

V. Kaminskas, J. A. Martišius, A. Udris

KIETOJO KŪNO DINAMIKA. HIDRODINAMIKA.
SVYRAVIMAI. BANGOS

Paskaitų konspektas
ypatingai gabių mokinių
papildomojo ugdymo mokyklos
“Fizikos Olimpas” moksleiviams

Mokykla FIZIKOS OLIMPAS
Vilnius
2003

UDK 539.2(075.3)
Ki59

Dėkojame ypatingai gabių mokinių papildomojo
ugdymo mokyklos "Fizikos Olimpas" steigėjų
tarybos pirmininkui Petruui Jonušui už iniciatyvą
ir rūpestį leidžiant šį leidinį

Rinko ir maketavo mokyklos "Fizikos Olimpas" absolventas,
VU FF III k. studentas Rytis Juršėnas

ISBN 9986-778-06-9

www.olimpas.lt

Įvadas

Šią mechanikos dalį sudaro keturi savarankiški skyriai: I. Kietojo kūno dinamika, II. Hidrodinamika, III. Svyravimai, IV. Bangos. Kietojo kūno dinamikos vidurinių mokyklų vadovėliuose nėra. "Fizikos Olimpo" programoje apie kietojo kūno judėjimą jau kalbėjome Kinematikoje ir Statikoje. Kietojo kūno dinamikai dar bus reikalingos Tvermės dėsnų skyriaus sistemos dinamikos pagrindinės teoremos.

Hidrodinamikos skyriaus vid. mokyklų vadovėliuose taip pat beveik nėra, o Svyravimų ir Bangų skyriuose nauji yra daugelis bangų klausimų.

Bendrai šis konspektas užbaigia visą mechanikos kursą gilesniu pagrindu, nei vid. mokyklų vadovėliuose ir sudaro minimalią bazę studijuoti kitas fizikos šakas pagal tarptautinių fizikos olimpiadų programą.

www.olimpas.lt

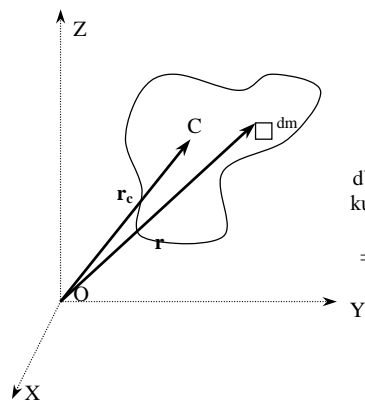
I. Kietojo kūno dinamika

1.1 Įvairių kietųjų kūnų masių centras

Apie masių centrą jau kalbėjome nagrinėdami statikos klausimus, o taip pat "Tvermės dėsnų" skyriuje 1.2 : sistemos masių centro C spindulys vektorius

$$\mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i / M. \quad (1)$$

Prisiminkime, kad čia n yra taškų skaičius sistemoje, m_i ir \mathbf{r}_i – bet kurio taško masė ir spindulys - vektorius, M – visa sistemos masė. Apibrėžimas (1) tinka tiek nekietai, tiek ir kietai sistemai (kūnui).



1 pav.

Nekietos sistemos masių centras C, laikui bėgant, keis padėtį sistemoje, o kietam kūnui visą laiką bus kūne tame pačiame taške. Kai kietasis kūnas yra ištisinis, vietoje masės m_i reikės imti be galo mažą masę (diferencialą) $dm = \rho dV$, kur ρ - kūno tankis, dV – be galo mažas tūris (tūrio diferencialas), kuriame telpa nykstamai maža masė dm . Vietoj sumos $\sum m_i \mathbf{r}_i$ reikės rašyti integralą $\int \mathbf{r} dm = \int \mathbf{r} \rho dV$, kur \mathbf{r} (1 pav.) bus tolygiai kintamas dydis.

$$\mathbf{r}_c = \int \rho \mathbf{r} dV / M. \quad (2)$$

Vienalyčiam ištisiam kūnui (2) lygybė supaprastės:

$$\mathbf{r}_c = \rho \int \mathbf{r} dV / \rho V$$

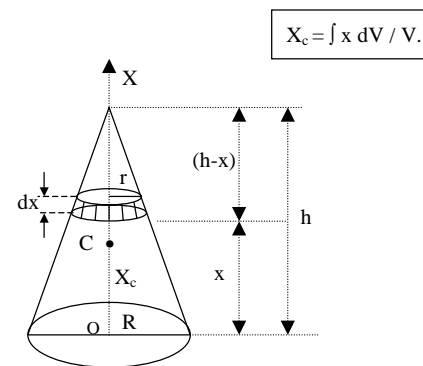
arba

$$\mathbf{r}_c = \int \mathbf{r} dV / V. \quad (3)$$

Projektuodami (3) lygybę į koordinačių ašis, gausime:

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \int x dV / V, \\ Y_c &= \int y dV / V, \\ Z_c &= \int z dV / V. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Simetriniams ištisiam vienalyčiam kietiems kūnams (taisyklingai piramidei, kūgiui, pusrutuliui,...) žinoma tiesė, kurioje guli masių centras. Tegul ta tiesė yra x – ū ašis. Tuomet masių centrui rasti pakaks (4) vienos lygties(2 pav.):

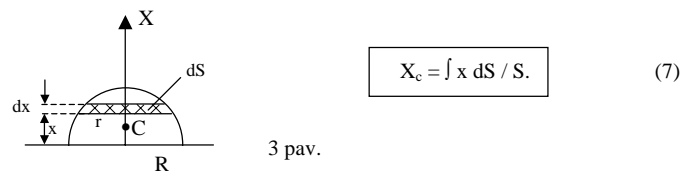


2 pav.

Plokščioms vienalytėms figūroms bendru atveju reikės (4) dviejų lygčių, tiktai vietoj tūrio V rašysime figūros plotą S:

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \int x dS / S, \\ Y_c &= \int y dS / S. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Simetriškoms plokščioms vienalytėms figūroms (lygiašoniam trikampiui, pusskrituliui,...) pakanka (6) vienos koordinatės (3 pav.):



3 pav.

Kreivių (vienalyčių) ir plokščių figūrų masių centrui rasti galima naudotis Guldeno teoremais. Jų turinys (neįrodinėsimė) toks:

I Guldeno teorema: sukimosi kūno paviršius, gautas sukant bet kokią plokščią kreivę apie ašį, esančią tos kreivės plokštumoje, bet jos nekertančią, lygus tos kreivės ilgiui, padaugintam iš jos masių centro apibrėžto apskritimo ilgio ($S = l \cdot 2 \pi x_c$).

Ja remiantis galima rasti kreivių masių centrą.

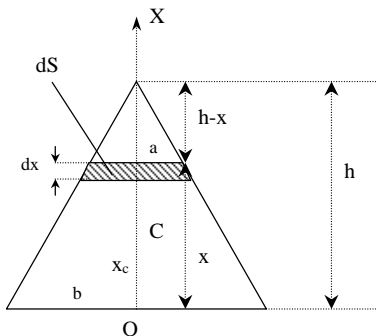
II Guldeno teorema: kūno tūris, gautas sukant bet kokią plokščią figūrą apie ašį, gulinčią tos figūros plokštumoje, bet jos nekertančią, lygus tos figūros ploto ir jos masių centro apibrėžto apskritimo ilgio sandaugai ($V = S \cdot 2 \pi x_c$).

Ja remiantis galima rasti plokščių figūrų masių centrą.

Neturi atvejai, kai kūne yra išpjovų (skylių, ertmių). Tokių figūrų ar kūnų masių centrui rasti tinka tos pačios formulės, pvz.(1), tiksliai išpjovas reikia laikyti atskirais kūnais, o jų mases, plotus, ar tūrius – neigiamais (mat tas mases, plotus ar tūrius reikia atimti).

Pratybos

1. Rasti vienalyčio lygiašonio trikampio (plokščios figūros) masių centrą. Matmenys parodyti 4 pav.



4 pav.

Sprendimas

Taikome (7) formulę.
 $dS = 2 a dx$, $S = b h$.

$$X_c = \left(\frac{1}{bh} \right) \int_0^h x \cdot 2 a dx; \quad a h = b (h - x); \quad a = a(x);$$

$$\begin{aligned} X_c &= (2/h^2) \int_0^h x (h - x) dx = (2/h^2) \int_0^h (xh - x^2) dx = (2/h^2) \left[(h/2)x^2 - x^3/3 \right] \Big|_0^h = \\ &= (2/h^2) (h^3/2 - h^3/3); \\ X_c &= h/3. \end{aligned} \tag{8}$$

Patikrinkite gautą atsakymą, remdamiesi Guldeno teorema.

2. Raskite taisyklingo vienalyčio kūgio masių centrą. Matmenys parodyti 2 pav.

Sprendimas

Taikome (5) formulę. $dV = \pi r^2 dx$, $V = \pi R^2 h/3$.

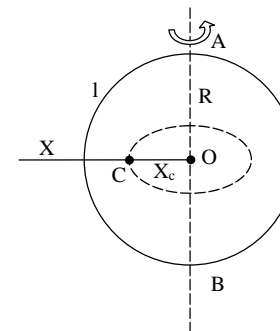
$$X_c = (3/\pi R^2 h) \int_0^h x \pi r^2 dx; \quad r h = R (h - x);$$

$$\begin{aligned} X_c &= (3/h^3) \int_0^h x (h - x)^2 dx = (3/h^3) \int_0^h (h^2 x - 2 h x^2 + x^3) dx = (3/h^3) (h^2 x^2/2 - \\ &- 2 h x^3/3 + x^4/4) \Big|_0^h = (3/h^3) (h^4/2 - 2h^4/3 + h^4/4); \end{aligned}$$

$$X_c = h/4. \tag{9}$$

Raskite taisyklingos vienalytės piramidės masių centrą.

3. Rasti vienalyčio pusapskritimo masių centrą. Matmenys parodyti (5) pav. Pusapskritimtis (lankas), kurio ilgis $l = \pi R$, paryškintas.



5 pav.

Sprendimas

Pagal I Guldeno teoremą sukame pusapskritimą apie ašį AB. Pusapskritimis nubrėžia rutulio paviršių, o pusapskritimio masių centras C – apskritimą, kurio spindulys X_c . Taigi, $S = 4 \pi R^2$, todėl

$$4 \pi R^2 = \pi R 2 \pi X_c;$$

$$X_c = 2 R / \pi \approx 0,64 R. \quad (10)$$

4. Rasti pusskritulio masių centrą. Matmenys parodyti 3 pav.

Sprendimas

Taikome (7) formulę. $dS = 2 r dx$, $S = \pi R^2 / 2$;

$$X_c = (2/\pi R^2) \int_0^R x 2 r dx; \quad r = \sqrt{R^2 - x^2}. \quad \text{Todėl}$$

$$X_c = (4/\pi R^2) \int_0^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx;$$

Pasinaudojame integralinio skaičiavimo formulę:

$$\int x \sqrt{R^2 - x^2} dx = - (1/3) (R^2 - x^2)^{3/2} + \text{const}. \quad (11)$$

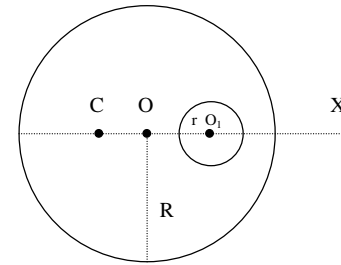
Tada

$$X_c = (-4/3\pi R^2) (R^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^R = (-4/3\pi R^2) (0 - R^3) = 4R^3/3\pi R^2;$$

$$X_c = 4 R / 3 \pi \approx 0,42 R. \quad (12)$$

Patikrinkite gautąjį atsakymą, remdamiesi Guldeno teorema (tada nereiks integruoti).

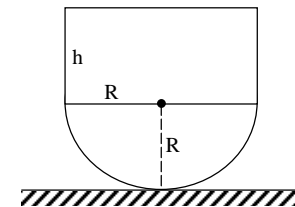
5. Duotas vienalytis skritulys, kurio spindulys R. Jame yra spindulio r apvali skylė. Atstumas tarp skritulio ir skylės centrų $OO_1 = a$. Raskite tos plokščios figūros masių centro C koordinatę X_c (6 pav.).



(Ats.: $X_c = -a r^2 / (R^2 - r^2)$).

6 pav.

6. Žaisliukas sulipdytas iš tos pačios vienalytės medžiagos pusrutulio ir ritinio. Koks turi būti ritinio aukštis h (7 pav.), kad žaisliukas nevirštų? Pusrutulio spindulys R.

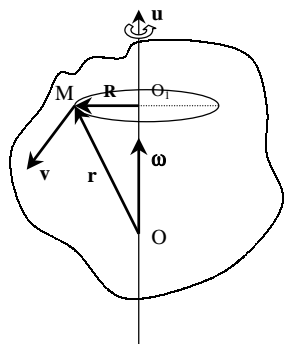


7 pav.

1.2 Kietojo kūno judėjimo rūšys

Kietojo kūno judėjimo rūšys aprašytos Kinematikos skyriuje. Tai slenkamasis kietojo kūno judėjimas, sukimasis apie nejudamą ašį, sukimasis apie nejudamą tašką, bet koks kietojo kūno judėjimas ir plokštumai lygiagretus judėjimas (2.6 – 2.9). Kai kūnas sukasi apie nejudamą ašį arba nejudamą tašką, bet kurio jo taško greitis (žr. 8 pav.)

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{R}] = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \quad (1)$$



Čia \mathbf{u} vaizduoja sukimosi ašį, $\boldsymbol{\omega}$ - kūno kampinis greitis, o radius – vektorius \mathbf{r} išvestas iš bet kurio sukimosi ašies taško O, kai ašis nejuda, arba iš nejudamo taško O, kai kūnas sukasi apie tašką. Taško M pagreitis (žr. Kinematikos 2.6):

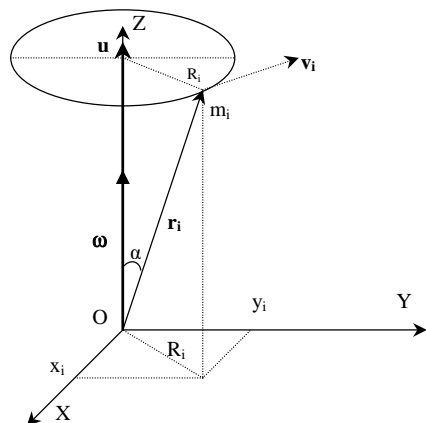
$$\mathbf{a} = [\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}], \quad (2)$$

8 pav.

čia $\boldsymbol{\epsilon}$ - kampinis kūno pagreitis. Kai kūnas sukasi apie nejudamą ašį, pirmasis narys $[\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}]$ yra tangentinis pagreitis \mathbf{a}_τ , antrasis narys $[\boldsymbol{\omega} \mathbf{v}] = \mathbf{a}_n$ – normalinis pagreitis. Kai kūnas sukasi apie nejudantį tašką, \mathbf{a}_τ reiškia sukamąjį pagreitį \mathbf{a}_{suk} , \mathbf{a}_n – ašinį pagreitį \mathbf{a}_{as} , o pati (2) lygybė tada išreiškia Rivalso teoremą (žr. Kinematikos 2.8).

1.3 Kietojo kūno judesio kiekio momentas. Inercijos momentas

Tegul kietasis kūnas sukasi apie nejudamą z – tų ašį, kaip parodyta 9 pav.



9 pav.

Tuomet vieno taško m_i (m_i reiškia ir to taško masę) greitis (1.2):

$$\mathbf{v}_i = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_i], \quad (1)$$

o judesio kiekio momentas (žr. Tvermės dėsnų 1.3) taško O atžvilgiu

$$\mathbf{l}_i = [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i]. \quad (2)$$

Viso kietojo kūno judesio kiekio momentas (taško O atžvilgiu)

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i m_i \mathbf{v}_i]. \quad (3)$$

Parašysime vektoriaus \mathbf{L} projekcijas į koordinatų ašis. Tam prisiminkime Kinematikos 1.5 vektorinės sandaugos projekcijų išraiškas:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{A} \mathbf{B}]_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ [\mathbf{A} \mathbf{B}]_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ [\mathbf{A} \mathbf{B}]_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Remdamiesi (4) ir (3) lygybėmis gauname:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}), \\ L_y &= \sum_{i=1}^n m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}), \\ L_z &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Analogiškai iš (1) lygybės greičio projekcijos:

$$\left. \begin{aligned} v_{ix} &= \omega_y z_i - \omega_z y_i, \\ v_{iy} &= \omega_z x_i - \omega_x z_i, \\ v_{iz} &= \omega_x y_i - \omega_y x_i. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Čia mes pasinaudojome Kinematikos 1.3 paragrafo lygybėmis:

$$\begin{aligned} r_x &= x, \\ r_y &= y, \\ r_z &= z. \end{aligned}$$

Kadangi mūsų atveju (9 pav.) kampinis kietojo kūno greitis ω nukreiptas z – ū ašies kryptimi, tai:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= 0, \\ \omega_y &= 0, \\ \omega_z &= \omega. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(7) lygybę įrašę į (6), gausime:

$$\left. \begin{aligned} v_{ix} &= -\omega y_i, \\ v_{iy} &= \omega x_i, \\ v_{iz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(8) lygybę įrašę į (5), turėsime:

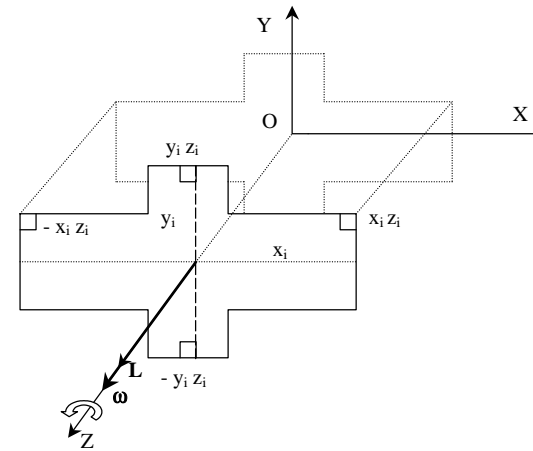
$$\left. \begin{aligned} L_x &= -\omega \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i, \\ L_y &= \omega \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, \\ L_z &= \omega \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Tegul sukimosi ašis z yra kietojo kūno simetrijos ašis - kūnas sukasi apie simetrijos ašį. 10 pav. pavaizduotas apie tokią sukimosi ašį besisukančio kietojo kūno statmenas tai ašiai pjūvis. Tuomet kiekvieną kūno elementą, kurio koordinatės x_i ir z_i , atitiks kitas tokios pat masės elementas, kurio koordinatės $(-x_i)$ ir z_i . Todėl

$$\sum_i m_i z_i x_i = 0,$$

analogiškai

$$\sum_i m_i y_i z_i = 0.$$



10 pav.

