniausiai ir esti, tada svarbu tik kokius kampus vektoriai sudaro vienas su kitu, o kokius kampus jie sudaro su ašimis – nesvarbu. Šiuo atveju vieną vektorių galima nubrėžti bet kokių kampu su X ašimi, tačiau visus kitus vektorius reikia brėžti taip, kad jie su laisvai pasirinktu vektoriumi sudarytų tikruosius jų fazių skirtumo kampus. Dažniausiai laisvai pasirenkamas vektorius brėžiamas horizontalioje (X) ašyje.

Nubraižysime ankstesniame paragrafe išnagrinėtų grandinių vektorines diagramas.

Kai grandinėje yra tik varža R (žr. 24 pav.), įtampos ir srovės vektorinė diagrama gali būti tokia, kaip pavaizduota 32 pav. Šiuo atveju nėra fazių skirtumo tarp srovės stiprio ir įtampos, taigi abu vektoriai, vaizduojantys U_0 ir I_0 , brėžiami ta pačia, pavyzdžiui, horizontalia, kryptimi. Be abejo, U_0 ir I_0 masteliai gali būti skirtingi, nes šių dydžių matavimo vienetai yra skirtingi.



32 pav.

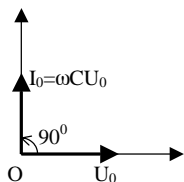
26 pav. grandinėje srovės stiprio fazė pralenkia įtampos fazę 90° kampu. Jei šaltinio įtampos amplitudę atvaizduotum vektoriumi horizontaliojoje ašyje, srovės stiprio amplitudę atitinkantį vektorių reikėtų brėžti vertikalojoje ašyje į viršų (33 pav.). Tačiau galima horizontaliojoje ašyje atvaizduoti ir I_0 . Tada įtampą U_0 vaizduojantį vektorių būtina brėžti vertikalojoje ašyje žemyn (34 pav.).

Abiejuose 33 ir 34 pav. pavaizduotos vektorinės diagramos yra teisingos.

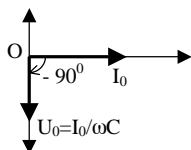
218 pav. pavaizduotos grandinės įtampos ir srovės stiprio vektorinė diagrama gali būti tokia, kaip pavaizduota 35 pav.

Kompleksinio skaičiaus algebrinė forma yra $a+ib$.

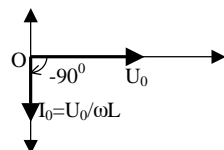
Čia $i = \sqrt{-1}$ - menamasis vienetas. Jo sveikojo rodiklio laipsniai yra tokie: $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. a vadinama **realiaja**, b - **menamąja** kompleksinio skaičiaus dalimis, $\sqrt{a^2 + b^2}$ - kompleksinio skaičiaus **moduliu**. Su kompleksiniais skaičiais galima atlikti sudėties, atimties, daugybos ir dalybos veiksmus pagal atitinkamas veiksmų su daugianariais taisykles atsižvelgiant į aukščiau nurodytus menamojo vieneto laipsnius.



33 pav.

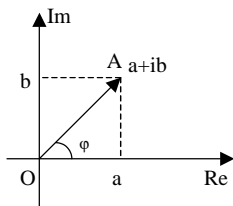


34 pav.



35 pav.

Kompleksiniai skaičiai $a+ib$ ir $a-ib$, kurių realiosios dalys vienodos, o menamųjų dalių skiriasi tik ženklai, vadinami **kompleksiškai jungtiniais skaičiais**. Jų sandauga yra realus skaičius, lygus bet kurio iš tų dviejų skaičių modulio kvadratu: $(a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iab - i^2 b^2 = a^2 + b^2$.



36 pav.

Kompleksinius skaičius galima atvaizduoti geometriškai stačiakampėje koordinatinių sistemoje. Susitarkime horizontaliąją (X) ašį vadinti realiaja (Re), o vertikaliąją (Y) ašį - menamąja ašimi (Im). Realiojoje ašyje tam tikru masteliu atidėkime atkarpą, lygią kompleksinio skaičiaus $a+ib$ realiajai daliai a , o menamojoje ašyje - tuo pačiu masteliu atkarpą, lygią menamajai daliai b , ir per tų atkarpų galus iškelkime statmenis ašims (36 pav.). Statmenų sankirtos taškas A yra kompleksinio skaičiaus $a+ib$ geometrinis vaizdas. Sujungę koordinatų pradžios tašką O su tašku A , galime nubrėžti vektorių \vec{OA} , kurio dedamosios yra (a,b) , o modulis (ilgis) $\sqrt{a^2 + b^2}$. Kampas ϕ tarp šio vektoriaus

ir realiosios ašies remiantis stačiojo trikampio trigonometrija gali būti lengvai išreikštas per a , b bei modulį $\sqrt{a^2 + b^2}$:

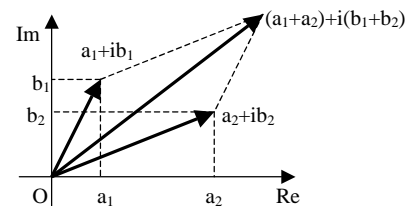
$$\phi = \arctg \frac{b}{a} = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Tarkime, norime sudėti du kompleksinius skaičius a_1+ib_1 ir a_2+ib_2 . Sudėję algebrškai gausime:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2).$$

Tą patį galime atlikti ir nubrėžę tuos skaičius atitinkančius vektorius ir juos sudėdami geometriškai (37 pav.).

Taigi kompleksinius skaičius galime panaudoti kintamosios srovės grandinėms skaičiuoti. Jei grandinėje yra tik vienas kintamosios įtampos šaltinis, galima tarti, kad jo ev pradinė fazė lygi nuliui ir jo ev yra išreiškiamas realiuoju skaičiumi. Jei to paties dažnio šaltinių būtų daugiau, vieno iš jų ev pasirinkta realia, kitų šaltinių ev tektų išreikšti kompleksiniais skaičiais, kurių moduliai būtų lygūs jų ev, o jų realiosios dalys būtų lygios moduliams, padaugintiems iš $\cos \phi_i$, menamosios dalys - moduliams, padaugintiems iš $\sin \phi_i$ (žr. 36 pav.). Čia ϕ_i - fazių skirtumas tarp to šaltinio, kurio ev pasirinkta realia ir i - ojo šaltinio ev.



37 pav.

Kaip matėme (žr. 32 pav.) aktyviojoje varžoje fazių skirtumo tarp įtampos ir srovės stiprio nesti. Todėl aktyvioji varža R yra realus dydis. Tuo tarpu talpinė ir induktyvioji varžos esti menamos.