Todėl iš (9) lygybės gauname:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= 0, \\ L_y &= 0, \\ L_z &= \omega \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Iš šios lygybės matyti, kad tokio kūno judesio kiekio momentas nukreiptas z – ū ašies arba kampinio greičio ω kryptimi: $\mathbf{L} \uparrow \uparrow \omega$ (mat $L_z > 0$). Iš 9 pav. matyti, kad

$$x_i^2 + y_i^2 = R_i^2,$$

kur R_i – taško m_i atstumas nuo sukimosi ašies. Pakeiskime to atstumo žymėjimą mažąja raide r_i (radio vektorius žymėjimas tokia pat raide \mathbf{r}_i tuo tarpu nebus reikalingas). Tuomet turėsime:

$$x_i^2 + y_i^2 = r_i^2 \quad (11)$$

ir

$$L_z = L = \omega \sum m_i r_i^2. \quad (12)$$

Skaliarinis teigiamas dydis

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = I \quad (13)$$

vadinamas kietojo kūno inercijos momentu. (13) lygybė yra inercijos momento apibrėžimas. Iš jo matyti, kad inercijos momentas I priklauso tik nuo kūno masės pasiskirstymo. Sukamajame judėjime inercijos momentas vaidina masės vaidmenį. Jo vienetas yra $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Atskiro pavadinimo jis neturi, nors technikoje inercijos momentas yra svarbus dydis.

Ištisiniam kietajam kūnui, kaip ir ieškant masių centro, vietoj vieno taško masės m_i reikia imti masės elementą dm , ir inercijos momentas išreiškiamas integralu:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV. \quad (14)$$

Integruoti reikia pagal tūrį V .

Atsižvelgus į (13) arba (14), kietojo kūno judesio kiekio momento didumas ir vektorius atitinkamai:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= I \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{L} &= I \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (15)$$

Kadangi inercijos momentas I yra teigiamas, tai kūno, besisukančio apie simetrijos ašį, judesio kiekio momentas \mathbf{L} visada yra nukreiptas kampinio greičio $\boldsymbol{\omega}$ kryptimi (nukreiptas į tą pusę, iš kurios žiūrint kūnas sukasi prieš laikrodžio rodyklę).

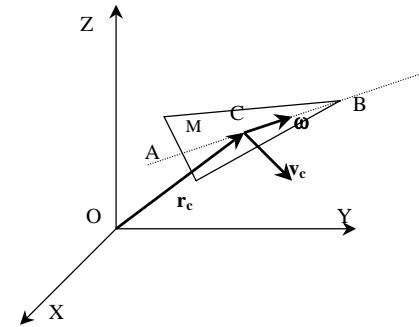
Lygybėje (15) judesio kiekio momentas yra apskaičiuotas taško O , esančio bet kur sukimosi ašyje, atžvilgiu.

Tvermės dėsnių 1.3 paragrafe įrodyta teorema: sistemos judesio kiekio momentas, kurio nors nejudančio taško O atžvilgiu yra lygus masių centro judesio kiekio momentui to paties taško O atžvilgiu plus sistemos judesio kiekio momentas masių centro atžvilgiu.

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}_c \mathbf{K}] + \mathbf{L}_c, \quad (16)$$

čia $\mathbf{K} = M \mathbf{v}_c$ yra sistemos judesio kiekis, o \mathbf{v}_c – masių centro greitis.

Ši teorema tinka ir kietajam kūnui (kietai sistemai). Simetrijos ašyje visada guli masių centras C (11 pav.). Todėl (15) lygybėje vietoj I galima rašyti I_c , tuo atkreipiant dėmesį į tai, kad simetrijos ašis visada eina per masių centrą.



11 pav.

Tuomet:

$$\mathbf{L}_c = I_c \boldsymbol{\omega}. \quad (17)$$

Kai per masių centrą einanti sukimosi ašis nėra simetrinė, (17) lygybė negalima.

Masių centro greitį pažymėję \mathbf{v}_c , kūno masę – M ir masių centro radiusą vektoriu – \mathbf{r}_c , (16) lygybę pilniau galime parašyti taip:

$$\mathbf{L}_o = I_c \boldsymbol{\omega} + [\mathbf{r}_c M \mathbf{v}_c]. \quad (18)$$

Tai kietojo kūno judesio kiekio momentas bendru atveju – kai kūnas sukasi apie simetrijos ašį (apie masių centrą) ir slenka.

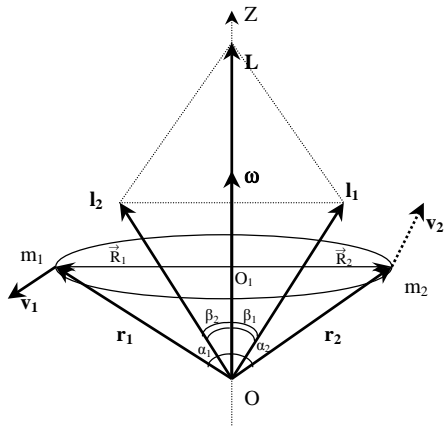
Mes gavome (15) lygybę analitiniu (algebriniu) būdu: kiek paprasčiau tai galima padaryti geometrinio metodu. Jeigu kūnas sukasi apie simetrijos ašį z , tai kiekvieną masės elementą m_1 atitiks antras simetriškas tokios pat masės elementas m_2 (12 pav.). $m_2 = m_1$. Pirmojo elemento m_1 judesio kiekio momentas bet kurio sukimosi ašyje esančio taško O atžvilgiu $\mathbf{l}_1 = [\mathbf{r}_1 m_1 \mathbf{v}_1]$, o antrojo elemento m_2 judesio kiekio momentas to paties taško atžvilgiu $\mathbf{l}_2 = [\mathbf{r}_2 m_2 \mathbf{v}_2]$. Greitis \mathbf{v}_1 statmenas brėžinio plokštumai ir nukreiptas į skaitytoją, o greitis \mathbf{v}_2 – nuo skaitytojo. Todėl vektoriai \mathbf{l}_1 ir \mathbf{l}_2 guli brėžinio plokštumoje. Iš brėžinio simetrijos matyti, kad abiejų masių m_1 ir m_2 atstojamasis judesio kiekio momentas

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$$

nukreiptas kampinio greičio $\boldsymbol{\omega}$ kryptimi. Beliko apskaičiuoti vektoriaus \mathbf{L} absoliutinį didumą.

$L = l_1 \cos \beta_1 + l_2 \cos \beta_2$; $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 90^\circ$. Todėl

$$L = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin \alpha_2. \quad (19)$$



12 pav.

$\mathbf{r}_1 \perp \mathbf{v}_1, \mathbf{r}_2 \perp \mathbf{v}_2$, todėl $l_1 = r_1 m_1 v_1, l_2 = r_2 m_2 v_2, \mathbf{v}_1 = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_1], \mathbf{v}_2 = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}_2]$; $v_1 = \omega r_1 \sin\alpha_1$,

$v_2 = \omega r_2 \sin\alpha_2$; $l_1 = \omega m_1 r_1^2 \sin\alpha_1, l_2 = \omega m_2 r_2^2 \sin\alpha_2$. Pastarąsias dvi išraiškas įrašę į (19), gauname

$$L = \omega m_1 r_1^2 \sin^2\alpha_1 + \omega m_2 r_2^2 \sin^2\alpha_2.$$

Kadangi $r_1 \sin\alpha_1 = R_1$, o $r_2 \sin\alpha_2 = R_2$, tai

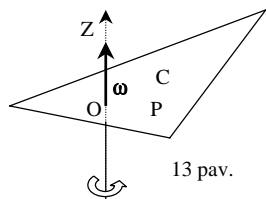
$$L = \omega (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2).$$

$m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 = I$ (abielų masių inercijos momentas sukimosi ašies atžvilgiu). Todėl gauname, kad

$$L = J \omega.$$

Ši lygybė tiks ir visam simetriškam kūnui, nes jį galima išskaidyti į išnagrinėtas simetriškas poras. Taigi, ką norėjome, įrodėme. Gavome (15) formulę.

Pratybos

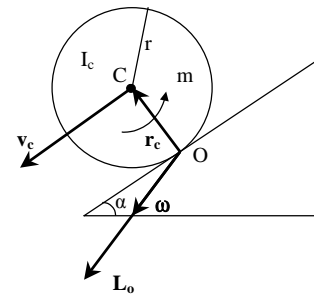


13 pav.

1. Parodykite, kad plokščios figūros P, besisukančios apie statmeną tai figūrai ašį z, judesio kiekio momentas taško O, gulinčio plokštumoje P, atžvilgiu

$$L_o = J_z \omega$$

ir tuomet, kai sukimosi ašis nėra simetrijos ašis, ir kai pati figūra P nėra simetrinė.



14 pav.

2. Skriemulys rieda nuožulnia plokštuma neslysdamas. Skriemulio masė m, inercijos momentas simetrijos ašies atžvilgiu I_c , spindulys r. Raskite skriemulio judesio kiekio momentą tuo momentu, kai kampinis greitis yra ω .

Sprendimas

Remsimės (18) formule: $L_o = I_c \boldsymbol{\omega} + [\mathbf{r}_c m \mathbf{v}_c]$. Šiuo atveju $\boldsymbol{\omega}$ yra statmenas brėžinio plokštumai ir nukreiptas į skaitytoją (14 pav.). Vektorinė sandauga $[\mathbf{r}_c m \mathbf{v}_c]$ taip pat nukreipta $\boldsymbol{\omega}$ kryptimi, todėl $[\mathbf{r}_c m \mathbf{v}_c] = r_c m v_c \boldsymbol{\omega}/\omega = r_c m \omega r_c \boldsymbol{\omega}/\omega = m r_c^2 \boldsymbol{\omega} = m r^2 \boldsymbol{\omega}$. Ieškomas $L_o = (I_c + m r^2) \boldsymbol{\omega}$ ir nukreiptas į skaitytoją. Tokį pat atsakymą gautume ir pagal šių pratybų 1 uždavinio formulę $L_o = I_z \boldsymbol{\omega} = I_c \boldsymbol{\omega}$. Vėliau pamatysime, kad $I_o = I_c + m r^2$.

3. Įrodykite, kad kai bet kokios formos kūnas sukasi apie bet kokią z ašį, tai (15) lygybė $L = I \omega$ galioja judesio kiekio momento projekcijai į tą ašį:

$$L_z = I \omega. \quad (19)$$

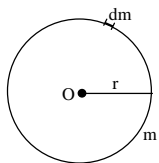
Čia I – kūno inercijos momentas tos ašies atžvilgiu, o pagal (7) $\omega = \omega_z$. Patartume remtis (9) formulėmis.

1.4 Inercijos momento pavyzdžiai. Inercijos spindulys

Panagrinėsime dažniau sutinkamų formų vienalyčių kūnų inercijos momentus simetrijos ašų atžvilgiu. Kūnų masės dabar žymėsime mažąja raide m, nes taip dažniau rašoma literatūroje.

Remsimės praeito skirsnio (14) formule:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV.$$



15 pav.

1. Plonas lankas arba plonasienis vamzdis. Visi masių elementai vienodai nutolę nuo sukimosi ašies O, todėl

$$I = r^2 \int dm = r^2 m,$$

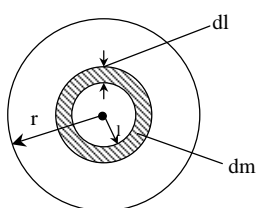
$$I = m r^2.$$

(1)

$$I = m l^2 / 12.$$

(3)

2. Vienalytis diskas arba pilnaviduris ritinys.



16 pav.

Masės elementą dm pasirenkame plono žiedo, per kurio centrą O eina sukimosi ašis, pavidalo:
 $dm = \sigma dS = \sigma 2 \pi l dl$ (σ - paviršinis tankis).

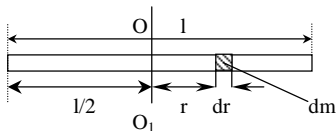
$$I = \int_m l^2 dm = \int_0^r l^2 \sigma 2 \pi l dl = 2 \pi \sigma \int_0^r l^3 dl = 2 \pi \sigma (l^4/4) \Big|_0^r = \sigma \pi r^4/2,$$

$\sigma \pi r^2 = m$, todėl

$$I = m r^2 / 2.$$

(2)

3. Tiesus plonas strypas (besisukantis apie statmeną strypui simetrijos ašį OO_1).



17 pav.

$dm = q dr$ (q - ilginis tankis).

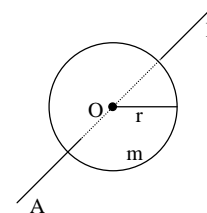
$$I = 2 \int_{m/2} r^2 dm = 2 \int_0^{l/2} r^2 q dr =$$

$$= 2 q (r^3/3) \Big|_0^{l/2} = q l^3/12. \text{ Kadangi } ql =$$

$= m$, tai

Dar keletu kūnų inercijos momentus parašysime be įrodymo.

4. Pilnaviduris rutulys (sukantis apie per centrą O einančią ašį AB).

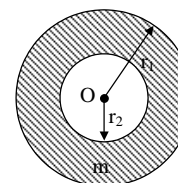


18 pav.

$$I = 2 m r^2/5.$$

(4)

5. Rutulys su kiauryme centre (sukantis apie tokią ašį, kaip ir pilnavidurio rutulio atveju).



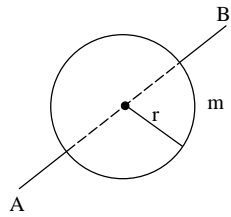
19 pav.

$$I = (2/5) m (r_1^5 - r_2^5) / (r_1^3 - r_2^3).$$

(5)

Čia r_1 – rutulio, o r_2 – kiaurymės spindulys.

6. Plonasienė sfera arba tuščiaaviduris kamuolys, burbulas (sukantis apie tokią pat ašį, kaip ankstesniais dviem atvejais).



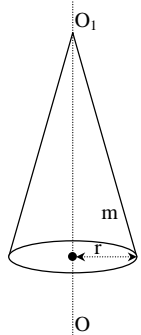
20 pav.

$$I = 2 m r^2/3.$$

(6)

((6) lygybę nesunku gauti ištačius (5) formulę ribą, kai $r_2 \rightarrow r_1$).

7. Pilnaviduris kūgis (besisukantis apie simetrijos ašį OO_1).

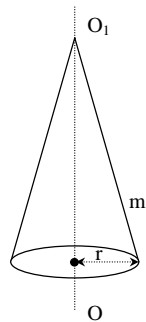


21 pav.

$$I = 3 m r^2/10.$$

(7)

8. Plonasienio kūgio šoninis paviršius (sukantis apie tokią pačią ašį, kaip praeitu atveju).

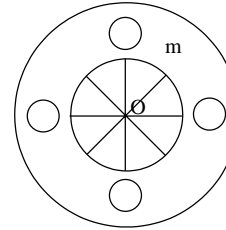


22 pav.

$$I = m r^2/2.$$

(8)

9. Bet koks skriemulys (su stipiniais ir įvairiomis kiurymėmis).



23 pav.

Yra būdų (vėliau tai aptarsime) eksperimentiškai nustatyti duotos masės m skriemulio inercijos momentą I duotos ašies O atžvilgiu. Tuomet rašoma plono lanko inercijos momento formulė (1):

$$I = m r_1^2.$$

(9)

Iš šios lygybės randame

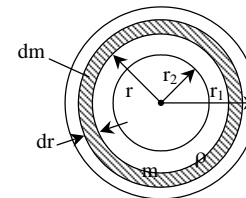
$$r_1 = \sqrt{I / m}.$$

(10)

Spindulys r_1 vadinamas inercijos spinduliu. (10) lygybė yra inercijos spindulio apibrėžimas. Uždaviniuose skriemulio inercijos spindulys paprastai nurodomas sąlygose. Tuomet inercijos momentas randamas pagal (9) formulę.