Esant grandinėje kondensatoriui, pagal (74) ir (73)

$$I_0 = \frac{U_0}{X_C} = \omega C U_0.$$

Jei U_0 pasirinktas realia, I_0 turi su realiaja ašimi sudaryti $+90^\circ$ kampą (žr.

33 pav.), t.y. būti menama. Kad taip būtų, talpinę varžą tenka tarti esant menama ir lygia

$$\boxed{\dot{X}_C = -\frac{i}{\omega C}} \quad (78)$$

Tada

$$\dot{I}_0 = \frac{U_0}{\dot{X}_C} = \frac{U_0}{-\frac{i}{\omega C}} = \frac{U_0 \omega C}{-i} = \frac{U_0 \omega C i}{-i \cdot i} = i U_0 \omega C.$$

(Čia ir toliau kompleksinius dydžius žymėsime atitinkamais simboliais su tašku virš jų, o jų modulius - be taško).

Esant grandinėje induktyvumui, I_0 su realiaja ašimi sudaro -90° kampą (žr. 35 pav.) ir yra lygi (žr. (76) ir (77) formules)

$$I_0 = \frac{U_0}{X_L} = \frac{U_0}{\omega L}.$$

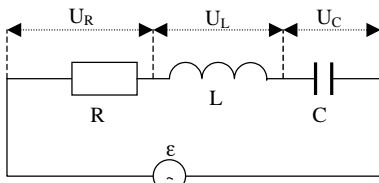
Šios sąlygos bus patenkinamos, jei tarsime, kad

$$\boxed{\dot{X}_L = i \omega L} \quad (79)$$

Iš tikrųjų

$$\dot{I}_0 = \frac{U_0}{\dot{X}_L} = \frac{U_0}{i \omega L} = \frac{U_0 i}{i^2 \omega L} = -\frac{i U_0}{\omega L}.$$

Bendresniu atveju grandinėje gali būti keletas skirtingų tipų (aktyviųjų, talpinių, induktyviųjų) varžų, sujungtų įvairiai (nuosekliai, lygiagrečiai, mišriai). Tokios grandinės varža išreiškiamą kompleksiniu skaičiumi ir vadinama **kompleksine varža**, arba **impedansu**. Ją galima apskaičiuoti pagal tas pačias taisykles, kaip ir nuolatinės srovės grandinių atveju, tik talpines ir induktyvias varžas reikia tarti esant menamosiomis. Kompleksines varžas žymėsime simboliu \dot{Z} , o jų modulius - Z .



38 pav.

Kaip pavyzdį panagrinėkime grandinę, sudarytą iš nuosekliai sujungtų varžos R , L induktyvumo ritės, C talpos kondensatoriaus ir kintamosios srovės generatoriaus, kurio elektrovaros amplitudė ε_0 , kampinis dažnis ω . Generatoriaus vidinę varžą manysime esant mažą ir į ją neatsižvelgsime. Skaičiuosime dviem būdais

1. Vektorinių diagramų būdas.

Nuosekliai sujungtoje grandinėje srovės stipris visose jos dalyse esti tas pats. Todėl braižydami vektorinę diagramą srovės stiprį I vaizduojantį vektorių pasirinkime laisvai ir nubrėšime jį horizontaliojoje ašyje (39 pav.). Tada varžos R įtampą $U_R=IR$ vaizduojantis vektorius irgi bus nukreiptas ta pačia kryptimi. Įtampą $U_L=I\omega L$ vaizduojantis vektorius sudarys $+90^\circ$ kampą, nes srovės stipris atsilieka nuo įtampos 90° kampu, t.y. įtampa pralenkia srovės stiprį tokiu pat kampu. Įtampa $U_C=I/\omega C$ atsilieka nuo I 90° kampu. Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę

$$U_R + U_L + U_C = \varepsilon,$$

todėl vektoriškai sudedame U_R , U_L ir U_C vaizduojančius vektorius. Iš pradžių apskaičiuojame:

$$U_L - U_C = I\omega L - \frac{I}{\omega C} = I\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

paskui pagal Pitagoro teoremą

$$\varepsilon = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{I^2 R^2 + I^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

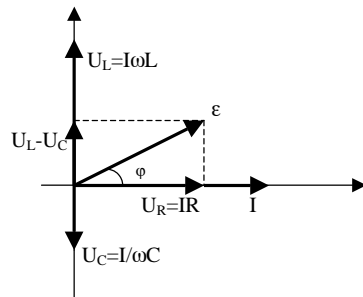
Iš čia nustatome, kad

$$I = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (80)$$

Fazių skirtumą tarp srovės stiprio ir įtampos apskaičiuosime žinodami stačiojo trikampio statinius:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{I\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{IR} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (81)$$

2. Kompleksiniu dydžių būdas. Grandinės impedansas



39 pav.

$$\dot{Z} = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Kompleksinis srovės stipris grandinėje (ε pasirenkame realia):

$$\dot{I} = \frac{\varepsilon}{\dot{Z}} = \frac{\varepsilon}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Norėdami apskaičiuoti $|\dot{I}| = I$, turime pasiekti, kad trupmenos vardiklis būtų realusis skaičius.

Tam tikslui skaitiklį ir vardiklį dauginame iš jungtinio skaičiaus:

$$\dot{I} = \frac{\varepsilon \left[R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right]}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\varepsilon R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - i \cdot \frac{\varepsilon \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Šio kompleksinio skaičiaus modulis

$$I = \sqrt{\left[\frac{\varepsilon R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right]^2 + \left[\frac{\varepsilon \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \right]^2} = \frac{\varepsilon \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Galvome tą patį rezultatą (80), kaip ir skaičiuodami vektorinių diagramų būdu.

Kompleksinio srovės stiprio menamosios dalies santykis su realiąja dalimi lygus fazių skirtumo tarp srovės stiprio ir įtampos tangentui. Šis rezultatas irgi sutampa su (81) formule.

Panašiai kaip nuolatinės srovės grandinėms, galima suformuluoti Kirchhofo taisykles ir kintamosios srovės grandinėms, tik reikia naudoti kompleksinius dydžius.

Pirmoji Kirchhofo taisyklė užrašoma taip:

$$\sum_k \dot{I}_k = 0, \quad (82)$$

o antroji –

$$\sum_k \dot{I}_k \dot{Z}_k = \sum_j \dot{\varepsilon}_j. \quad (83)$$

Kirchhofo taisyklėmis tenka naudotis šakotinių grandinių, taip pat grandinių su abipusiu induktyvumu atvejais.