Pratybos

1. Raskite storasienio vamzdžio inercijos momentą simetrijos ašies O atžvilgiu. Vamzdžio masė m, o išorinio ir vidinio paviršių spinduliai atitinkamai lygūs r_1 ir r_2 (24 pav.)



24 pav.

Sprendimas

Masės elementą dm parenkame panašiai, kaip vienalyčio disko atveju:

$$dm = \rho 2 \pi r dr l,$$

kur ρ – tankis, o l – vamzdžio ilgis.

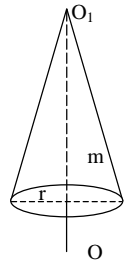
$$I = \int_m r^2 dm = 2 \pi \rho l \int_{r_2}^{r_1} r^3 dr = 2 \pi \rho l \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r_2}^{r_1} = \pi \rho l (r_1^4 - r_2^4) / 2 = (\rho \pi l / 2) (r_1^2 -$$

$$- r_2^2) (r_1^2 + r_2^2).$$

$\rho \pi l (r_1^2 - r_2^2) = m$. Todėl ieškomas

$$I = m (r_1^2 + r_2^2) / 2. \quad (11)$$

2. Raskite plonasio kūgio viso paviršiaus inercijos momentą simetrijos ašies OO_1 atžvilgiu.



25 pav.

(Ats.: $I = m r^2 / 2$, kur m – viso paviršiaus masė)

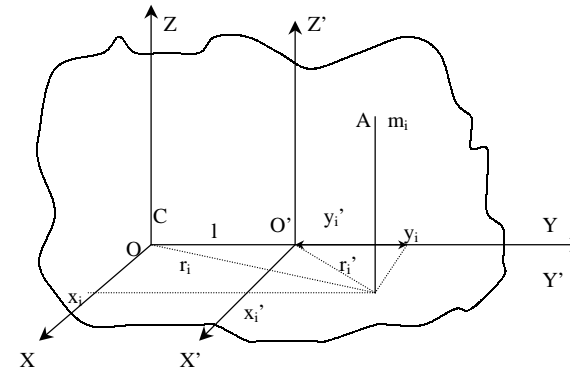
Pastaba: visais šiame skirsnyje nagrinėjtais atvejais sukimosi ašis eina per kūno masių centrą.

1.5 Šteinerio – Heigenso (Huiigenso) teorema

Ta teorema nurodo ryšį tarp kietojo kūno inercijos momentų dviejų lygiagrečių ašių atžvilgiu.

Tegul $z - \eta$ ašis eina per kietojo kūno masių centrą C , o ašis z' lygiagrečiai $z - \eta$ ašiai ir atstumas tarp tų ašių l . $y - \eta$ ir $y' - \eta$ ašys sutampa. Kūno inercijos momentą $z - \eta$ ašies atžvilgiu pažymėkime I_z arba I_c , o $z' - \eta$ ašies atžvilgiu – $I_{z'}$.

Pagal inercijos momento apibrėžimą, 1.3 paragrafo (13) formulę



27 pav.

$$I_c = I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2), \quad (1)$$

$$I_{z'} = \sum_{i=1}^n m_i r_i'^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i'^2 + y_i'^2). \quad (2)$$

Iš 27 pav. matyti, kad

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i', \\ y_i &= y_i' + l. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) lygybę įrašome į (2). Gauname:

$$I_{z'} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + l^2 - 2l y_i) = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) + l^2 \sum_i m_i - 2l \sum_i m_i y_i; \quad (4)$$

$$\sum_i m_i = m \text{ (visa kūno masė)}.$$

Pagal masių centro apibrėžimą (1.1 paragrafo (1))

$$y_c = \sum_i m_i y_i / m = 0,$$

nes masių centro koordinatė $y_c = 0$ (žr. 27 pav.). Todėl $\sum m_i y_i = 0$.

Tada, dar atsižvelgus į (1), iš (4) gauname:

$$I_c = I_c + m l^2. \quad (5)$$

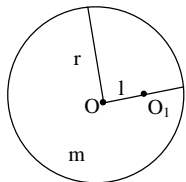
Tai ir yra Šteinerio – Heigenso (Hiuigenso) teorema:

Kūno inercijos momentas kurios nors ašies atžvilgiu lygus jo inercijos momentui atžvilgiu ašies, lygiagrečios su duotąja ir einančios per kūno masių centrą plus masės ir atstumo tarp ašių kvadrato sandaugai.

Šia teorema remiantis, galima rasti kūno inercijos momentą įvairių ašių atžvilgiu.
Ch. Huygens – olandų fizikas, mechanikas, matematikas ir astronomas, gyveno 1629 - 1695 m.

Pratybos

1. Apie kokią ašį O_1 turi sukintis vienalytis diskas, kad jo inercijos momentas būtų toks, kaip tokios pat masės ir spindulio plono lanko inercijos momentas, sukantis apie ašį O ? (28 pav.)



28 pav.

Sprendimas

Pažymėkime $OO_1 = l$. Lanko inercijos momentas

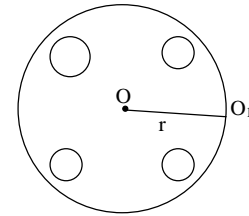
$$I_1 = m r^2.$$

Disko inercijos momentas, sukantis apie ašį O_1 ,

$$I_2 = m l^2 + m r^2/2.$$

$$I_1 = I_2, \text{ todėl } m r^2 = m l^2 + m r^2/2 \Rightarrow l = r / \sqrt{2} \approx 0,71 r.$$

2. Kaip pasikeis r spindulio skriemulio inercijos spindulys, jeigu skriemulys, sukęsis apie simetrijos ašį O , pradės sukintis apie ašį O_1 ?



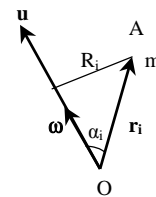
(Ats.: $r_2^2 = r_1^2 + r^2$, čia r_1 ir r_2 – pradinis ir pakitęs inercijos spinduliai)

29 pav.

3. Kiek kartų pasikeis tiesaus plono strypo inercijos momentas, jei strypas, sukęsis apie simetrijos ašį, pradės sukintis apie ašį, einančią per strypo galą ir lygiagrečią simetrijos ašiai ?

1.6 Kinetinė besisukančio kietojo kūno energija. Kionigo teorema kietajam kūnui

Tegul kietasis kūnas sukasi apie nejudamą ašį u arba nejudamą tašką O (ašis u laikui bėgant keičia kryptį). Tai pagal 1.2 paragrafo (1) bet kurio taško A arba m_i greitis



30 pav.

$$v_i = [\omega r_i].$$

Pagal Tvermės dėsnį (1.5 paragrafas) kūno kinetinė energija

$$T = \sum_i m_i v_i^2/2.$$

$$v_i^2 = (\omega r_i \sin \alpha_i)^2 = \omega^2 R_i^2. \text{ Todėl}$$

$$T = \sum_i m_i \omega^2 R_i^2 / 2 = (\omega^2 / 2) \sum_i m_i R_i^2.$$

Pagal 1.3 paragrafą $\sum m_i R_i^2 = I$ (inercijos momentas ašies u atžvilgiu).
Taigi

$$T = I \omega^2 / 2. \quad (1)$$

Matome, kad besisukančio kietojo kūno kinetinė energija skaičiuojama panašiai kaip slenkamojo judėjimo atveju, tiksliai vietoj slenkamojo judėjimo greičio v reikia imti kampinį kūno greitį ω , o vietoj masės m – inercijos momentą I .

Prisiminkime Kionigo teoremą bet kokiai sistemai (Tvermės dėsnų 1.5 paragrafas):

$$T = T_c + M v_c^2 / 2.$$

Čia v_c – masių centro greitis, o T_c – kinetinė energija masių centro atžvilgiu.

Kietajam kūnui, remiantis (1) lygybe,

$$T_c = I_c \omega^2 / 2, \quad (2)$$

kur I_c – inercijos momentas ašies, einančios per masių centrą, atžvilgiu. Todėl Kionigo teorema kietajam kūnui galime parašyti taip:

$$T = I_c \omega^2 / 2 + m v_c^2 / 2. \quad (3)$$

(Kūno masę pažymėjome mažąja m).

Žodžiais šią teoremą pasakysime taip pat, kaip ir bet kokiai sistemai:

Kietojo kūno kinetinė energija yra lygi masių centro kinetinei energijai plus kinetinė energija masių centro atžvilgiu.

Ta teorema tinka bet kokiam kietojo kūno judėjimui – kai kūnas sukasi ir slenka (masių centras juda). Kai masių centras nejuda ($v_c = 0$), kietojo kūno kinetinė energija

$$T = I_c \omega^2 / 2. \quad (4)$$

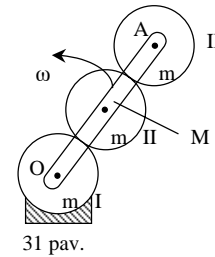
Kai kūnas juda slenkamoju judėjimu ($\omega = 0$),

$$T = m v_c^2 / 2. \quad (5)$$

Pratybos

1. Planetinį mechanizmą horizontalioje plokštumoje suka vienalytis strypas OA, kuris jungia trijų vienodų skriemulių centrus. I skriemulys įtvirtintas. Skriemuliai

vienas kitu neslysta. Strypas OA sukasi kampiniu greičiu ω , kiekvieno skriemulio masė m ir spindulys r , o strypo masė M . Raskite mechanizmo kinetinę energiją T .



Sprendimas

II skriemulys sukasi prieš laikrodžio rodyklę kampiniu greičiu

$$\omega_2 = \omega + \omega = 2 \omega.$$

III skriemulio kampinis greitis

$$\omega_3 = \omega - \omega = 0.$$

Kiekvieno skriemulio inercijos momentas

$$I_1 = m r^2 / 2.$$

Strypo OA inercijos momentas

$$I_2 = M (4 r)^2 / 12 + M (2 r)^2 = 16 M r^2 / 3.$$

II skriemulio kinetinė energija

$$T_2 = I_1 \omega_2^2 / 2 + m (2 r \omega)^2 / 2 = 3 m r^2 \omega^2.$$

III skriemulio kinetinė energija

$$T_3 = m (4 r \omega)^2 / 2 = 8 m r^2 \omega^2.$$

Strypo OA kinetinė energija

$$T_{OA} = I_2 \omega^2 / 2 = 8 M r^2 \omega^2 / 3.$$

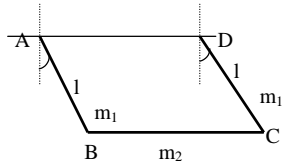
($T_{OA} \neq M v_c^2 / 2$, nes strypas sukasi).

Ieškoma kinetinė energija

$$T = T_2 + T_3 + T_{OA} = r^2 \omega^2 (33 m + 8 M) / 3.$$

2. Plokščias mechanizmas sudarytas iš trijų vienalyčių strypų AB, BC ir CD, kurie lankstomis A ir D pritvirtinti prie lubų ir gali sukis apie horizontalią ašį AD. AB = DC = l, BC = AD. Strypų AB ir CD masės yra m_1 , o strypo BC masė m_2 .

Strypai AB ir CD sukasi kampiniu greičiu ω .
Raskite mechanizmo kinetinę energiją T. (Ats.:
 $T = l^2 \omega^2 (2 m_1 + 3 m_2) / 6$).



32 pav.

3. m masės ir spindulio r skriemulys, kurio inercijos momentas simetrijos ašies atžvilgiu yra I_c , rieda neslysdamas greičiu v_c . Kam lygi skriemulio kinetinė energija T ? (Ats.: $T = (m + I_c/r^2) v_c^2/2$).

1.7 Tvermės dėsniai kietojo kūno atveju

Tvermės dėsniai kietajam kūnui apibūdinami kaip bet kokios sistemos. Tikslai yra keli savitumai.

Pagal Tvermės dėsnų skyriaus 1.1 ir 1.2 paragrafus, kai pagrindinis išorinių jėgų vektorius $\mathbf{R} = 0$, kūno judesio kiekis $\mathbf{K} = m \mathbf{v}_c = \text{const}$. (1) Čia m – kūno masė, o \mathbf{v}_c – masių centro greitis. Iš (1) taip pat seka, kad ir $\mathbf{v}_c = \text{const}$., o masių centro pagreitis tada $\mathbf{a}_c = 0$. Kai viena kuri projekcija $R_x = 0$, $K_x = m v_{cx} = \text{const}$. Kai kietas kūnas sukasi apie nejudamą simetrijos ašį, tada masių centro greitis $\mathbf{v}_c = \mathbf{0}$, ir kūno judesio kiekis $\mathbf{K} = m \mathbf{v}_c = \mathbf{0}$.

Taip pat pagal Tvermės dėsnų skyriaus 1.3 paragrafą, kai pagrindinis išorinių jėgų momentas $\mathbf{M} = 0$, kūno judesio kiekio momentas $\mathbf{L} = \text{const}$. Kai kietas kūnas sukasi apie simetrijos ašį, remiantis šio skyriaus 1.3 paragrafo (15) formule tada

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega} = \text{const}. \quad (2)$$

Kai viena kuri projekcija $M_z = 0$, pagal 1.3 paragrafo (19) formulę

$$L_z = I_z \omega = \text{const}. \quad (3)$$

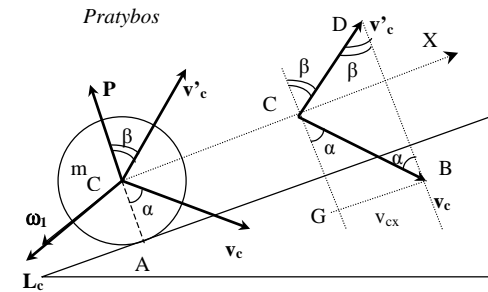
Jeigu kūno inercijos momentą sukimosi ašies z atžvilgiu sumažinsime, kampinis greitis ω padidės ir atvirkščiai – padidinus I_z , sumažės ω . Tai dažnai sutinkams reiškiny. Atsiminkite, kad (3) (žr.1.3 paragrafą) galioja bet kokios formos kūnams, besisukantiems apie bet kurią ašį.

Pagal Tvermės dėsnų skyriaus 1.5 paragrafo (10) formulę, sistemos kinetinės energijos pokytis yra lygus visų vidinių ir išorinių jėgų darbų sumai: $dT = dA^v + dA^i$. Tačiau kietame kūne vidinės jėgos darbo neatlieka, nes nėra kūno dalių tarpusavio judėjimo: $dA^v = 0$. Todėl

$$dT = dA^i. \quad (4)$$

Kietojo kūno kinetinės energijos mažas pokytis yra lygus visų išorinių jėgų elementarių darbų sumai.

Kai išorinės jėgos darbo neatlieka ($dA^i = 0$), kieto kūno kinetinė energija $T = \text{const}$.



33 pav.

1. Vienalytis rutulys, besisukdamas apie bet kokios krypties ašį kampiniu greičiu $\boldsymbol{\omega}_1$, atsimuša į nejudantį plokščią paviršių kampu α (33 pav.). Rutulys ir paviršius slidūs ir absoliučiai tamprūs. Raskite, kokių kampu β rutulys atsöks nuo paviršiaus, koks bus atsokusio rutulio judesio kiekio momentas \mathbf{L}'_c ir kinetinė energija T'.

Sprendimas

Rutulio judesio kiekio momentas prieš smūgį (masių centro C atžvilgiu) buvo $\mathbf{L}_c = I_c \boldsymbol{\omega}_1$. Labai trumpu smūgio momentu τ paviršius rutulį veikia didele momentine arba smūgio jėga \mathbf{P} , kuri yra daug didesnė už įprastą ilgalaikę jėgą, pavyzdžiui, sunkį m g. Todėl smūgio metu galima apsiriboti tik smūgio jėgos poveikiu. Kadangi abu paviršiai slidūs, tai smūgio jėga \mathbf{P} bus statmena į tuos paviršius (nebus trinties jėgos) ir eis per rutulio masių centrą C. Jos momentas taško C atžvilgiu $\mathbf{M}_c = \mathbf{0}$, todėl judesio kiekio momentas nepakis:

$$\mathbf{L}'_c = \mathbf{L}_c = I_c \boldsymbol{\omega}'_1 = I_c \boldsymbol{\omega}_1.$$

Rutulys po smūgio suksis apie tos pat krypties ašį tuo pačiu kampiniu greičiu.

Absoliučiai tamprus smūgio metu išorinių jėgų atliktas darbas $dA^I = 0$ (smūgio pradžioje jis yra neigiamas, o pabaigoje – teigiamas), todėl rutulio kinetinė energija taip pat nepasikeis:

$$T' = T = I_c \omega_1'^2/2 + m v_c'^2/2 = I_c \omega_1^2/2 + m v_c^2/2.$$

Kadangi $\omega_1' = \omega_1$, tai ir $v_c' = v_c$. Masių centro greičio didumas šio smūgio metu nepakinta.

Kadangi smūgio jėga **P** statmena X ašiai, tai rutulio judesio kiekio projekcija į tą ašį nepakinta:

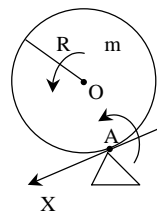
$$m v_{cx}' = m v_{cx}; \quad v_{cx}' = v_{cx}.$$

Todėl trikampiai BCG ir DCE yra lygūs, taigi

$$\alpha = \beta.$$

Rutulys atšoks nuo paviršiaus tuo pačiu kampu, koku ir krito.

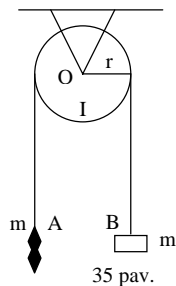
2. Vienalytis diskas, kurio masė m ir spindulys R , sukasi apie ašį O kampiniu greičiu ω_0 (34 pav.). Tam tikru laiko momentu disko ašis O atpalaiduojama ir įtvirtinamas taškas (ašis) A .



34 pav.

Raskite disko sukimosi apie ašį A kampinį greitį ω tuoj po įtvirtinimo. Kam lygus ašies A poveikio diskui įtvirtinimo momentu impulso projekcija S_x ? (Pravartu prisiminti 1.3 paragrafo pratybų 2 uždavinį, taip pat paaiškinti, kodėl tinka arba netinka tas ar kitas tvermės dėsnis).

(Ats.: $S_x = m R \omega_0 / 3$).



35 pav.

3. Per skridinį, kurio spindulys r ir inercijos momentas sukimosi ašies O atžvilgiu I , permesta virvė. Į tašką A įsikibo beždžionė, o taške B pririštas kūnas (35 pav.). Kūno ir beždžionės masės m yra vienodos. Koku greičiu v_B judės kūnas B , kai beždžionė pradės lipti aukštyn greičiu v_r virvės atžvilgiu? Virvės masės nepaisykite (Pravartu šį uždavinį palyginti su Tvermės dėsnų konspekto 1.3 paragrafo pratybų 3 uždaviniu).

1.8 Pagrindinė sukamojo judėjimo dinamikos lygtis

Panagrinėsime vieną svarbiausių kieto kūno dinamikos temų. Prisiminkime Tvermės dėsnų konspekto 1.3 paragrafo teoremą apie sistemos judesio kiekio momento kitimą:

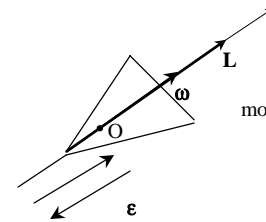
$$\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt, \tag{1}$$

kur **L** – sistemos judesio kiekio momentas kurio nors taško (nejudančio) atžvilgiu, **M** – pagrindinis išorinių jėgų momentas to paties taško atžvilgiu.

Kietajam kūnui, besisukančiam apie simetrijos ašį, pagal šio konspekto 1.3 paragrafo (15) formulę

$$\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

kur I – inercijos momentas tos ašies atžvilgiu, o $\boldsymbol{\omega}$ - kampinis greitis. Kaip ir 1.3 paragrafe, tą ašį pasirinkime z (36 pav.).



36 pav.

Taškas O , kurio atžvilgiu skaičiuojame vektorius **L** ir **M**, gali būti bet kur sukimosi ašyje. Dabar (2) lygybę išrašykime į (1): $d\mathbf{L}/dt = d(I \boldsymbol{\omega})/dt = I d\boldsymbol{\omega}/dt = I \boldsymbol{\epsilon}$, nes inercijos momentas I yra pastovus, o $d\boldsymbol{\omega}/dt$ – kampinis pagreitis $\boldsymbol{\epsilon}$. Taigi,

$$I \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{M}. \tag{3}$$

Iš šios lygybės matyti, kad kampinis pagreitis $\boldsymbol{\epsilon}$ nukreiptas pagrindinio išorinių jėgų momento **M** kryptimi. Panašiai iš lygybės (žr. Tvermės dėsnų konspekto 1.2 paragrafą)

$$M \mathbf{a}_c = \mathbf{R} \tag{4}$$

matyti, kad masių centro pagreitis \mathbf{a}_c visada yra nukreiptas pagrindinio išorinių jėgų vektoriaus **R** kryptimi arba iš II Niutono dėsnio

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{5}$$

matyti (tai pabrėžėme Taško dinamikos skyriuje), kad taško pagreitis **a** visada nukreiptas veikiančių jėgų atstojamosios **F** kryptimi. Taigi analogija yra tokia: slenkamojo judėjimo pagreitį **a** arba \mathbf{a}_c atitinka sukamojo judėjimo kampinis pagreitis $\boldsymbol{\epsilon}$, o

vieno kūno masę m arba sistemos masę M sukamajame judėjime atitinka kietojo kūno inercijos momentas I . (5) lygybė, kaip žinome, yra pagrindinė taško dinamikoje, (4) - pagrindinė taškų sistemos ir kietojo kūno slenkamojo judėjimo dinamikoje, o (3) lygybė yra pagrindinė kietojo kūno sukamojo judėjimo dinamikoje. Tai II Niutono dėsnio atitikmuo.

Konkrečių uždavinių sprendimui, kaip žinome, paprastai naudojamos skaliarinio pavidalo lygtys. Besisukančiam kietajam kūnui jas gausime (3) lygybę projektuodami į sukimosi ašį z :

$$I \varepsilon_z = M_z \quad (6)$$

Tai atitinka taško dinamikos lygtį

$$m a_x = F_x.$$

Iš Kinematikos skyriaus žinome, kad taško pagreičio projekcija

$$a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2.$$

Atitinkamai

$$\varepsilon_z = d\omega_z/dt = d^2\varphi/dt^2,$$

kur φ - kūno pasisukimo kampas (taip pat žinome iš Kinematikos). Todėl (6) lygtį galima parašyti taip:

$$I (d^2\varphi/dt^2) = M_z. \quad (7)$$

Iš šios lygties, žinant pagrindinio išorinių jėgų momento projekciją M_z , galime rasti kietojo kūno pasisukimo kampą φ bet kuriuo laiko momentu:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (8)$$

(8) lygtį taip pat vadina kietojo kūno judėjimo lygtimi arba sukimosi dėsniumi. Tokio dėsnio atitikmeniu taško dinamikoje gali būti, pavyzdžiui, lygybė

$$x = x_0 + v_{0x} t + F_x t^2 / 2 m.$$

Kadangi mes nagrinėjame kieto kūno sukimąsi apie vieną ašį z , tai kampinis greitis ω ir kampinis pagreitis ε bus nukreipti arba z ašies kryptimi, arba jai priešinga, priklausomai nuo z ašies krypties pasirinkimo ir nuo pagrindinio išorinių jėgų vektoriaus \mathbf{M} krypties. Kūno sukimasis bus arba greitėjantis (kai ω didumas didės), arba lėtėjantis (kai ω didumas mažės), arba tolyginis (kai $\omega = \text{const.}$). Laikui bėgant kampinis greitis ω gali pakeisti kryptį – kūnas gali pradėti sukintis priešinga kryptimi. Kai kampinis pagreitis ε yra pastovus, sukimasis yra tolygiai kintantis (tolygiai lėtėjantis arba tolygiai

greitėjantis), kai ε laikui bėgant kinta, sukimasis yra netolygiai kintantis. Iš aukščiau pasakyto seka, kad nagrinėjamu atveju $\varepsilon_z = \pm \varepsilon$, $M_z = \pm M$, ir (6) lygybė bus:

$$I \varepsilon = M. \quad (9)$$

Tai atitinka II Niutono dėsnio parašymą pavidalu $m a = F$, kur a ir F yra kūno pagreičio ir jėgos didumai.

Kai kietasis kūnas sukasi ne apie simetrijos ašį, o apie bet kurią kitą ašį z arba kūnas yra bet kokios formos, tai, kaip matėme 1.3 paragrafe, nebegalioja (2) lygybė: $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$. Judesio kiekio momento \mathbf{L} kryptis nesutampa su kampinio greičio $\boldsymbol{\omega}$ kryptimi. Tačiau tada galioja lygybė (žr. 1.3 paragrafo pratybų 3 uždavinį):

$$L_z = I \omega_z = I \omega. \quad (10)$$

Taip pat galioja (1) lygybė, iš kurios seka:

$$dL_z/dt = M_z. \quad (11)$$

(10) lygtį išrašome į (11):

$$dL_z/dt = I d\omega_z/dt = I d^2\varphi/dt^2;$$

$$M_z = I d^2\varphi/dt^2.$$

Gavome (7) lygtį. Taigi (7) arba (6) lygtis tinka bet kokios formos (taip pat plokštiems) kietiesiems kūnams, besisukantiems apie bet kokią ašį. Sukantis apie simetrijos ašį, tinka ir (9) lygtis.

Kai nereikia ieškoti pasisukimo kampo $\varphi = \varphi(t)$, o pakanka žinoti kampinį greitį $\omega = \omega(t)$, tai į (7) lygtį vietoj $d^2\varphi/dt^2$ išrašome $d\omega_z/dt$ ir gauname:

$$I d\omega_z/dt = M_z. \quad (12)$$

Kia $M_z = \text{const.}$, (tai dažni atvejai) iš (12) nesunkiai randame ω_z : $I d\omega_z = M_z dt$, $d\omega_z = M_z dt/I$,

$$\omega_z - \omega_{z0} = \int_0^t M_z dt/I = (M_z/I) \int_0^t dt = M_z t / I. \quad (\omega_{z0} - \text{pradinė kampinio greičio projekcija}).$$

$$\text{arba } \left. \begin{array}{l} \omega_z = \omega_{z0} + M_z t / I, \\ \omega_z = \omega_{z0} + \varepsilon_z t. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Projekcijos indeksus galima ir praleisti. Tuomet galima rašyti:

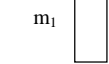
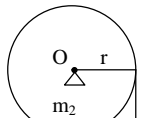
$$\left. \begin{array}{l} \omega = \omega_0 \pm M t / I, \\ \omega = \omega_0 \pm \epsilon t. \end{array} \right\} \quad (14)$$

- 1) $a = m_1 g / (m_1 + m_2 / 2) = 0,483 g = 4,74 \text{ m/s}^2$,
- 2) $\epsilon = a / r = 23,7 \text{ rad/s}^2$,
- 3) $T = m_1 m_2 g / (2 m_1 + m_2) = 71 \text{ N}$,
- 4) $N = m_2 (3 m_1 + m_2) g / (2 m_1 + m_2) = 365 \text{ N}$.

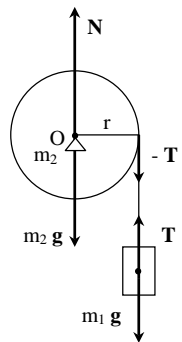
Čia reikia teisingai parinkti ženklą.

Pratybos

1. $m_1 = 14 \text{ kg}$ masės kūnas pakabintas lengvu netįstančiu siūlu, kurio kitas galas užvyniotas ant vienalyčio disko pavidalo skriemulio (37 pav.).



37 pav.



38 pav.

Skriemulio masė $m_2 = 30 \text{ kg}$, spindulys $r = 20 \text{ cm}$. Raskite :

- 1) kabančiojo kūno pagreitį a ,
 - 2) skriemulio kampinį pagreitį ϵ ,
 - 3) siūlo įtempimą T ,
 - 4) nejudančios ašies O reakcijos jėgą N .
- Siūlas skriemuliui neslysta, ašies O trinties nepaisykite.

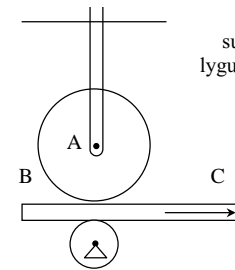
Sprendimas

Pažymėkime (38 pav.) kabančiąjį kūną ir skriemulį veikiančias jėgas. Rašome kabančiojo kūno, skriemulio masių centro O judėjimo lygtis ir skriemulio sukamojo judėjimo lygtį:

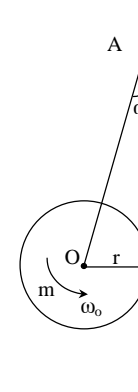
$$\begin{array}{l} m_1 g - T = m_1 a, \\ m_2 g + T - N = 0, \\ I \epsilon = T r. \end{array}$$

Be to, $\epsilon = a / r$, o skriemulio inercijos momentas $I = m_2 r^2 / 2$. Iš tų (penkių) lygčių randame visus ieškomus dydžius:

2. Nejudantis $0,15 \text{ m}$ spindulio diskas A nuleidžiamas ant diržo BC , judančio $1,3 \text{ m/s}$ greičiu (39 pav.). Nustatykite disko sukimosi dėsnį $\varphi = \varphi(t)$, jeigu trinties tarp jo ir diržo koeficientas lygus $0,4$. (Ats.: laiką t_1 diskas suksis greitėdamas, o po to pastoviu kampiniu greičiu. $\varphi = 26,2 t^2 \text{ (rad)}$, kai $0 < t \leq t_1$ ir $\varphi = (8,68 t - 0,72) \text{ (rad)}$, kai $t \geq t_1 = 0,166 \text{ (s)}$).



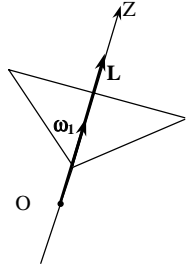
39 pav.



40 pav.

3. Skriemulys, kurio spindulys r , masė m ir inercijos momentas ašies O atžvilgiu I , įsuktas kampiniu greičiu ω_0 40 pav. parodyta kryptimi ir pakabintas virvele prie sienos. Trinties koeficientas tarp skriemulio ir sienos yra μ , o virvelė su siena sudaro kampą α . Kiek laiko t skriemulys suksis? Koks čia yra ribinis atvejis?

1.9 Giroskopas ir jo taikymai

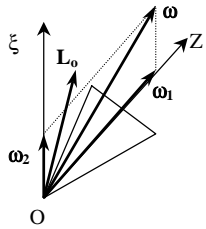


41 pav.

Giroskopu vadina vienalytį kūną, besisukantį dideliu kampiniu greičiu apie savo simetrijos ašį. Tą ašį pažymėkime z, kūno kampinį greitį ω_1 (41 pav.) ir inercijos momentą tos ašies atžvilgiu I_z . Tuomet pagal 1.3 paragrafo formulę (15), kai ašis z nejuda, kūno judesio kiekio momentas L_o bet kurio toje ašyje esančio (nejudančio) taško O atžvilgiu

$$L_o = I_z \omega_1. \quad (1)$$

L_o nukreptas z ašies kryptimi.



42 pav.

Tegul dabar z ašis nėra nejudanti, o sukasi kampiniu greičiu ω_2 apie kitą ašį ξ (42 pav.). Tuomet atstojamasis kampinis greitis

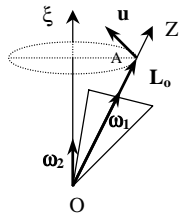
$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

o judesio kiekio momento L_o kryptis nesutaps su z ašimi.

Tegul kampinis greitis ω_2 yra daug kartų mažesnis už kampinį greitį ω_1 ($\omega_1 \gg \omega_2$). Tada galima tarti, kad judesio kiekio momentas L_o apytikriai nukreiptas kampinio greičio ω_1 kryptimi (43 pav.):

$$L_o \approx I_z \omega_1. \quad (2)$$

(2) prielaida besiremianti teorija vadinama elementaria giroskopo teorija.

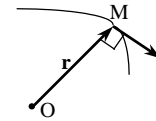


43 pav.

Prisiminkime teoremą apie sistemos (taip pat ir kietojo kūno) judesio kiekio momento kitimą. Pagal tą teoremą (žr. Tvermės dėsnių 1.3 paragrafo (14)):

$$M = dL_o / dt, \quad (3)$$

kur M – pagrindinis išorinių jėgų momentas taško O atžvilgiu.



44 pav.

Iš Kinematikos žinome, kad $v = dr/dt$, kur r – judančio taško M padėtį nurodantis radiusas vektorius, o v – taško M greitis (44 pav.). Tačiau 44 pav. yra analogiškas 43 pav. Todėl galime tarti, kad

$$u = dL_o / dt, \quad (4)$$

kur u – vektoriaus L_o galo taško A greitis (43 pav.). Kadangi taškas A sukasi apie ašį ξ kampiniu greičiu ω_2 , tai pagal Kinematikos konspekto 2.6 paragrafo (14) formulę:

$$u = [\omega_2 L_o]. \quad (5)$$

Čia įrašę L_o išraišką iš (2) gauname, kad

$$u = [\omega_2 I_z \omega_1]$$

arba

$$dL_o / dt = [\omega_2 I_z \omega_1]. \quad (6)$$

Iš (6) ir (3) seka:

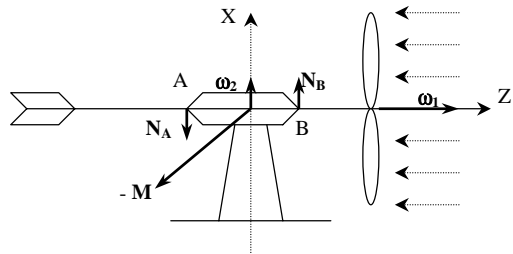
$$M = I_z [\omega_2 \omega_1]. \quad (7)$$

Tai pagrindinė šios giroskopo teorijos lygtis (yra dar kita, išsamesnė giroskopo teorija). Ta lygtis parodo, koks turi būti giroskopą veikiantis išorinių jėgų momentas M , kad giroskopo simetrijos ašis z suktųsi kampiniu greičiu ω_2 . Atsiminkime, kad I_z yra giroskopo inercijos momentas simetrijos ašies atžvilgiu.