16. Įtampos rezonansas

Išsamiau panagrinėkime grandinę, pavaizduotą (38 pav.). Iš (81) matome, kad fazių skirtumas tarp srovės stiprio ir įtampos esti lygus nuliui, kai

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \quad (84)$$

Grandinė tekančios srovės stipris tada esti didžiausias ir lygus (žr. (80))

$$I_{rez} = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (85)$$

Iš (84) išreiškę ω , nustatome rezonansinį kampinį dažnį

$$\omega_{rez} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (86)$$

bei dažnį

$$\nu_{rez} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (87)$$

Apskaičiuosime varžos, ritės L ir kondensatoriaus C įtampas esant rezonansui. Pagal Omo dėsnį grandinės daliai

$$U_{Rrez} = I_{rez}R = \frac{\varepsilon}{R}R = \varepsilon, \quad (88)$$

$$U_{Lrez} = I_{rez}\omega_{rez}L = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot L = \frac{\varepsilon}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (89)$$

$$U_{Crez} = I_{rez} \cdot \frac{1}{\omega_{rez}C} = \frac{\varepsilon}{R} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot C} = \frac{\varepsilon}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (90)$$

Matome, kad esant rezonansui ritės ir kondensatoriaus įtampos esti vienodos. Santykis

$$Q = \frac{U_{Lrez}}{\varepsilon} = \frac{U_{Crez}}{\varepsilon} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (91)$$

vadinamas **grandinės (kontūro) kokybe**. Jei grandinės aktyvioji varža maža, kokybė gali būti gana didelė ($Q \gg 1$). Tuo atveju $U_{Lrez} = U_{Crez} \gg \varepsilon$. Taigi kintamosios srovės grandinės ritės bei kondensatoriaus įtampa gali ženkliai viršyti generatoriaus įtampą. Šis reiškinys vadinamas **įtampos rezonansu**.

Tiksliau ritės ir kondensatoriaus įtampos pasiekia maksimumą esant ne rezonansiniam dažniui, bet arti jo. U_L ir U_C priklausomybės nuo kampinio dažnio, nustatomos pagal Omo dėsnį, yra tokios:

$$U_L = I\omega L = \frac{\varepsilon\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (92)$$

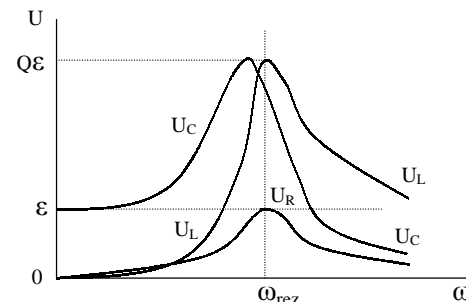
$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{\varepsilon}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (93)$$

Kampiniai dažniai, kuriems esant U_L ir U_C esti didžiausi, apskaičiuojami (92 ir (93) išvestines pagal ω prilyginant nuliui. Atlikę šiuos skaičiavimus gausime:

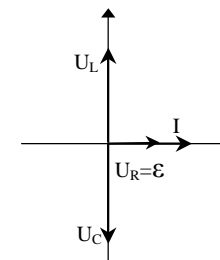
$$\omega_{Lmax} = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{C^2 R^2}{2}}}, \quad (94)$$

$$\omega_{Cmax} = \frac{1}{\sqrt{LC - 2L^2}}. \quad (95)$$

Palyginę (86), (94) ir (95) formules, prieiname išvadą, kad $\omega_{Cmax} < \omega_{rez} < \omega_{Lmax}$. Jei grandinės aktyvioji varža maža ($R \ll \sqrt{\frac{2L}{C}}$), tada $\omega_{Cmax} \approx \omega_{rez} \approx \omega_{Lmax}$.



40 pav.

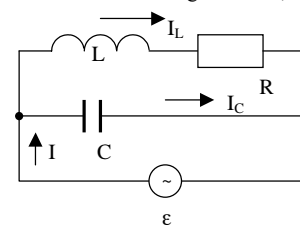


41 pav.

U_R , U_L ir U_C priklausomybių nuo kampinio dažnio grafikai pavaizduoti 40 pav., o vektorinė diagrama esant įtampos rezonansui – 41 pav.

17. Srovės rezonansas

Srovės rezonansas esti grandinėse, kuriose ritė ir kondensatorius sujungti lygiagrečiai.



42 pav.

Panagrinėkime 42 pav. parodytą grandinę. Grandinė tekanti srovės stiprius skaičiuosime kompleksinių dydžių metodu, tarę, kad ε yra reali:

$$i_L = \frac{\varepsilon}{R + i\omega L} = \frac{\varepsilon(R - i\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2}, \quad (96)$$

$$I_L = \frac{\varepsilon \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.$$

$$i_C = \frac{\varepsilon}{-i/\omega C} = \frac{\varepsilon\omega C}{-i} = i\varepsilon\omega C, \quad (97)$$

$$I_C = \omega C\varepsilon. \quad (98)$$

Pagal pirmąją Kirchhofo taisyklę

$$i = i_L + i_C = \frac{\varepsilon(R - i\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} + i\varepsilon\omega C = \frac{\varepsilon[R + i\omega(\omega^2 CL^2 - L + CR^2)]}{R^2 + (\omega L)^2}, \quad (99)$$

$$I = \frac{\varepsilon \sqrt{R^2 + \omega^2(\omega^2 CL^2 - L + CR^2)^2}}{R^2 + (\omega L)^2}. \quad (100)$$

Fazių skirtumas tarp tekančios šaltiniu srovės stiprio I ir jo ev pagal (99)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega(\omega^2 CL^2 - L + CR^2)}{R}. \quad (101)$$

Rezonansas ir šiuo atveju esti, kai $\varphi=0$, t.y., kai

$$\omega^2 CL^2 - L + CR^2 = 0.$$

Iš čia nustatome, kad rezonansinis kampinis dažnis šiuo atveju

$$\omega_{rez} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}. \quad (102)$$

Palyginę (102) su (86), nustatome, kad bendru atveju

$$\omega_{rez}^{(srov\acute{e}r)} < \omega_{rez}^{(i\grave{t}ampos)}.$$

$\omega_{rez}^{(srov\acute{e}r)} \approx \omega_{rez}^{(i\grave{t}ampos)}$ tik kai aktyvioji varža maža ($R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$). Be to, iš (102) aiškėja, kad srovės

rezonansas galimas tik jei $R < \sqrt{\frac{L}{C}}$, nes priešingu atveju (102) pošaknis pasidaro neigiamas.