Kadangi išorinių jėgų momentas M veikia giroskopą, tai pats giroskopas veiks tą įrenginį, kuris giroskopo ašį suka kampiniu greičiu ω_2 , jėgos momentu

$$(-M) = I_z [\omega_1 \omega_2]. \quad (8)$$

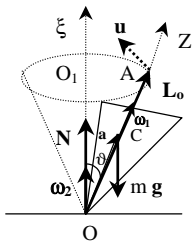
Šis dydis ($-M$) vadinasi giroskopo momentas. Esant dideliem kampiniam greičiui ω_1 , giroskopo momentas taip pat yra didelis ir net gali sulaužyti sukimosi ašį laikinai atramas.



45 pav.

Pailiustruokime giroskopo momento veikimą vėjo malūnėlio arba vėjo variklio atveju. Jeigu besisukantį apie simetrijos ašį AB kampiniu greičiu ω_1 malūnėlį vėjas staiga pasuka kampiniu greičiu ω_2 apie vertikalią ašį X, tai malūnėlis tuo momentu paveiks ašį z jėgos momentu $(-M) = I_z [\omega_1 \omega_2]$ (45 pav.). Dėl to malūnėlio sukimosi ašis z paveiks guolį B į viršų jėga N_B , o guolį A paveiks papildomai į apačią jėga N_A (z ašis bus sukama link X ašies arba vektorius ω_1 bus sukamas link vektoriaus ω_2).

Atskiras giroskopo atvejis yra vilkelis.



46 pav.

Tegul vilkelis sukasi apie savo simetrijos ašį z dideliu kampiniu greičiu ω_1 (46 pav.). Tą sukimąsi vadina savuoju sukimosi. Tuomet, kaip ir 43 pav., z ašies kryptimi bus nukreiptas ir vilkelio judesio kiekio momentas L_o (apskaičiuotas nejudančio taško O atžvilgiu, kuriame vilkelis remiasi į grindis). Vilkelio masių centro C padėtį nusakantį vektorių pažymėkime a . Jeigu vilkelį veikia tik sunkio jėga mg ir grindų reakcijos jėga N , tai vilkelį veikiančių jėgų momentas taško O atžvilgiu

$$M = [a mg] \quad (9)$$

bus statmenas į vektorius a ir g , t. y., bus nukreiptas horizontaliai ir statmenai į plokštumą, kurioje guli z ir ξ ašys. Pagal lygybes (3) ir (4) $M = u$, todėl vektoriaus L_o galo taškas A judės horizontalia kryptimi apskritimu (jo centras taške O_1) greičiu u , iš ξ ašies galo žiūrint prieš laikrodžio rodyklę. Tuo pačiu vilkelis (jo simetrijos ašis z) sukis apie vertikalią ašį ξ . To sukimosi kampinį greitį, panašiai, kaip 42 ar 43 pav.,

pažymėkime ω_2 . Toks vilkelio sukimas (apie ašį ξ) vadinamas precesija, o ω_2 – precesijos kampiniu greičiu. Kampas ϑ (46 pav.) vadinamas nutacijos kampu.

Rasime precesijos kampinį greitį ω_2 . Sunkio jėgos momento didumas $M = a mg \sin\vartheta$, o iš (7) lygybės $M = I_z \omega_2 \omega_1 \sin\vartheta$. Taigi $I_z \omega_2 \omega_1 \sin\vartheta = a mg \sin\vartheta$ ir

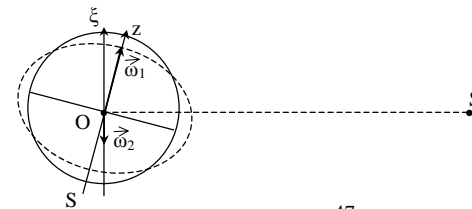
$$\omega_2 = a mg / I_z \omega_1. \quad (10)$$

Žodžiais tai galima pasakyti taip:

Precesijos kampinis greitis atvirkščiai proporcingas savojo sukimosi kampiniam greičiui.

Savojo sukimosi kampiniam greičiui ω_1 mažėjant (paprastai taip būna dėl trinties), precesijos kampinis greitis ω_2 didėja.

Dėl to, kad Žemė yra šiek tiek suplota išilgai savo sukimosi ašies z (47 pav.), daugiausia dėl Saulės S_1 poveikio Žemės sukimosi ašis z (NS) taip pat sukasi precesijos kampiniu greičiu ω_2 apie ašį ξ , statmeną ekliptikos plokštumai OS_1 .



47 pav.

Tas greitis nedidelis. Vieną kartą apie ašį ξ Žemės sukimosi ašis NS apsisuka apytikriai per 26000 metų. Taigi Žemei

$$\omega_2 / \omega_1 = (26000 \cdot 365)^{-1},$$

kur $\omega_1 = 2\pi / T = 2\pi / (24 \cdot 60 \cdot 60)$ (rad / s).

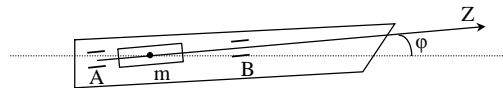
Jeigu giroskopas sukasi apie masių centrą ir jį veikia tik tos jėgos, kurios buvo parodytos 46 pav., tai atstumas $a = 0$ ir iš (10) matyti, kad $\omega_2 = 0$. Tokio giroskopo savojo sukimosi ašis z ir judesio kiekio momentas L_o nekeičia krypties erdvėje. Tokiu giroskopu galima pademonstruoti Žemės sukimąsi apie savo ašį. Žinomi taip pat giroskopiniai kompasai, prietaisai laivuose, nustatyti horizonto liniją, bombonešiuose

nusitaikyti į taikinį. Giroskopų savybėmis remiasi vienbėgių geležinkelių projektai, tos savybės turi įtakos važiuojant dviračiu.

Mes rėmėmės lygybe $\mathbf{M} = \mathbf{u}$, kur vektorių \mathbf{u} vadinome greičiu. Tačiau šis greitis turi kitą dimensiją, negu $d\mathbf{r}/dt$, nes $\mathbf{u} = d\mathbf{L}_o/dt$, o ne $d\mathbf{r}/dt$. Dar kitą dimensiją turi Tvermės dėsnų konspekte nagrinėtas judesio kiekio kitimo greitis $d\mathbf{K}/dt = \mathbf{R}$. Vieno tų greičių dimensija yra m/s, kito – jėga, trečio – jėgos momentas.

Pratybos

- Greitaigio laivo turbinos veleno masė $m = 1000$ kg, inercijos momentas simetrijos ašies atžvilgiu $I_z = 637$ kg · m² ir savojio sukimosi greitis $n = 3000$ apsisukimų per min.



48 pav.

Laivas bangose svyruoja vertikaloje plokštumoje taip, kad kampas ϕ tarp turbinos simetrijos ašies z ir horizonto linijos kinta harmoniškai pagal dėsnį

$$\phi = \phi_0 \cos(2\pi t / T)$$

periodu $T = 15$ s su amplitude $\phi_0 = 10^0$. Laivo turbinos veleno ašis įtvirtinta dviem guoliais A ir B, tarp kurių atstumas $AB = 1$ m. (48 pav.).

Kokia didžiausia papildoma jėga N_{max} ir kuria kryptimi besisukančios turbinos veleno ašis veiks guolius A ir B dėl bangavimo, palyginus su nesisukančios turbinos poveikiu ?

Sprendimas

Giroskopo momentas $(-\mathbf{M}) = I_z [\boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_2]$ bus nukreiptas X ašies kryptimi arba jai priešinga priklausomai nuo laivo sukimosi (dėl bangavimo) krypties apie horizontalią ašį Y (49 pav.). To sukimosi kampinis greitis $\boldsymbol{\omega}_2$ ir giroskopo momentas $(-\mathbf{M})$ keičia kryptį periodu T. Kadangi savojio sukimosi kampinis greitis $\boldsymbol{\omega}_1$ statmenas su kampiniu greičiu $\boldsymbol{\omega}_2$ dėl bangavimo, tai

$$|-\mathbf{M}|_{max} = M_{max} = I_z \omega_1 (\omega_2)_{max}.$$

$$(\omega_2)_{max} = (d\phi / dt)_{max} = \{ -2\pi \phi_0 \sin(2\pi t / T) / T \}_{max} = 2\pi \phi_0 / T.$$

Todėl

$$M_{max} = 2\pi \phi_0 I_z \omega_1 / T.$$

Guolius A ir B veikiančios jėgos \mathbf{N}_A ir \mathbf{N}_B sudaro jėgų dvejetą. $N_A = N_B = N$. Šio dvejeta didžiausias momentas (žr. Statikos konspektą)

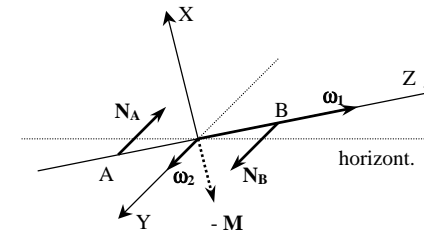
$$M_{max} = N_{max} \cdot AB.$$

Todėl ieškoma jėga $N_{max} = 2\pi \phi_0 I_z \omega_1 / (T \cdot AB)$. Įrašome skaitines vertes: $\omega_1 =$

$$= 2\pi n / 60 = 100 \pi \text{ (rad / s)}. \phi_0 = 10^0 = 2\pi \cdot 10 / 360 = \pi / 18 \text{ (rad)}.$$

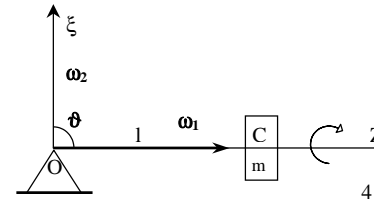
$$N_{max} = 637 \cdot 2\pi^3 \cdot 100 / (1 \cdot 18 \cdot 15) \approx 14600 \text{ (N)}.$$

Tai daugiau už turbinos veleno svorį $mg = 9810$ (N). Jėga N_{max} veiks guolius horizontaliai į dešinę arba į kairę, pakeisdama kryptį periodu T.



49 pav.

- Rutuline lanksta O įtvirtintas giroskopas sukasi apie simetrijos ašį z savuoju kampiniu greičiu ω_1 pagal laikrodžio rodyklę, žiūrint iš tos ašies galo, ir tuo pat metu juda pastoviu precesijos kampiniu greičiu ω_2 apie ašį ξ (50 pav.).

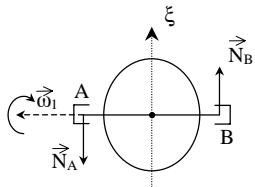


50 pav.

Nutacijos kampas $\vartheta = 90^0$, giroskopo masė m , inercijos momentas z ašies atžvilgiu I_z , atstumas nuo lankstos O iki giroskopo masių centro C yra l . 1) Raskite ryšį tarp kampinių greičių didumų ω_1 ir ω_2 . 2) Kokia vektorius ω_2 kryptis ?

(Ats.: $\omega_1\omega_2 = mg l / I_z$)

3. Dviračio ratas įsuktas dideliu savuoju kampiniu greičiu ω_1 tokia kryptimi, kokia parodyta 51 pav. Norint pasukti rato ašelę AB apie ašį ξ , ašelė pradėjo papildomai spausti guolius A ir B jėgomis N_A ir N_B , gulinčiomis popieriaus plokštumoje brėžinyje parodytomis kryptimis. Kokia kryptimi apie ašį ξ buvo sukama ašelė AB ? Nubrėžkite to sukimo kampinio greičio vektorių ω_2 .



51 pav.

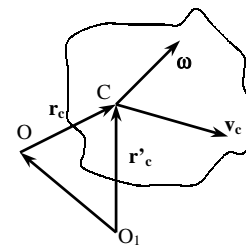
1. 10 Analogija tarp slenkamojo ir sukamojo judėjimo charakteristikų

Iš viso mechanikos kurso, ką iki šiol mokėmės, galima sudaryti tokią slenkamojo ir sukamojo judėjimo analogijų lentelę. Ją pateikiame nenurodydami skirsnių ar formulių, iš kur tai yra gauta.

Slenkamasis judėjimas	Sukamasis judėjimas
x – koordinatė	φ – posūkio kampas
v – greitis	ω – kampinis greitis
a – pagreitis	ε – kampinis pagreitis
m – masė	I – inercijos momentas
F – jėga	M – jėgos momentas
k, K – judesio kiekis (impulsas)	L, L – judesio kiekio momentas
$k = m v, K = M v_c$	$L = [r k], L = I \omega$
$F = dk/dt$	$M = dL/dt$
$m a = F, m a = F$	$I \varepsilon = M, I \varepsilon = M$
$T = m v^2/2$ – kinetinė energija	$T = I \omega^2/2$ – kinetinė energija
$v = v_0 \pm a t$ (kai $a = \text{const.}$)	$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ (kai $\varepsilon = \text{const.}$)
$x = x_0 + v_0 t \pm a t^2/2$ (kai $a = \text{const.}$)	$\varphi = \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2$ (kai $\varepsilon = \text{const.}$)

Ši analogija gali padėti geriau suprasti mechanikos dėsnius, praversti sprendžiant uždavinius.

1. 11 Įvairūs kietojo kūno dinamikos pavyzdžiai



52 pav.

1. Kietasis kūnas sukasi ir slenka. Jo masė M , masių centro greitis duotuoju momentu v_c , o judesio kiekio momentas nejudančio taško O atžvilgiu yra L_o (52 pav.). Kam lygus judesio kiekio momentas L_{o_1} bet kurio kito nejudančio taško O_1 atžvilgiu ?

Sprendimas

Pasinaudokime 1.3 paragrafo (16) formulę:

$$\mathbf{L}_0 = [\mathbf{r}_c, \mathbf{K}] + \mathbf{L}_c,$$

kur $\mathbf{K} = M \mathbf{v}_c$ (judesio kiekis), o \mathbf{L}_c – judesio kiekio momentas masių centro C atžvilgiu. Analogiškai:

$$\mathbf{L}_{01} = [\mathbf{r}'_c, \mathbf{K}] + \mathbf{L}_c.$$

Iš 52 pav. matome, kad

$$\mathbf{r}'_c = \mathbf{O}_1\mathbf{O} + \mathbf{r}_c.$$

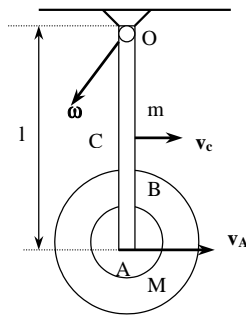
Todėl

$$\mathbf{L}_{01} = [\mathbf{O}_1\mathbf{O}, \mathbf{K}] + [\mathbf{r}_c, \mathbf{K}] + \mathbf{L}_c = [\mathbf{O}_1\mathbf{O}, \mathbf{K}] + \mathbf{L}_0.$$

Išrašę \mathbf{K} išraišką, gauname

$$\mathbf{L}_{01} = \mathbf{L}_0 + [\mathbf{O}_1\mathbf{O}, M \mathbf{v}_c]. \quad (1)$$

Kai masių centras nejuda ($\mathbf{v}_c = \mathbf{0}$), $\mathbf{L}_{01} = \mathbf{L}_0$ – tada judesio kiekio momentas nuo taško O padėties nepriklauso.



53 pav.

2. Ilgio ir m masės vienalytis strypas OA bei su juo standžiai sujungtas M masės ratas sukasi apie horizontalią ašį O kampiniu greičiu ω (53 pav.). Rato inercijos momentas ašies A atžvilgiu I_A . Raskite tos sistemos judesio kiekio momentą \mathbf{L}_0 taško O atžvilgiu.

Sprendimas

Išspręsimė uždavinį 2 būdais.

1) Remiantis 1.3 paragrafo pratybų 1 uždaviniu,

$$\mathbf{L}_0 = I_0 \boldsymbol{\omega},$$

kur pagal 53 pav. parodytą sukimosi kryptį kampinis greitis $\boldsymbol{\omega}$ yra statmenas brėžinio plokštumai ir nukreiptas į skaitytoją, o I_0 – sistemos inercijos momentas O ašies atžvilgiu:

$$I_0 = I_m + I_M,$$

kur I_m ir I_M – strypo ir rato inercijos momentai ašies O atžvilgiu.

Remdamiesi 1.4 paragrafo (3) lygtimi ir 1.5 paragrafo Šteinerio – Heigenso teorema (5), rašome:

$$I_m = m l^2/12 + m (l/2)^2 = m l^2/3, I_M = I_A + M l^2.$$

Todėl

$$I_0 = (M + m/3) l^2 + I_A$$

ir ieškomas

$$\mathbf{L}_0 = ((M + m/3) l^2 + I_A) \boldsymbol{\omega}.$$

2) Remsimės 1.3 paragrafo (18) formulę:

$$\mathbf{L}_0 = I_c \boldsymbol{\omega} + [\mathbf{r}_c, M \mathbf{v}_c].$$

Pagal šią formulę randame atskirai strypo ir rato judesio kiekio momentus \mathbf{L}_{0m} ir \mathbf{L}_{0M} .

$$\mathbf{L}_{0m} = m l^2 \boldsymbol{\omega}/12 + [\mathbf{OC}, m \mathbf{v}_c].$$

Vektorinė sandauga $[\mathbf{OC}, m \mathbf{v}_c]$ nukreipta į skaitytoją – vektoriaus $\boldsymbol{\omega}$ kryptimi. Todėl

$$[\mathbf{OC}, m \mathbf{v}_c] = OC \cdot m \mathbf{v}_c \cdot \boldsymbol{\omega}/\omega = (l/2) m (l/2) \omega (\boldsymbol{\omega}/\omega) = m l^2 \boldsymbol{\omega}/4;$$

$$\mathbf{L}_{0m} = (m l^2/12 + m l^2/4) \boldsymbol{\omega} = m l^2 \boldsymbol{\omega}/3;$$

Analogiškai

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{0M} &= I_A \boldsymbol{\omega} + [\mathbf{OA}, M \mathbf{v}_A] = I_A \boldsymbol{\omega} + OA \cdot M \mathbf{v}_A \cdot \boldsymbol{\omega}/\omega = I_A \boldsymbol{\omega} + l \cdot M l \omega \boldsymbol{\omega}/\omega = \\ &= (I_A + M l^2) \boldsymbol{\omega}. \end{aligned}$$

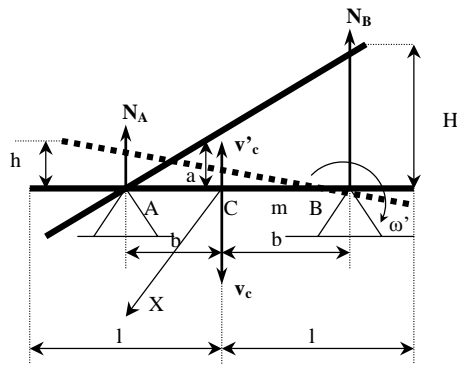
$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_{0m} + \mathbf{L}_{0M} = ((M + m/3) l^2 + I_A) \boldsymbol{\omega}.$$

Gavome tą patį rezultatą.

3. Praeitame uždavinyje nagrinėtoje sistemoje (53 pav.) iš pradžių strypas OA nejuda, o ratas su strypu taške B nesujungtas ir sukasi apie ašį A kampiniu greičiu $\omega_0 = 30$ rad/s. Rato inercijos momentas $I_A = 0,5$ kg m², masė $M = 5$ kg, strypo masė $m = 2,04$ kg, ilgis $l = 0,6$ m.

Staiga (įkišus kaištį B) rato sukimasis apie ašį A sustabdomas. Kokiu kampiniu greičiu ω ratas drauge su strypu tuoj po minėto sustabdymo suksis apie ašį O ? (Rato sustabdymo momentu vidinės jėgos atlieka darbą, todėl kinetinės energijos tvermės dėsnis negalioja. Tuo pat momentu ašis O strypą veikia horizontalia išorine jėga, todėl judesio kiekio tvermės dėsnis taip pat negalioja. Galioja judesio kiekio momento tvermės dėsnis. Judesio kiekio momentas, rato sukimaši strypo atžvilgiu sustabdytus, surastas praeitame uždavinyje. Ats.: $\omega = I_A \omega_0 / (I_A + (M + m / 3) l^2) = 5,89$ rad/s).

4. Laisvai padėto ant dviejų atramų A ir B horizontalaus strypo masių centras C yra viduryje atkarpos AB (54 pav.).



54 pav.

Dešinysis strypo galas pakeliamas į aukštį H virš atramos B ir paleidžiamas. Į kokį aukštį h po smūgio į atramą B pakils kairysis strypo galas, jei strypo ilgis 2l, atstumas tarp atramų 2b, strypo smūgis į atramą B plastiškas ?

Sprendimas

Pažymėkime strypo kampinį greitį prieš pat smūgį į atramą B raide ω ir kampinį greitį tuoj po smūgio ω' . Į skaitytoją nukreiptą ašį pažymėkime x. Abu vektoriai ω ir ω' nukreipti prieš x ašį. Strypo masę pažymėkime m, o jo masių centro greitį prieš pat smūgį ir tuoj po smūgio v_c ir v'_c .

Nuo paleidimo momento iki smūgio ir po smūgio galioja mechaninės energijos tvermės dėsnis. Smūgio metu dalis mechaninės energijos virsta į šiluminę energiją, ryškiai kinta judesio kiekis (kinta masių centro greitis), nes šalia atramos A reakcijos jėgos N_A ir sunkio jėgos m g veikia daug kartų didesnė momentinė atramos B reakcijos jėga N_B . Taigi smūgio momentu jėgų N_A ir mg galima nepaisyti. Kadangi jėgos N_B momentas taško B atžvilgiu lygus nuliui, tai gauname, kad smūgio metu strypo judesio kiekio momentas taško B atžvilgiu nekinta:

$$L_B = L_B'.$$

Remdamiesi 2 uždavinyje panaudotomis formulėmis, rašome:

$$L_B = I_c \omega + [BC, m v_c].$$

Projektuojame į x ašį:

$$L_{Bx} = - I_c \omega + BC \cdot m v_c,$$

$I_c = m (2l)^2 / 12 = m l^2 / 3$, $BC = b$, $v_c = \omega b$, todėl

$$L_{Bx} = m (- l^2 / 3 + b^2) \omega. \quad (a)$$

Analogiškai:

$$\begin{aligned} L_B' &= I_c \omega' + [BC, m v_c']; \\ L_{Bx}' &= - I_c \omega' - BC \cdot m v_c'; & v_c' &= \omega' b; \\ L_{Bx}' &= - m (l^2 / 3 + b^2) \omega'. \end{aligned} \quad (b)$$

$L_{Bx} = L_{Bx}'$, todėl iš (a) ir (b) lygybių gauname:

$$\omega' = \omega (l^2 - 3 b^2) / (l^2 + 3 b^2). \quad (c)$$

Pagal minėtą mechaninės energijos tvermės dėsnį:

$$I_A \omega^2 / 2 = mg a,$$

$$I_B \omega'^2 / 2 = mg u,$$

kur a – pradinis masių centro aukštis, u – galinis masių centro aukštis (pav. nepažymėtas). Kadangi inercijos momentai ašių (taškų) A ir B atžvilgiu lygūs ($I_A = I_B$), tai iš paskutinių dviejų lygybių seka, kad

$$(\omega' / \omega)^2 = u / a.$$

Iš brėžinio matyti, kad $u/a = h/H$, todėl

$$(\omega' / \omega)^2 = h/H. \quad (d)$$

Iš (c) ir (d) lygybių gauname, kad ieškomasis

$$h = H \left((l^2 - 3b^2) / (l^2 + 3b^2) \right)^2.$$

($b^2 < l^2/3$ arba $b < l/\sqrt{3} \approx 0,58l$).

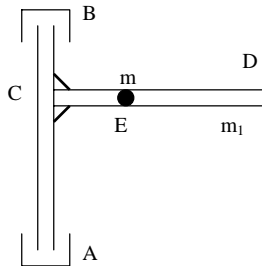
Remiantis 1 uždavinio gauta (1) formule

$$L_{o1} = L_o + [O_1O, M v_c],$$

judėsio kiekio momentus buvo galima skaičiuoti kitaip. Pavyzdžiui,

$$L_B = L_A + [BA, m v_c] = I_c \omega + [AC, m v_c] + [BA, m v_c] = I_c \omega + [(AC + BA), m v_c] = I_c \omega + [BC, m v_c].$$

Gavome tą patį, kaip ir prieš tai.

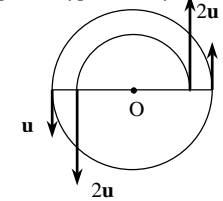


55 pav.

5. Horizontalus vamzdelis CD, kurio masė m_1 , o ilgis L , laisvai sukasi apie vertikalią ašį AB kampiniu greičiu ω_0 (55 pav.). Tuo metu vamzdelyje atstumu $CE = l$ nuo sukimosi ašies yra mažas m masės rutuliukas. Koks bus vamzdelio kampinis greitis ω tuo metu, kai paleistas rutuliukas išlėks iš vamzdelio? Ašies AB masės nepaisykite arba ją laikykite plona. (Tai kiek praplėstas uždavinys iš Tvermės dėsnų konspekto 1.3 paragrafo)

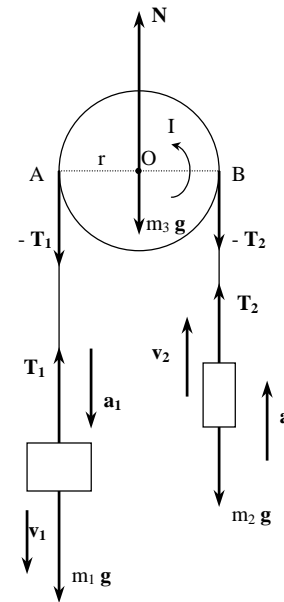
6. Apvali vienalytė horizontali disko pavidalo R spindulio platforma sukasi be trinties apie vertikalią simetrijos ašį kampiniu greičiu ω_0 . Tuo metu ant platformos stovi 4 vienodo svorio žmonės: du ant platformos krašto, o kiti du pusės platformos spindulio atstumu nuo ašies. Koks bus platformos kampinis greitis ω , jeigu ant jos krašto stovintys žmonės pradės judėti apskritimu platformos sukimosi kryptimi santykiu

linijiniu greičiu u , o kiti du minėti žmonės – ta pačia kryptimi santykiu linijiniu greičiu $2u$, kur $u = 9R\omega_0/8$ (56 pav.).



56 pav.

Kiekvieno žmogaus masė 4 kartus mažesnė už platformos masę. Žmonių mases laikykite taškinėmis.



57 pav.

7. Išnagrinėsime Atvado mašinos judėjimą. Atvado mašiną sudaro apie nejudančią simetrijos ašį besisukantis skriemulys ir per jį permatas siūlas, kurio galuose pakabinti du skirtingų masių kūnai (57 pav.). Brėžinyje parodytos ir veikiančios jėgos bei kiti dydžiai, reikalingi uždavinio sprendimui. Paprastai Atvado mašina naudojama kūno pagreičiui nustatyti. Duota kabančiųjų kūnų masės m_1 ir m_2 , skriemulio masė m_3 , inercijos momentas sukimosi ašies O atžvilgiu I ir spindulys r . Tegul $m_1 > m_2$, siūlas lengvas, netįsta ir skriemuliu neslysta. Tada kabančiųjų kūnų greičių ir pagreičių didumai lygūs: $v_1 = v_2 = v$, $a_1 = a_2 = a$. Siūlo įtempimus pažymėjome T_1 ir T_2 . Kabantiems kūnams rašome II Niutono dėsnį, o skriemuliui – pagrindinę sukamojo judėjimo dinamikos lygtį. Kadangi skriemulio kampinis pagreitis $\epsilon = a/r$, o skriemulį veikiančių jėgų momento ašies O atžvilgiu didumas $M = (T_1 - T_2)r$, tai minėtų lygtys atrodo taip:

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a, \\ T_2 - m_2 g = m_2 a, \\ I a / r = (T_1 - T_2) r. \end{cases}$$

Iš tos lygčių sistemos randame:

$$a = g (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2 + I / r^2),$$

$$T_1 = m_1 g (2m_2 + I / r^2) / (m_1 + m_2 + I / r^2),$$

$$T_2 = m_2 g (2m_1 + I / r^2) / (m_1 + m_2 + I / r^2).$$

Ašies O reakcijos jėga:

$$N = T_1 + T_2 + m_3 g = g (m_3 + (4 m_1 m_2 + (m_1 + m_2) I / r^2) / (m_1 + m_2 + I / r^2)).$$

Tai pagrindiniai Atvudo mašinos judėjimą charakterizuojantys dydžiai. Paprasta rasti ir skriemulio kampinį pagreitį ϵ .

Pagreitį a galima rasti ir remiantis teorema apie sistemos kinetinės energijos kitimą. Pagal 1.7 paragrafo (4) formulę $dT = dA^i$, kur dT – mažas kinetinės energijos pokytis, o dA^i – išorinių jėgų elementarus darbas. Mūsų atveju:

$$dA^i = (m_1 - m_2) g ds = (m_1 - m_2) g v dt,$$

$$T = m_1 v^2 / 2 + m_2 v^2 / 2 + I \omega^2 / 2, \quad \omega = v / r, \text{ todėl}$$

$$T = v^2 (m_1 + m_2 + I / r^2) / 2.$$

Paskutinę lygybę diferencijuojame pagal kintamąjį v . Gauname:

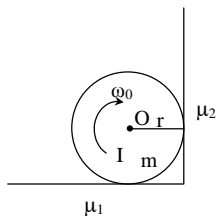
$$dT = 2 v dv (m_1 + m_2 + I / r^2) / 2 = v dv (m_1 + m_2 + I / r^2).$$

Pagal minėtą teoremą apie kinetinės energijos kitimą turime:

$$v dv (m_1 + m_2 + I / r^2) = (m_1 - m_2) g v dt.$$

Iš čia ieškomas

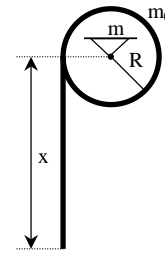
$$a = dv / dt = g (m_1 - m_2) / (m_1 + m_2 + I / r^2).$$



58 pav.

8. m masės, r spindulio skriemulys, kurio inercijos momentas ašies O atžvilgiu I , įsuktas kampiniu greičiu ω_0 ir padėtas ant grindų atsirėmė į vertikalią sieną (58 pav.). Skriemulio trinties su grindimis koeficientas μ_1 , o su siena μ_2 . Koks skriemulio kampinis pagreitis ϵ ir kiek laiko t skriemulys suksis? Kampinį pagreitį ϵ raskite 2 būdais: 1) remiantis pagrindine sukamojo judėjimo dinamikos lygtimi ir 2) remiantis teorema apie kinetinės energijos kitimą.

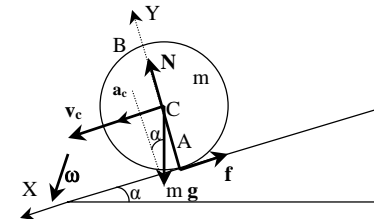
$$(\text{Ats.: } t = \omega_0 (1 + \mu_1 \mu_2) I / (\mu_1 m g r (1 + \mu_2)))$$



59 pav.

9. Ant spindulio R ir masės m vienalyčio ritinio viena eile užvyniotas masės m_0 lynas. Raskite ritinio kampinio pagreitį ϵ priklausomybę nuo kabančios lyno dalies ilgio x , jei visas lyno ilgis yra l . Trinties ritinio guoliuose ir lyno storio nepaisyskite. (Ats.: $\epsilon = 2 m_0 g x / (R l (m + 2m_0))$)

10. Ant nuožulnios plokštumos, kurios polinkio kampas α , padėtas m masės ir r spindulio skriemulys, kurio inercijos momentas simetrijos ašies atžvilgiu yra I (60 pav.). Raskite skriemulio masių centro pagreitį a_c ir kampinį pagreitį ϵ , kai: a) skriemulys ritasi neslysdamas, b) ritasi slysdamas, c) slysta be trinties. Nustatyti skriemulio slydimo arba neslydimo sąlygą.



60 pav.

Sprendimas

Brėžinyje pažymėtos skriemulį veikiančios jėgos: sunkis $m g$, nuožulniosios plokštumos reakcija (lietimosi taške A) N ir trinties jėga f . Parašome

masių centro judėjimo lygtis suprojektavus į X ir Y ašis ir sukamojo judėjimo lygtį:

$$\begin{cases} ma_c = mg \sin \alpha - f, \\ 0 = -mg \cos \alpha + N, \\ I \epsilon = f r. \end{cases}$$

a) $\epsilon = a_c / r$. Todėl $f = I a_c / r^2$, $ma_c = mg \sin \alpha - I a_c / r^2$ ir ieškomas

$$a_c = mg \sin \alpha / (m + I / r^2)$$

bei

$$\varepsilon = mg \sin\alpha / (r (m + I / r^2)).$$

Dar parašykime kampinį greitį:

$$\omega = \varepsilon t = mg t \sin\alpha / r (m + I / r^2). \quad (\omega_0 = 0)$$

b) Šiuo atveju trinties jėga išreiškiama per trinties koeficientą: $f = \mu N = \mu mg \cos\alpha$.