Pagal (100), (96) ir (98) apskaičiuojame grandinės srovių stiprius esant rezonansui:

$$I_{rez} = \frac{\varepsilon R}{R^2 + (\omega_{rez} L)^2} = \frac{\varepsilon R}{R^2 + L^2 \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right)} = \frac{\varepsilon RC}{L}, \quad (103)$$

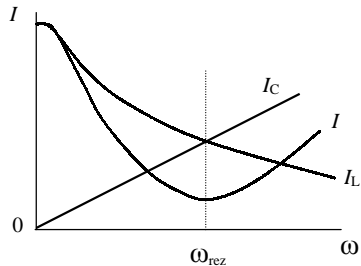
$$I_{Lrez} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + (\omega_{rez} L)^2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + L^2 \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right)}} = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (104)$$

$$I_{Crez} = \omega_{rez} C \varepsilon = C \varepsilon \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{L}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{L}}. \quad (105)$$

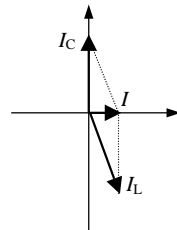
Jei $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$, $I_{Crez} \approx I_{Lrez} = \varepsilon \sqrt{\frac{C}{L}}$, t.y. esant pakankamai mažai aktyviajai varžai

$$\frac{I_{Lrez}}{I_{rez}} = \frac{I_{Crez}}{I_{rez}} = \frac{\varepsilon \sqrt{\frac{C}{L}}}{\frac{\varepsilon RC}{L}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = Q. \quad (106)$$

(106) išreiškia srovės rezonanso grandinės kokybę. Jei kokybė gera (Q - didelė), srovės stipris ritėje ir kondensatoriuje gali ženkliai viršyti srovės stiprį neišsišakojusioje grandinės dalyje, t.y. šaltinyje. Todėl šis reiškinys vadinamas **srovės rezonansu**.



43 pav.



44 pav.

I , I_L ir I_C priklausomybės nuo kampinio dažnio ω , aprašomos (100), (96) ir (98) formulėmis, pavaizduotos 43 pav., o grandinės vektorinė diagrama esant srovės rezonansui – 44 pav.

18. Kintamosios elektros srovės darbas ir galia

Žinome, kad tekant grandine nuolatinei elektros srovei atliekamas darbas

$$A = UI t,$$

o galia

$$P = UI.$$

Šias formules galima panaudoti ir kintamajai srovei. Šiuo atveju tarp įtampos ir srovės stiprio gali būti fazių skirtumas φ . Taigi tarkime, kad

$$U = U_0 \sin \omega t,$$

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

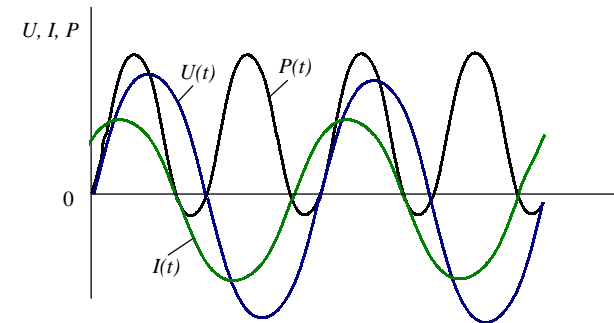
Įtampos ir srovės stiprio sandauga

$$P(t) = UI = U_0 I_0 \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad (107)$$

vadinama **momentine (akimirkine) galia**. Ji yra periodinė laiko t funkcija, jos periodas lygus

įtampos ir srovės periodui $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Be to, esant fazių skirtumui $\varphi \neq 0$, kai kuriais laikotarpiais

esti $P(t) < 0$ (45 pav.).



45 pav.

Tais laikotarpiais grandinė tiekia energiją įtampos šaltiniui (generatoriui). Ta energija buvo sutelkta elektriniame (kondensatorių) bei magnetiniame (ričių) laukuose.

Momentinė galia praktiškai retai ką nors domina. Kalbant apie kintamosios srovės galią paprastai turima galvoje vidutinė galia P . Ji vadinama **aktyviaja galia**, nes ji virsta kitų rūšių energija (šilumine, mechanine, chemine ir t.t.). Aktyvioji galia apskaičiuojama vidurkinant momentinę galią:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{U_0 I_0}{T} \int_0^T \sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi) dt = \frac{U_0 I_0}{T} \left(\cos \varphi \int_0^T \sin^2 \omega t dt + \sin \varphi \int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt \right). \quad (108)$$

(108) formulės integralus apskaičiuojame atskirai.

$$\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \int_0^T \frac{dt}{2} - \int_0^T \frac{\cos 2\omega t}{4\omega} d(2\omega t) =$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{1}{4\omega} \cdot \sin 2\omega t \Big|_0^T = \frac{T}{2} + \frac{\sin 2\pi T}{4\omega} - \frac{\sin 2\pi \cdot 0}{4\omega} = \frac{T}{2}. \quad (109)$$

$$\int_0^T \sin \omega t \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \int_0^T \sin \omega t d(\sin \omega t) = \frac{\sin^2 \omega t}{2\omega} \Big|_0^T = \frac{\sin^2 2\pi}{2\omega} - \frac{\sin^2 0}{2\omega} = 0. \quad (110)$$

(109) ir (110) įrašę į (108), gauname tokią aktyviosios galios išraišką:

$$P = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi. \quad (111)$$

Kintamosios srovės grandinėje esant tik reaktyviosioms varžoms, esti $\varphi = \pm 90^\circ$, $\cos \varphi = 0$, taigi ir $P = 0$. Reaktyviosiose varžose šiluma neišsiskiria. Aktyviojoje varžoje esti $\varphi = 0$ (žr. 25 arba 32 pav.), $\cos \varphi = 1$ ir joje išsiskirianti galia

$$P = \frac{U_0 I_0}{2}. \quad (112)$$

Pritaikę Omos dėsnį $U_0 = I_0 R$, šiluma virstančią aktyviąją galią galima ir kitaip išreikšti:

$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{U_0^2}{2R}. \quad (113)$$

19. Srovės stiprio ir įtampos efektinės vertės

Kaip jau žinome, kintamosios įtampos ar srovės dydis periodiškai kinta įgydamas teigiamas ir neigiamas vertes. Įtampos ar srovės stiprio dydį iki šiol apibūdinavome didžiausia (amplitudine) verte. Tačiau amplitudinės vertės praktikoje retai naudojamos. Dažniausiai naudojamos srovės stiprio ir įtampos efektinės vertės. **Kintamosios srovės stiprio efektinė vertė lygi tokiai nuolatinės srovės stipriui, kuri aktyviojoje varžoje išskiria tokią galią, kai ir kintamoji srovė.** Varža R tekėdama nuolatinė srovė išskirtų $P = I^2 R$ šiluminę galią, o kintamoji – $\frac{1}{2} I_0^2 R$. Taigi rašome tokią lygybę:

$$I_{ef}^2 R = \frac{1}{2} I_0^2 R. \quad (114)$$

Iš (114) išreiškę I_{ef} , gauname tokią sąryšį tarp efektinės ir amplitudinės srovės stiprio verčių:

$$I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (115)$$

Panašiai apskaičiuojama ir efektinė įtampa

$$U_{ef} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (116)$$

Panaudojant įtampos ir srovės stiprio efektnes vertes, aktyvioji kintamosios srovės galia išreiškiama taip:

$$P = U_{ef} I_{ef} \cos \varphi. \quad (117)$$

Pastebėsime, kad sąryšis tarp efektnių ir amplitudinių verčių (115) ir (116) formulėmis nusakomas tik tuo atveju, jei srovės stipris ar įtampa kinta harmoningai, t.y. (65) ar (66) formulėmis nusakomu dėsniu. Bendru atveju **bet kokio periodiškai kintančio dydžio $\xi(t)$ efektinė vertė ξ_{ef} lygi kvadratinei šakniai iš jo kvadrato vidurkio per periodą:**

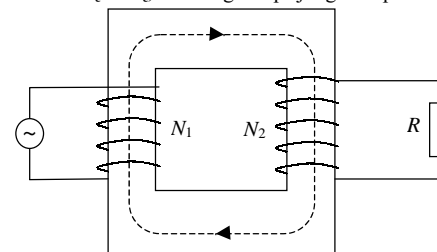
$$\xi_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \xi^2(t) dt}. \quad (118)$$

Pavyzdžiui, (115) išraišką gautume ir pagal (118) formulę, vietoj $\xi(t)$ įrašydami $I(t)$ pagal (65) ar (66) išraišką.

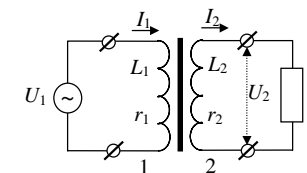
20. Transformatorius

Paprasčiausias kintamosios srovės transformatorius sudarytas iš dviejų ričių, turinčių abipusį induktyvumą. Kad būtų didesnis abipusis induktyvumas, tos ritės dažniausiai esti įtaisytos ant uždaro feromagnetinės šerdies (46 pav.). Transformatoriaus su šerdimi sutartinis žymėjimas pavaizduotas 47 pav.

Viena tų ričių, kurios galai prijungiami prie kintamosios įtampos šaltinio, vadinama pirmine



46 pav.



47 pav.

rite (apvija), kita – antrine rite (apvija).

Pažymėkime prie pirminės apvijos prijungto šaltinio įtampą U_1 , srovės stiprį apvijoje I_1 , antrinėje I_2 , pirminės apvijos induktyvumą L_1 , jos aktyviąją varžą r_1 , antrinės apvijos – atitinkamai L_2 ir r_2 , apvijų abipusį induktyvumą L_{12} . Tarkime, kad prie antrinės apvijos prijungta tik aktyvioji apkrovos varža R . Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę galime užrašyti tokią transformatoriaus darbą aprašančią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dot{I}_1(r_1 + i\omega L_1) + \dot{I}_2 i\omega L_{12} = U_1, \\ \dot{I}_2(r_2 + R + i\omega L_2) + \dot{I}_1 i\omega L_{12} = 0. \end{cases} \quad (119)$$

Priėmus prielaidą, kad transformatoriuje magnetinio srauto sklaidos nėra, t.y. tas pats magnetinis srautas Φ kerta abi apvijas (tą didžia dalimi užtikrina feromagnetinė šerdis, kurios magnetinė skvarba μ didelė), galima rasti sąryšį tarp abipusio induktyvumo L_{12} ir induktyvumų L_1 ir L_2 . Pirminės apvijos vijų skaičių pažymėkime N_1 , antrinės – N_2 . Pagal (44) galime užrašyti:

$$L_1 = N_1 \frac{\Phi}{I_1}, \quad L_2 = N_2 \frac{\Phi}{I_2}. \quad (120)$$

Remdamiesi (47), taip pat užrašome:

$$L_{12} = N_1 \frac{\Phi}{I_2}, \quad L_{21} = N_2 \frac{\Phi}{I_1}. \quad (121)$$

Kadangi pagal abipusiškumo teoremą $L_{12}=L_{21}$, daugindami panariui vieną iš kitos (121) lygybes, gauname:

$$L_{12}^2 = N_1 N_2 \frac{\Phi^2}{I_1 I_2}. \quad (122)$$

Analogiškai daugindami (120) lygybes, gauname:

$$L_1 L_2 = N_1 N_2 \frac{\Phi^2}{I_1 I_2}. \quad (123)$$

Iš (122) ir (123) matome, kad

$$L_{12}^2 = L_1 L_2,$$

taigi

$$L_{12} = \pm \sqrt{L_1 L_2}. \quad (124)$$

(124) „+“ ženklą reikia naudoti, kai ričių magnetiniai srautai vienas kitą stiprina, o „-“, – kai silpnina. Transformatoriuje tie srautai vienas kitą silpnina, taigi, atsižvelgdami į (124), (119) lygčių sistemą perrašome taip:

$$\begin{cases} \dot{I}_1(r_1 + i\omega L_1) - \dot{I}_2 i\omega \sqrt{L_1 L_2} = U_1, \\ \dot{I}_2(r_2 + R + i\omega L_2) - \dot{I}_1 i\omega \sqrt{L_1 L_2} = 0. \end{cases} \quad (125)$$

Kai antrinės apvijos grandinė nesujungta, transformatorius dirba **tuščiaja eiga**, t.y. $\dot{I}_2 = 0$. Tuo atveju magnetinį srautą kuria tik pirmine apvija tekanti srovė, kurios stipris

$$\dot{I}_1 = \frac{U_1}{r_1 + i\omega L_1}, \quad I_1 = \frac{U_1}{\sqrt{r_1^2 + (\omega L_1)^2}}.$$

Darant transformatorius siekiama, kad būtų $r_1 \ll \omega L_1$. Tai pasiekti galima parenkant pakankamai didelį pirminės ritės vijų skaičių, nes $r_1 \sim N_1$, o $L_1 \sim N_1^2$ (žr. (56)). Tada

$$U_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt}, \quad U_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt}. \quad (126)$$

Iš (126) gauname, kad antrinės ir pirminės ričių įtampų santykis

$$k = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}. \quad (127)$$

Dydis k vadinamas **transformacijos koeficientu**. Aukštiniimo transformatoriaus $k > 1$, o žeminimo $k < 1$.

(Pastaba. Literatūroje kartais transformacijos koeficientu vadinamas atvirkštinis dydis, t.y.

$$k = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}.)$$

Reikia atkreipti dėmesį, kad čia pateiktos lygtys transformatoriui su feromagnetine šerdimi tinka tik apytiksliai, nes feromagnetikų magnetinė skvarba μ , taigi ir ričių induktyvumai, nėra pastovūs, o priklauso nuo srovės stiprio. Be to, reikėtų atsižvelgti į magnetinio srauto šerdyje sklaidos, feromagnetiko permagnetinimo, sukurtųjų srovių sąlygotus ir kitokius nuostolius. Tuo atveju transformatoriaus darbo analizė esti gerokai sudėtingesnė.

21. Virpesių kontūras. Laisvieji elektromagnetiniai virpesiai

Išnagrinėsime elektromagnetinius procesus, vykstančius 48 pav. pavaizduotoje grandinėje.

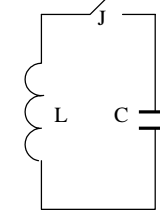
Tarkime, kad kondensatorius C įelektrintas krūviu q_0 esant išjungtam jungikliui J . Įjungus jungiklį, kondensatorius pradės išsikrauti, grandinė ims tekėti srovė. Pagal antrąją Kirchhofo taisyklę

$$U_L + U_C = 0, \quad (128)$$

Nes grandinėje nėra pašalinių šaltinių. Žinome, kad

$$U_L = L \frac{dI}{dt}, \quad (129)$$

$$U_C = \frac{q}{C}. \quad (130)$$



48 pav.

Taigi

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (131)$$

Prisiminę, kad $I = \frac{dq}{dt}$ ir įrašę tai į (131), gauname antrosios eilės diferencialinę lygtį, aprašančią kondensatoriaus krūvio q kitimą:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0. \quad (132)$$

Šios lygties sprendinys yra

$$q = q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} = q_0 \cos \omega_0 t \quad (133)$$

(tai lengva patikrinti (133) įrašius į (132)).

Matome, kad kondensatoriaus krūvis kinta harmoningai. Čia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (134)$$

kontūro savasis kampinis dažnis. Kontūro savųjų elektromagnetinių virpesių periodas

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}. \quad (135)$$

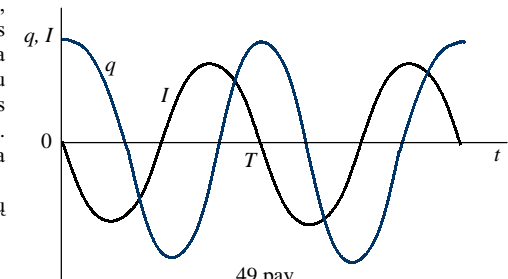
(Tomsono formulė).

Srovės stiprį kontūre galime nustatyti diferencijuodami (133):

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = q_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2). \quad (136)$$

Sugretinę (133) ir (136) išraiškas, nustatome, kad fazių skirtumas tarp kondensatoriaus krūvio (arba jo įtampos, kuri susijusi su krūviu (130) lygybe) ir kontūro tekančios srovės stiprio lygus $\pi/2$ (arba 90°). Šis fazių skirtumo kampas atitinka $1/4$ periodo.

Krūvio ir srovės stiprio virpesių grafikas pateiktas 49 pav.



49 pav.

Šie virpesiai yra neslopstantieji, t.y. jų amplitudė laikui bėgant nekinta. Kai $t=0$, kondensatoriaus elektrinio lauko energija

$$W_c = \frac{q_0^2}{2C}, \quad (137)$$

o ritės energija $W_L = 0$ es $I=0$. Kai $t=1/4T$, $\cos \omega_0 t = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, $W_c = 0$, o ritės energija

$$W_L = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{Lq_0^2\omega_0^2}{2} = \frac{Lq_0^2}{2LC} = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (138)$$

Iš (137) ir (138) matome, kad per laikotarpį $t=1/4T$ visa kondensatoriaus elektrinio lauko energija pavirsta ritės magnetinio lauko energija ir atvirkščiai.

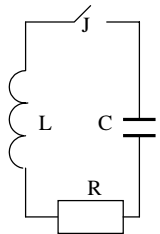
Dabar panagrinėkime elektromagnetinius virpesius kontūre, be kondensatoriaus ir ritės turinčiame varžą R (50 pav.) (tai gali būti vien tik ritės laidų aktyvioji varža).

Tokiame kontūre vietoj (128) bus

$$U_L + U_R + U_C = 0,$$

arba

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0. \quad (139)$$



50 pav.

Irašę į (139) $I = \frac{dq}{dt}$, gauname tokią antrosios eilės diferencialinę lygtį:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (140)$$

(140) lygties sprendinys yra toks:

$$q = q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \cdot t\right) = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega t. \quad (141)$$

Čia

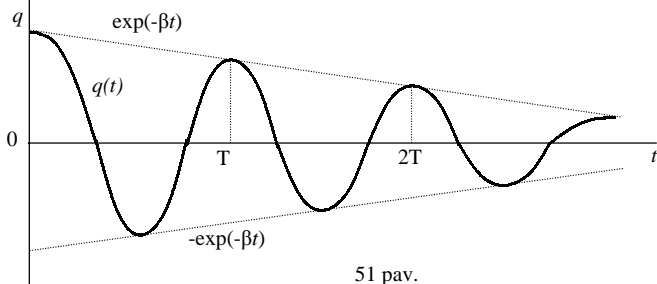
$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (142)$$

vadinamas **slopinimo koeficientu**,

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (143)$$

kontūro kampinių laisvųjų virpesių dažniu. Šis dažnis yra mažesnis už savąjį dažnį ω_0

(žr. (134)).



51 pav.

(141) funkcijos grafikas nubraižytas 51 pav. Kaip aiškėja iš (141) ir 51 pav., šiuo atveju kontūre vyksta slopinamieji elektromagnetiniai virpesiai, nes aktyviojoje varžoje tekant srovei elektromagnetinė energija virsta šiluma.