Kampinis pagreitis

$$\varepsilon = f r / I = \mu mg r \cos\alpha / I,$$

kampinis greitis

$$\omega = \mu mg r t \cos\alpha / I.$$

Masių centro pagreitis $a_c = g \sin\alpha - f / m$,

$$a_c = g (\sin\alpha - \mu \cos\alpha)$$

ir masių centro greitis

$$v_c = a_c t = g (\sin\alpha - \mu \cos\alpha) t.$$

Šioje vietoje patogiu rasti neslydimo arba slydimo sąlygą. Remiantis Eulerio formule iš Kinematikos konspekto, skriemulio lietimosi su nuožulniaja plokštuma taško A greitis

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_c + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{CA}];$$

Vektorius \mathbf{v}_c nukreiptas X ašies kryptimi, vektorius $\boldsymbol{\omega}$ statmenas brėžinio plokštumai ir nukreiptas į skaitytoją, tai vektorinė sandauga $[\boldsymbol{\omega} \mathbf{CA}]$ nukreipta prieš X ašį. Todėl paskutiniąją lygybę projektuodami į X ašį, gauname:

$$v_A = v_c - \omega |CA| = v_c - \omega r.$$

Įrašę čia v_c ir ω reikšmes turime:

$$v_A = g t (\sin\alpha - \mu \cos\alpha - \mu m r^2 \cos\alpha / I).$$

Tai yra taip pat taško A greitis nuožulniosios plokštumos atžvilgiu arba lietimosi taško slydimo greitis. Skriemulys neslysta, kai $v_A = 0$. Tada

$$\sin\alpha - \mu \cos\alpha (1 + m r^2 / I) = 0$$

ir

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha / (1 + m r^2 / I)$$

arba

$$\mu = I \operatorname{tg}\alpha / (I + m r^2).$$

Kai trinties koeficientas μ bus mažesnis už reiškinį dešinėje lygybės pusėje, skriemulys slys, o kai μ bus didesnis – neslys.

c) Pakanka į prieš tai gautas atitinkamas reikšmes įrašyti $\mu = 0$, gausime:

$$\varepsilon = 0, \omega = 0, a_c = g \sin\alpha, v_c = g t \sin\alpha.$$

Skriemulys tada juda slenkamuju judėjimu.

Dar rasime skriemulio kampinį greitį ε , kai skriemulys ritasi neslysdamas, remdamiesi teorema apie kinetinės energijos kitimą. Jėgos \mathbf{N} ir \mathbf{f} darbo neatlieka, todėl išorinių jėgų elementarus darbas

$$dA = mg v_c \sin\alpha dt = mg \omega r \sin\alpha dt.$$

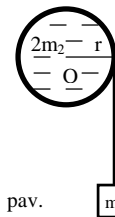
Pagal Kionigo teoremą kietajam kūnui (1.6 paragrafas) kinetinė energija

$$T = m v_c^2 / 2 + I \omega^2 / 2 = m \omega^2 r^2 / 2 + I \omega^2 / 2 = (I + m r^2) \omega^2 / 2,$$

$$dT = (I + m r^2) \omega d\omega, dT = dA,$$

$$(I + m r^2) \omega d\omega = mg \omega r \sin\alpha dt,$$

$$\varepsilon = d\omega / dt = mg r \sin\alpha / (I + m r^2) = mg \sin\alpha / (r (I / r^2 + m)).$$



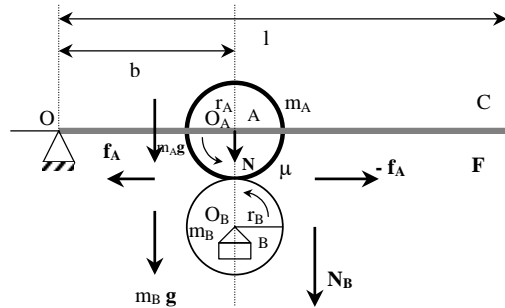
61 pav.

11. Mechaninė sistema parodyta 61 pav. Skriemulys – plonasis masės $m_2 = 2 \text{ kg}$ vamzdis, pripildytas neklampaus masės $2m_2$ skysčio. Vamzdžio galų dangčiai lengvi, siūlas taip pat lengvas, netįsus ir skriemuliu neslysta. Ašis O nejuda. $m_1 = 1 \text{ kg}$, $r = 20 \text{ cm}$. Pradiniu laiko momentu sistema nejudėjo. Praėjus nuo t_0 momento laikui $t_1 = 1,5 \text{ s}$, skystis staiga sušalo ir sukibo su vamzdžio sienelėmis. Nubrėžkite kabančio kūno greičio v priklausomybės nuo laiko t grafiką iki momento $t_2 = 4 \text{ s}$. Raskite siūlo įtempimą T

tuo pačiu laikotarpiu.

(Laiko momentu t_1 šuoliu pakinta inercijos momentas, greičio ir siūlo įtempimo grafikuose yra trūkis).

12. Mechaninė sistema parodyta 62 pav.



62 pav.

Skriemulys A – plonas lankas su lengvais stipiniais, skriemulys B – vienalytis diskas. Skriemulių masės, spinduliai ir pradiniai kampiniai greičiai lygūs: $m_A = m_B = 30,6$ kg, $r_A = r_B = 0,2$ m, $\omega_{0A} = \omega_{0B} = 110$ rad / s. Sukimosi kryptys parodytos pav. Svirtis OC lengva, jos ilgis $l = 1$ m, o galo tašką C veikia jėga $F = 30$ N. Atstumas $b = 0,4$ m. Trinties koeficientas tarp skriemulių $\mu = 0,4$. Ašys O , O_A ir O_B nejuda.

Apskaičiuokite ir nubrėžkite abiejų skriemulių judesio kiekio momentų L_A ir L_B ašių O_A ir O_B atžvilgiu priklausomybę nuo laiko, taip pat jėgos G , kuria ašis O_B veikia skriemulį B, didumo G priklausomybę nuo laiko. Kai kūnas sukasi prieš laikrodžio rodyklę, judesio kiekio momentą L laikykite teigiamu, o kai sukasi pagal laikrodžio rodyklę – neigiamu.

Sprendimas

Tame pačiame 62 pav. pažymėkime veikiančias jėgas: $m_A g$ ir $m_B g$ – lanko ir disko sunkiai, N – svirtis veikia lanką, N_B – lankas veikia diską žemyn, f_A – trinties jėga, kuria diskas veikia lanką, $(-f_A)$ – trinties jėga, kuria lankas veikia diską. Tada galime rašyti:

$$N = F l / b, N_B = m_A g + N = m_A g + F l / b, f_A = \mu (m_A g + F l / b).$$

Iš pradžių abiejų skriemulių sukimasis stabdomas. Jų inercijos momentai: $I_A = m_A r_A^2$, $I_B = m_B r_B^2 / 2$. Lanko ir disko kampiniai pagreičiai: $\epsilon_A = f_A r_A / I_A = \mu (m_A g +$

$+ F l / b) / m_A r_A, \epsilon_B = f_A r_B / I_B = 2 \epsilon_A$. Kampiniai greičiai:

$$\begin{cases} \omega_A = \omega_{0A} - \epsilon_A t, \\ \omega_B = \omega_{0B} - 2 \epsilon_A t. \end{cases}$$

Kadangi ω_B mažėja sparčiau, negu ω_A , tai pirmas stabtels diskas B. Tai įvyks laiko momentu t_1 , kurį rasime iš lygties: $\omega_B = \omega_{0B} - 2 \epsilon_A t_1 = 0, t_1 = \omega_{0B} / 2 \epsilon_A$. Lankas A tuo momentu dar suksis kampiniu greičiu $(\omega_A)_{t_1} = \omega_{0A} - \epsilon_A t_1 = \omega_{0A} - \epsilon_A \omega_{0B} / 2 \epsilon_A = \omega_{0A} / 2$. Lankas ir diskas toliau vienas kitu slys. Diskas trinties jėgos $(-f_A)$ veikiamas pradės sukis priešinga kryptimi (pagal laikrodžio rodyklę) tolygiai greitėdamas, o lankas – prieš laikrodžio rodyklę, tolygiai lėtėdamas. Kai jų kampinių greičių didumai susilygins, trinties jėgos f_A ir $(-f_A)$ išnyks. Tai įvyks laiko momentu t_2 , kurį rasime iš sąlygos: $(\omega_B)_{t_2} = -(\omega_A)_{t_2}$ arba $\omega_{0B} - 2 \epsilon_A t_2 = -(\omega_{0A} - \epsilon_A t_2)$. Iš čia $t_2 = 2 \omega_{0A} / 3 \epsilon_A$. Nuo to momento lankas ir diskas suksis vienodais ir pastoviais kampiniais greičiais priešingomis kryptimis: $(\omega_A)_{t_2} = \omega_{0A} - \epsilon_A t_2 = \omega_{0A} - 2 \epsilon_A \omega_{0A} / 3 \epsilon_A = \omega_{0A} / 3, (\omega_B)_{t_2} = -\omega_{0A} / 3$.

Ieškomi judesio kiekio momentai:

$L_A = I_A \omega_A, L_B = I_B \omega_B$. Jų didumai, tiksliau projekcijos:

$$\begin{cases} L_A = I_A \omega_A = m_A r_A^2 (\omega_{0A} - \epsilon_A t), \\ L_B = I_B \omega_B = m_B r_B^2 (\omega_{0B} - 2 \epsilon_A t) / 2. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq t_2)$$

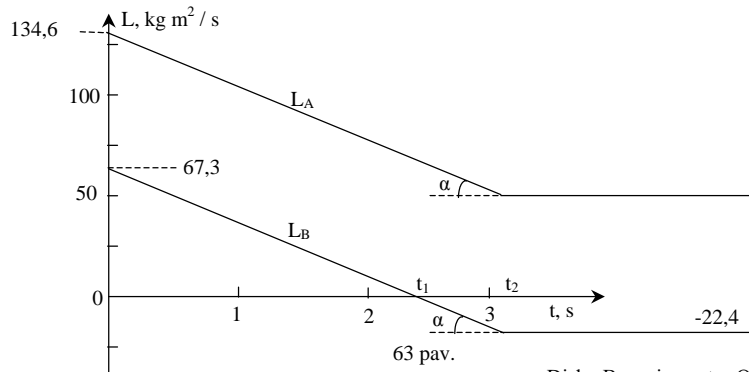
$$\begin{cases} L_A = m_A r_A^2 (\omega_A)_{t_2} = m_A r_A^2 \omega_{0A} / 3 \approx 44,9 \text{ kg m}^2 / \text{s}, \\ L_B = m_B r_B^2 (\omega_B)_{t_2} / 2 = -m_B r_B^2 \omega_{0A} / 6 \approx -22,4 \text{ kg m}^2 / \text{s}. \end{cases} \quad (t_2 \leq t)$$

Pradinės judesio kiekio momentų vertės:

$$L_{0A} = m_A r_A^2 \omega_{0A} \approx 134,6 \text{ kg m}^2 / \text{s},$$

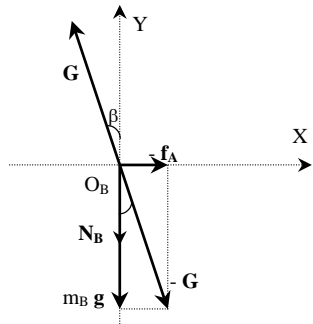
$$L_{0B} = m_B r_B^2 \omega_{0B} / 2 \approx 67,3 \text{ kg m}^2 / \text{s}.$$

Be to, apskaičiavus: $t_1 \approx 2,25$ s, $t_2 \approx 3,0$ s.



63 pav.

Disko B masių centro O_B pusiausvyros sąlyga:



$$N_B + m_B g + (-f_A) + G = 0.$$

Iš čia (žr. 64 pav.):

$$\begin{cases} G_x = -f_A = -\mu (m_A g + F l / b), \\ G_y = N_B + m_B g = m_A g + F l / b + m_B g. \end{cases}$$

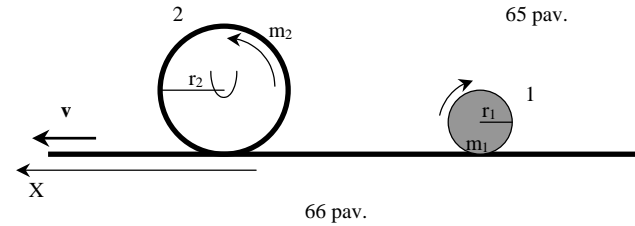
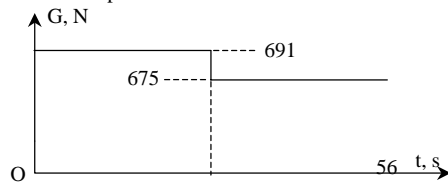
64 pav.

Apskaičiavus $G_x = -150$ N, $G_y = 675$ N, $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} = 691$ N ($0 \leq t \leq t_2$).

$$\operatorname{tg} \beta = |G_x / G_y|. \quad \beta = 12^\circ 30'.$$

Kai $t > t_2$, $G_x = 0$, $G = G_y = 675$ N, $\beta = 0$.

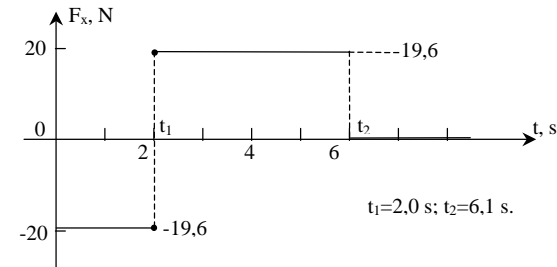
Grafikas 65 pav.:



66 pav.

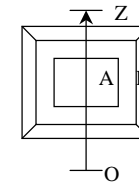
13. Ant begalinės juostos, kuri juda greičiu $v = 2$ m / s, tuo pačiu momentu visu svoriu nuleidžiamas masės $m_1 = 20$ kg spindulio $r_1 = 10$ cm vienalytis ritinys, besisukantis pradiniu greičiu $\omega_{10} = 100$ rad / s ir masės $m_2 = 10$ kg spindulio $r_2 = 20$ cm cilindras, besisukantis pradiniu greičiu $\omega_{20} = 50$ rad / s. Pradinės sukimosi kryptys parodytos 66 pav. Abiejų skriemulių trinties į juostą koeficientas $\mu = 0,2$.

Kokia papildoma jėga F reikia veikti juostą, kad nuleidus abu skriemulius jos greitis nepasikeistų? Nubrėškite tos jėgos projekcijos F_x priklausomybės nuo laiko grafiką. (Ats.: Ieškomas grafikas 67 pav.)



67 pav.

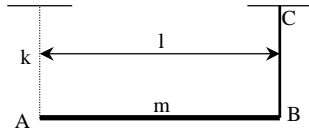
14. Rotorius A įtaisytas rėme B, galinčiame sukintis apie ašį Oz. Tuo momentu, kai išjungiamas rotorių sukantis variklis, rėmas B nejuda, o rotoriaus kampinis greitis lygus ω . Dėl trinties rotoriaus guoliuose rotorius įsuka rėmą ir po laikotarpio t jie ima sukintis drauge kaip vienas kūnas (68 pav.).



68 pav.

Raskite trinties momentą M , kuriuo rotorius veikia rėmą. Rėmą stabdančių jėgų nepaisykite ir laikykite, kad rotoriaus ir rėmo inercijos momentai ašies Oz atžvilgiu lygūs I_1 ir I_2 .

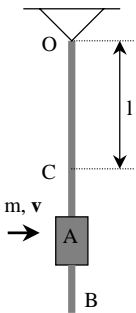
(Ats.: $M = I_1 I_2 \omega / t (I_1 + I_2)$)



69 pav.

15. Masės m ir ilgio l strypą AB horizontalioje padėtyje laiko lynas BC ir spyruoklė A , kurios standumas k (69 pav.). Kaip ir kiek pasikeis jėga, kuria strypas veikia spyruoklę, tuoj po to, kai bus perkirtas lynas ?

16. Balistinę svyruoklę sudaro sunkus kūnas A ir ilgas strypas OB , pritvirtintas prie sukimosi ašies O (70 pav.).

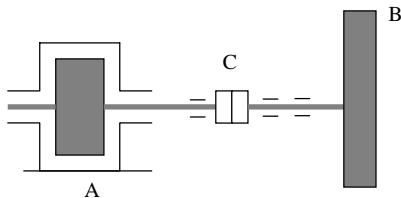


70 pav.

Atstumas nuo sukimosi ašies O iki svyruoklės masių centro C yra l . Svyruoklės (strypo OB ir kūno A) masė M , o inercijos radiusas ašies O atžvilgiu r_1 .

Balistine svyruokle galima išmatuoti kulkos greitį. Tegul masės $m = 50$ g kulka, lėkusi horizontaliai, įsmigo į balistinę svyruoklę, o pastaroji dėl to atsilenkė kampu $\alpha = 48^\circ$. Raskite kulkos greitį v , jeigu $l = 75$ cm, $M = 15$ kg, $r_1 = 79$ cm.

(Remkitės judesio kiekio ir energijos tvermės dėsniais, nereikšmingus dydžius, kur galima, atmeskite. Ats.: $v \approx 630$ m/s)



71 pav.