Jei (139) išdiferencijuotume laiko t atžvilgiu, gautume

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (144)$$

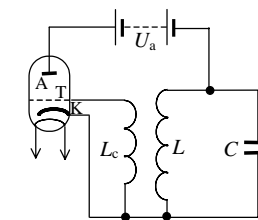
(144) lygties pavidalas toks pat, kaip ir (140), taigi ir jos sprendinys analogiškas (141) sprendiniui:

$$I = I_0 e^{-\beta t} \cos \omega t. \quad (145)$$

Srovės stiprio, kaip ir kondensatoriaus krūvio ar įtampos, amplitudė laikui bėgant eksponentiškai mažėja.

22. Grįžtamojo ryšio energija

Kiekvienas virpesių kontūras, jei jo ritė ir jungiamieji laidai nėra superlaidūs, turi tam tikrą aktyviąją varžą. Todėl laisvieji virpesiai esti slopinamieji. Norint gauti neslopinamuosius virpesius, būtina kokiū nors būdu papildyti kontūro elektromagnetinę energiją tokiu kiekiu, kiek jos netenkama dėl Džaulio šilumos ir elektromagnetinės spinduliuotės. Tai galima atlikti panaudojant elektroninę lempą diodą.



52 pav.

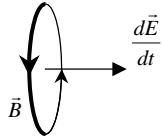
Panagrinėsime vieną paprasčiausių lempinio generatoriaus schemų, parodytą 52 pav. Į jos anodinę grandinę, maitinamą iš nuolatinės įtampos U_a šaltinio, įjungtas virpesių kontūras, sudarytas iš kondensatoriaus C ir ritės L . Tas kontūras ryšio rite L_r induktyviai susietas su tinklelio grandine. Todėl kintant anodo įtampai kinta ir tinklelio įtampa, t.y. yra grįžtamasis ryšys. Grįžtamojo ryšio ritė L_r turi būti įjungta taip, kad didėjant katodo srovės stipriui anodo grandinėje tinklelio potencialas katodo atžvilgiu būtų teigiamas, o mažėjant – neigiamas. Tada srovės stipris anodo grandinėje padidėja daugiau negu nesant ryšio ritės. Tokiu būdu kontūras periodiškai gauna iš šaltinio U_a papildomą energijos kiekį. Toks ryšys vadinamas **teigiamuoju grįžtamoju ryšiu**. Tokioje grandinėje virpesiai sužadunami savaime. Tarkime, kad pradiniu momentu kondensatorius turi tam tikrą nedidelį krūvį, atsiradusį, pavyzdžiui, dėl šiluminės fluktuacijos. Kondensatoriui išsikraunant per ritę, kontūre atsiranda mažos amplitudės laisvieji elektromagnetiniai virpesiai, kurie, esant teigiamajam grįžtamajam ryšiui, stiprėja. Triodo anodo srovės priklausomybė nuo tinklelio įtampos netiesinė, todėl, kai tinklelio įtampos virpesių amplitudė pasiekia tam tikrą vertę, anodo srovės amplitudė nustoja didėti, t.y. nusistovi neslopinamieji pastovios amplitudės elektromagnetiniai virpesiai.

23. Elektromagnetinės bangos

Žinome, kad kintamasis magnetinis laukas kuria kintamąjį elektrinį lauką (žr. Faradėjaus elektromagnetinės indukcijos dėsnį). Maksvelas 1864 m. iškėlė hipotezę, kad turi egzistuoti ir atvirkštinis reiškinys: **kintamasis elektrinis laukas kuria kintamąjį magnetinį lauką**. Taigi kintamieji elektriniai ir magnetiniai laukai yra tarpusavyje susiję, nes vienas laukas gali virsti kitu ir atvirkščiai. Apibūdinę šiuos laukų virsmus diferencialinėmis lygtimis, Maksvelas priėjo išvadą, kad turi egzistuoti ypatingos bangos, kurios gali sklirti ne tik medžiaga, bet ir vakuumu.

Šias bangas Maksvelas pavadino elektromagnetinėmis bangomis. **Elektromagnetinė banga – tai kintamojo elektrinio ir magnetinio laukų sklaidimas aplinka.**

Ekspirimentškai elektromagnetinės bangos praėjus daugiau kaip 20 metų po teorinio jų buvimo numatymo 1887 m. pirmą kartą aptiko Hercas (H. Hertz).



53 pav.

Jau žinome, kad kintamojo magnetinio lauko sukurtas elektrinis laukas susijęs su $\frac{d\vec{B}}{dt}$ vektoriumi pagal kairinio sraigto taisyklę (žr. 17 pav.). O **kintamojo elektrinio lauko sukurtas magnetinis laukas susijęs su $\frac{d\vec{E}}{dt}$ vektoriumi pagal dešinio sraigto taisyklę** (53 pav.).

Atkreipsime dėmesį, kad pagal tą pačią taisyklę su elektros srovės kryptimi susijęs ir srovės kuriamas magnetinis laukas.

Bendru atveju magnetinį lauką gali kurti elektros srovė ir kintamasis elektrinis laukas. Taigi suminės srovės dėsnį (14)

kintamųjų laukų atveju tenka papildyti. Jį tada reikia užrašyti taip:

$$\oint_{(L)} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu\mu_0 \left(\sum_k I_k + \varepsilon\varepsilon_0 S \frac{dE}{dt} \right). \quad (146)$$

(146) lygybė užrašyta aplinkai, užpildytai medžiaga, kurios magnetinė skvarba μ , dielektrinė skvarba ε . Čia S – kontūro L apjuosiamas plotas, kurį kerta vektorius $\frac{d\vec{E}}{dt}$. (146) lygybės dešinės

pusės skliaustuose esantis antrasis narys turi srovės stiprio dimensiją ir vadinamas **slinkties srove**. Nelaidžiose elektrai aplinkose, kuriose nėra laisvųjų krūvininkų, srovė tekėti negali, tačiau magnetinį lauką gali kurti slinkties srovė. Būdinga tai, kad kartą prasidėjęs elektrinio ir magnetinio laukų tarpusavio kitimo procesas tęsiasi, apimdamas vis naujas erdvės sritis, t.y. erdve sklinda elektromagnetinė banga.

Iš Maksvelo elektromagnetizmo teorijos lygčių plaukia, kad elektromagnetinių bangų sklaidimo greitis susijęs su aplinkos dielektrine ir magnetine skvarbomis taip:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}. \quad (147)$$

Vakuume $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, ir

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (148)$$

Neferomagnetinėse aplinkose $\varepsilon > 1$, $\mu \approx 1$ (feromagnetikai dažniausiai esti elektrai laidūs ir jais neslopstančios elektromagnetinės bangos skliti negali), taigi

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (149)$$

Elektromagnetinės bangos sklaidimo vakuume greičio santykis su jos greičiu medžiagoje vadinamas medžiagos **absoliutiniu lūžio rodikliu**:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon}. \quad (150)$$

Esant dideliems dažniams medžiagų dielektrinė skvarba ε priklauso nuo dažnio. Tai lemia lūžio rodiklio n ir elektromagnetinės bangos sklaidimo greičio v priklausomybę nuo dažnio.

Elektromagnetinės bangos sklaidimo greičio priklausomybė nuo dažnio vadinama dispersija. Dispersiją sąlygoja ε priklausomybė nuo dažnio.

Kaip ir bet kokios bangos, elektromagnetinės bangos sklaidimo greitis v susijęs su bangos ilgiu λ , periodu T , dažniu ν , bei kampiniu dažniu ω taip:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = \frac{\lambda\omega}{2\pi}. \quad (151)$$

Jei sklisdama elektromagnetinė banga pereina iš vienos aplinkos į kitą, jos greitis pakinta sutinkamai su (149). Pakinta ir bangos ilgis, o jos dažnis lieka nepakitęs ir lygus bangą sukėlusio virpiklio virpesių dažniui.

Elektromagnetinės bangos elektrinio lauko stiprio vektorius \vec{E} yra statmenas magnetinio srauto tankio vektoriui \vec{B} . Savo ruožtu šie du vektoriai yra statmeni bangos sklaidimo greičio vektoriui \vec{v} :

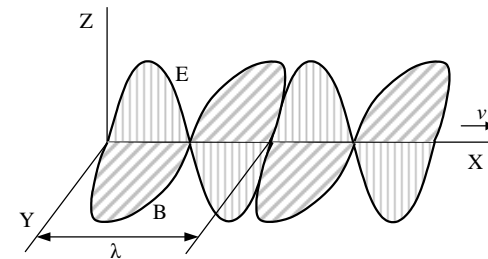
$$\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{v}. \quad (152)$$

Tarkime, kad elektromagnetinės bangos vektoriai \vec{E} ir \vec{B} kinta harmoningai:

$$E = E_0 \sin \omega t,$$

$$B = B_0 \sin \omega t.$$

Tada sąryšį tarp šių vektorių virpesių plokštumų ir bangos sklaidimo greičio galima pavaizduoti grafiškai erdvinėje stačiakampėje koordinatinių sistemoje, kaip parodyta 54 pav.



54 pav.

Sklisdama elektromagnetinė banga neša su savimi energiją. Ji sutelkta bangos elektriniame ir magnetiniame laukuose. Kadangi bangoje elektrinis laukas virsta magnetiniu ir atvirkščiai, šių laukų energijos turi būti vienodos. Galima sulygtinti energijas, esančias erdvėje, kur sklinda banga, tūrio vienetu, t.y. elektrinės ir magnetinės energijos tūriniu tankius u_e ir u_m :

$$u_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad (\text{žr. „Elektrostatika“, (69)}),$$

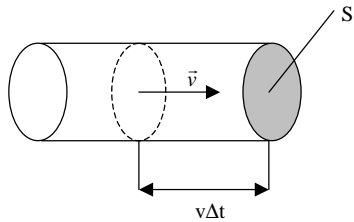
$$u_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}.$$

Taigi

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (153)$$

Iš (153), atsižvelgus į (147), aiškėja, kad elektromagnetinės bangos \vec{E} ir \vec{B} vektorių moduliai susiję taip:

$$E = \frac{B}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}} = Bv. \quad (154)$$



55 pav.

Apskaičiuosime, kiek energijos perneša elektromagnetinė banga per laiko vienetą pro vienetinį plotą, statmeną bangos sklidimo kryptčiai, t.y. energijos srauto tankį.

Bangos kelyje išivaizduokime cilindą, kurio ašis nukreipta bangos greičio vektoriaus \vec{v} kryptimi, o skerspjūvio plotas S (55 pav.). Per laikotarpį Δt pro plotą S praeis energija, esanti šio cilindro $v\Delta t$ ilgyje:

$$W = (u_e + u_m)V = (u_e + u_m)Sv\Delta t.$$

Kadangi $u_e = u_m$, šią formulę atsižvelgus į (58) ir (154) galima perrašyti taip:

$$W = 2u_m v S \Delta t = \frac{B^2 v S \Delta t}{\mu\mu_0} = \frac{EBS\Delta t}{\mu\mu_0}.$$

Energijos srauto tankis

$$\Pi = \frac{W}{S\Delta t} = \frac{EB}{\mu\mu_0}. \quad (155)$$

Patogumo dėlei įvedamas elektromagnetinės energijos srauto tankio vektorius $\vec{\Pi}$:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu\mu_0} [\vec{E}, \vec{B}]. \quad (156)$$

Vektorius $\vec{\Pi}$ vadinamas Pointingo (J. H. Poynting) vektoriumi. Jis nukreiptas energijos sklidimo kryptimi, kuri sutampa su \vec{v} arba $[\vec{E}, \vec{B}]$ kryptimi. Per bet koki paviršių S elektromagnetinės bangos pernešamą galią tada galima išreikšti taip:

$$P = \int_{(S)} (\vec{\Pi}, d\vec{S}). \quad (157)$$

Pavyzdžiui, norint apskaičiuoti kokio nors radio bangų siųstuvo spinduliuojamą galią galima mintyse apgaubti jį bet koku uždaru paviršiumi ir apskaičiuoti (157) integralą tuo paviršiumi (žinoma, jei nėra elektromagnetinių bangų sugerties jų kelyje nuo siųstuvo iki to paviršiaus).

Kai E ir B kinta harmoningai, tada

$$\Pi = \frac{E_0 B_0}{\mu\mu_0} \sin^2 \omega t. \quad (158)$$

Jei paviršius sugeria į jį krintančias elektromagnetines bangas, jų energija virsta šiluma. (158) tuo atveju išreiškia momentinę vienetiniam plotui tenkančią šiluminę galią. Kaip ir kintamosios srovės galios atveju, paprastai domina ne momentinė, o vidutinė šiluminė galia. Norint ją apskaičiuoti, reikia (158) formulėje naudoti efektines E ir B vertes E_{ef} ir B_{ef} , o jei naudojamos amplitudinės vertės E_0 ir B_0 , vardiklyje nepamiršti parašyti 2:

$$\Pi = \frac{E_{ef} B_{ef}}{\mu\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{2\mu\mu_0}. \quad (159)$$