17. Nejudantis skriemulys B (71 pav.) diskine sankaba C sujungiamas su variklio rotoriumi A , besisukančiu kampiniu greičiu ω_0 . 1) Koks bus bendras rotoriaus ir skriemulio kampinis greitis ω tuoj pat po jų sujungimo ? 2) Po kiek laiko t rotorius A ir skriemulys B pradės sukintis roto-

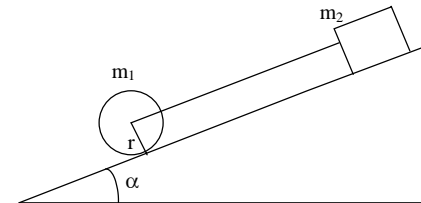
riaus pradiniu kampiniu greičiu ω_0 , jei rotorius suka pastovus jėgų momentas M ? Rotoriaus A inercijos momentas I_A , skriemulio $B - I_B$.

(Ats.: 2) $t = I_B \omega_0 / M$)

18. Vienodų masių tos pačios medžiagos tašelis ir rutuliukas iš ramybės būsenos paleisti nuslysta nuo tos pačios nuožulniosios plokštumos. Paaiškinkite kodėl nuožulniosios plokštumos apačioje jų kinetinės energijos nebus vienodos. Raskite tų energijų santykį. Palyginkite ir nuslydimo laikus. Nuožulniosios plokštumos polinkio kampas $\alpha = 60^\circ$, o trinties koeficientas tarp nuožulniosios plokštumos ir abiejų kūnų $\mu = \sqrt{3} / 6 \approx 0,289$.

(Ats.: Rutuliukas riedės slysdamas. Ieškomas kinetinių energijų santykis

$T_2 / T_1 = 11 / 10$, kur T_2 – rutuliuko, o T_1 – tašelio kinetinė energija. Nuslydimo laikai vienodi)



72 pav.

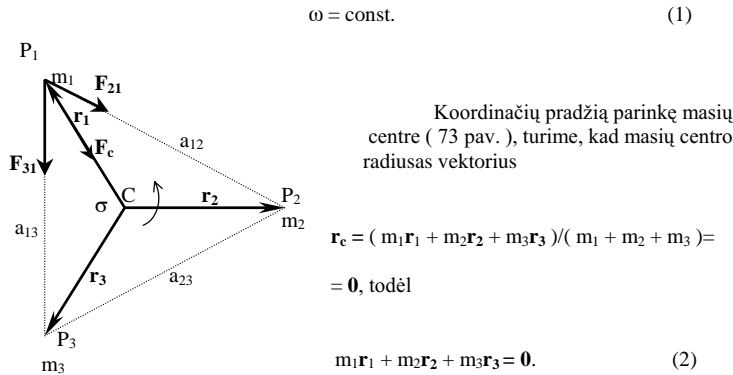
19. Masės $m_1 = 8$ kg ir spindulio $r = 5$ cm vienalytis ritinys ritasi neslysdamas nuožulnia plokštuma ir yra surištas lengvu siūlu su ta pačia plokštuma šliaužiančiu masės $m_2 = 4$ kg tašeliu, kaip parodyta 72 pav. Tašelio trinties su plokštuma koeficientas $\mu = 0,2$, o plokštumos polinkio kampas $\alpha = 30^\circ$. Raskite sistemos pagreitį (II tarptautinė olimpiada Budapešte 1968 m.). (Ats.: $a \approx 3,26$ m / s². Duomuo $r = 5$ cm nereikalingas)

20. Trys materialieji taškai P_1, P_2 ir P_3 , negulintys vienoje tiesėje ir turintys mases m_1, m_2 ir m_3 , sąveikauja tik tarpusavyje ir tik gravitacinėmis jėgomis.

Kokias sąlygas turi patenkinti atstumai tarp taškų ($P_1P_2 = a_{12}, P_2P_3 = a_{23}$ ir $P_1P_3 = a_{13}$) ir tų taškų sistemos sukimosi apie ašį σ , einančią per jų masių centrą ir atatmeną trikampio $P_1P_2P_3$ plokštumai, kampinis greitis ω , kad sistema suktųsi kaip kietasis kūmas ? (XX tarptautinė olimpiada Varšuvoje 1989m.)

Sprendimas

Sistamai sukantis kaip kietajam kūnui, vidinės jėgos darbo neatlieka. Kadangi išorinių jėgų nėra, tai sistemos kinetinė enegija $T = I \omega^2 / 2 = \text{const}$. Inercijos momentas I taip pat pastovus, todėl ir



73 pav.

Kadangi visi materialieji taškai juda apskritimais ir $\omega = \text{const.}$, tai, pavyzdžiui, tašką P_1 veikiančių jėgų atstojamoji yra įcentrinė jėga:

$$\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} = \mathbf{F}_c. \quad (3)$$

Savo ruožtu

$$\mathbf{F}_{21} = G m_1 m_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) / a_{12}^3, \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_{31} = G m_1 m_3 (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) / a_{13}^3, \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_c = - m_1 \omega^2 \mathbf{r}_1. \quad (6)$$

(4), (5) ir (6) lygibes įrašę į (3) ir sugrupavę pagal radiusus vektorius, gauname:

$$G m_1 m_2 \mathbf{r}_2 / a_{12}^3 + G m_1 m_3 \mathbf{r}_3 / a_{13}^3 + m_1 \mathbf{r}_1 (\omega^2 - G m_2 / a_{12}^3 - G m_3 / a_{13}^3) = \mathbf{0}.$$

Iš (2) lygybės galime rašyti:

$$m_2 \mathbf{r}_2 = - m_1 \mathbf{r}_1 - m_3 \mathbf{r}_3.$$

Padarę tokį pakeitimą ir vėl sugrupavę pagal radiusus vektorius, gauname:

$$m_1 \mathbf{r}_1 (\omega^2 - G m_2 / a_{12}^3 - G m_3 / a_{13}^3 - G m_1 / a_{12}^3) + \mathbf{r}_3 (1 / a_{13}^3 - 1 / a_{12}^3) G m_1 m_3 = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Vektoriai \mathbf{r}_1 ir \mathbf{r}_3 neguli vienoje tiesėje, todėl (7) lygybė reikštų, kad dviejų nelygiagrečių vektorių suma lygi nuliui. Kadangi tai negalima, jeigu tie vektoriai nelygūs nuliui, tai (7) lygybėje koeficientai prie radiusų vektorių turi būti lygūs nuliui:

$$m_1 (\omega^2 - G m_2 / a_{12}^3 - G m_3 / a_{13}^3 - G m_1 / a_{12}^3) = 0,$$

$$(1 / a_{13}^3 - 1 / a_{12}^3) G m_1 m_3 = 0.$$

Iš šių lygybių toliau seka, kad

$$a_{13} = a_{12} = a$$

ir

$$\omega^2 = G (m_1 + m_2 + m_3) / a^3.$$

Pažymėję sistemos masę raide $M = m_1 + m_2 + m_3$, gauname:

$$\omega = \sqrt{ G M / a^3 }. \quad (8)$$

Galima dar parodyti (tai parodykite patys), kad

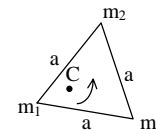
$$a_{23} = a_{12} = a.$$

Taigi galutinai:

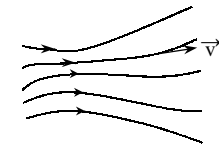
$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a. \quad (9)$$

Trikampis $P_1 P_2 P_3$ turi būti lygiakraštis (74 pav.) (esant bet kokioms masėms m_1, m_2 ir m_3).

Uždavinio atsakymai yra (9) ir (8) lygybės. Juos galima gauti ir kitais būdais.



74 pav.



75 pav.

II. Hidrodinamika

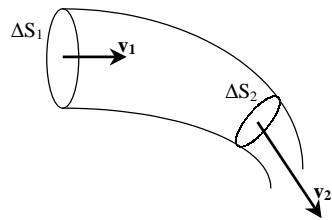
2.1 Hidrodinamika. Tolydumo lygtis.

Ankstesnėse mechanikos kurso dalyse mes nagrinėjome vienu kūnų judėjimą kitų kūnų atžvilgiu arba kieto kūno sukimąsi aplink tam tikrą ašį arba tašką. Tačiau yra ir kitoks judėjimas, kai to paties kūno atskiros dalys juda atžvilgiu viena kitos. Jeigu kūnas yra tolydinis ir labai didelis, tai jį vadina ištisine aplinka. Jos pavyzdys gali būti skystis, pagaliau ir spūdis skystis arba dujos. Juose gali atsirasti srovės arba svyravimai. Mechanikos dalis, tirianti skysčio judesį, vadinama hidrodinamika.

Dažnai, nagrinėjant skysčio judesį, jį galime laikyti nespūdziu ir tarti, kad vieniems sluoksniams judant kitų sluoksnių atžvilgiu, neatsiranda trinties jėgos (nėra vidinės trinties arba klampumo).

Toks absoliučiai nespūdis ir absoliučiai neklampus skystis yra vadinamas idealiu skysčiu. Tai supaprastintas realių skysčių modelis.

Jeigu skysčio judėjimą nagrinėsime kokios nors koordinatų sistemos atžvilgiu, tai kiekvieną skysčio tašką galėsime apibūdinti greičio vektoriumi. Visas skystis sudarys greičio vektorių lauką. Greičio vektorių lauke išvedę linijas, kurių liečiamosios yra skysčio dalelių greičio vektoriai, gausime taip vadinamas srovės linijas (75 pav.). Srovės linijos paprastai brėžiamos taip, kad ten, kur skysčio tekėjimo greitis didesnis, linijos yra tankesnės, o kur skystis teka lėčiau – linijos retesnės. Jeigu skysčio greitis kiekviename taške laiko atžvilgiu pasilieka pastovus, tai toks skysčio tekėjimas vadinamas nusistovėjusiu (stacionariu) tekėjimu. Tokiu atveju srovės linijos taip pat lieka nepakitusios ir sutampa su atskirų skysčio dalelių trajektorijomis. Skysčio dalis, kurią riboja srovės linijų pluoštelis, yra vadinama srovės vamzdeliu. Visos dalelės, esančios kokiam nors vamzdelio pjūvyje, visą laiką juda srovės vamzdelio viduje ir neišeina iš jo. Taip pat iš išorės jokios dalelės nepakliūna vamzdelio vidun.



76 pav.

Panagrinėkime srovės vamzdelį (76 pav.). Pasirinkime bet kuriuos du statmenus (vamzdeliui) skerspjūvius ΔS_1 ir ΔS_2 . Pro skerspjūvį ΔS_1 per laiko vienetą pratekės skysčio kiekis $\Delta S_1 \cdot v_1$, kur v_1 yra skysčio tekėjimo greitis toje vietoje, kur yra skerspjūvis ΔS_1 . Pro pjūvį ΔS_2 per laiko vienetą pratekėjusio skysčio kiekis bus $\Delta S_2 \cdot v_2$, kur v_2 skysčio greitis skerspjūvio ΔS_2 vietoje. Jeigu skystis idealus, tai per laiko vienetą pro bet

kurį skerspjūvį turi pratekėti tas pats skysčio kiekis. Todėl

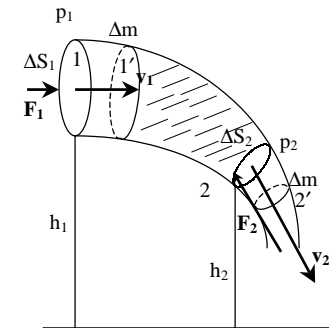
$$\Delta S_1 \cdot v_1 = \Delta S_2 \cdot v_2 = \text{const.}, \quad (1)$$

t. y., idealaus skysčio atveju skysčio tekėjimo greičio ir srovės vamzdelio skerspjūvio sandauga duotam vamzdeliui yra pastovus dydis. Šis sąryšis vadinamas srovės tolydumo lygtimi.

Srovės vamzdelio savybės apytiksliai tinka ir skysčiui, tekančiam realių vamzdeliu. Platesnėse vietose tekėjimo greitis bus mažesnis, negu siauresnėse vietose.

2.2 Bernolio lygtis. Lėktuvo sparno keliamoji jėga.

Panagrinėkime vamzdelį, kuris tekėjimo kryptimi siaurėja (77 pav.). Patekdamas į siauresniąją srovės dalį, skystis pradeda greičiau tekėti, t. y., jis įgyja pagreitį. Taigi iš platesnės vamzdelio pusės skystį veikia greitinančioji jėga. Tokia jėga gali atsirasti tik dėl slėgių skirtumo įvairiose vamzdelio vietose. Veikiančios jėgos kryptis sutaps su greičio pokyčio kryptimi, t. y., bus nukreipta iš platesnės vamzdelio dalies į siauresnę. Taigi platesnėje dalyje slėgis p_1 turi būti didesnis negu siauresnėje p_2 .



77 pav.

Priminsime, kad slėgiu p vadiname jėgos F , veikiančios statmenai į tam tikrą plotą ΔS , ir to ploto santykį:

$$p = F / \Delta S. \quad (1)$$

Mintyse išskirkime idealaus skysčio srovės vamzdelyje dalį, esančią tarp skerspjūvių 1 ir 2 (77 pav.) ir panagrinėkime tos dalies kinetinės energijos T pokytį per mažą laiko tarpą Δt :

$$\Delta T = \Delta A_1 + \Delta A_2. \quad (2)$$

Čia ΔA_1 – sunkio jėgos atliktas darbas, ΔA_2 – slėgio jėgų F_1 ir F_2 atliktas darbas. Išskirtosios skysčio dalies skerspjūvis 1 per minėtą laiko tarpą pasislinko dydžiu $v_1 \Delta t$ iki padėties 1', o skerspjūvis 2 pasislinko dydžiu $v_2 \Delta t$ iki padėties 2'. Tačiau tarp skerspjūvių 1' ir 2 (brėžinyje ta vamzdelio dalį pabrūkšniuota) niekas, taigi ir tos dalies energija, nepasikeitė. Procesas yra toks, lyg skysčio masė Δm , esanti tarp skerspjūvių 1' ir 1, nuo 1

skerspjūvio persikėlė į vietą tarp skerspjūvių 2 ir 2', o pabrūkšniuota dalis nepajudėjo. Todėl:

$$\Delta A_1 = \Delta m g h_1 - \Delta m g h_2. \quad (3)$$

Darbas

$$\Delta A_2 = F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t.$$

Kadangi $\Delta S_1 v_1 \Delta t = \Delta S_2 v_2 \Delta t = \Delta m / \rho$, kur ρ - skysčio tankis, tai

$$\Delta A_2 = p_1 \Delta m / \rho - p_2 \Delta m / \rho = (p_1 - p_2) \Delta m / \rho. \quad (4)$$

Savo ruožtu, kinetinės energijos pokytis

$$\Delta T = \Delta m v_2^2 / 2 - \Delta m v_1^2 / 2. \quad (5)$$

Lygybes (5), (3) ir (4) įrašę į (2), turime:

$$\Delta m v_2^2 / 2 - \Delta m v_1^2 / 2 = \Delta m g h_1 - \Delta m g h_2 + (p_1 - p_2) \Delta m / \rho.$$

Suprastinę ir sugrupavę gauname:

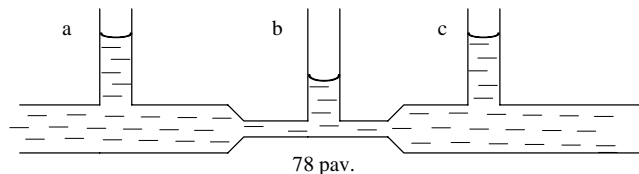
$$\rho v_1^2 / 2 + \rho g h_1 + p_1 = \rho v_2^2 / 2 + \rho g h_2 + p_2. \quad (6)$$

Kadangi pjūviai 1 ir 2 buvo pasirinkti visiškai laisvai, tai (6) lygtį galime taip parašyti:

$$\rho v^2 / 2 + \rho g h + p = \text{const}. \quad (7)$$

“const.” čia reiškia tą pačią reikšmę visiems pjūviams. (6) arba (7) lygtis yra vadinama ją išvedusio garsaus fiziko ir matematiko D. Bernulio lygtimi. Tai pagrindinė hidrodinamikos lygtis. Danilas Bernulis (Bernoulli) dirbo Bazelyje (Šveicarijoje) ir S. Peterburge, gyveno 1700 – 1782 m.

Visi trys (7) lygties nariai turi slėgio dimensiją. Narys $\rho v^2 / 2$ yra vadinamas dinaminiu slėgiu, narys p yra statinis slėgis.



78 pav.

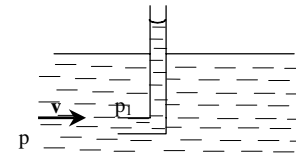
Horizontaliam vamzdeliui $h_1 = h_2$, ir (6) lygtis atrodoys taip:

$$\rho v_1^2 / 2 + p_1 = \rho v_2^2 / 2 + p_2 = \text{const}. \quad (8)$$

$\rho v^2 / 2 + p$ yra pilnutinis slėgis.

Pagal srovės tolydumo lygtį platesnėje vamzdelio dalyje skysčio greitis yra mažesnis, negu siauresnėje, tai statinis slėgis platesnėje dalyje yra didesnis, negu siauresnėje. Tą reiškinį galime pademonstruoti, pastačius išilgai vamzdelio eilę monometrinių vamzdelių a, b, c (78 pav.). Skysčio lygio aukštis tuose vamzdeliuose rodo statinį slėgį p .

Į skysčio srovę įstaciūs nejudamą monometrinį vamzdelį, kurio atviras apatinis galas užlenktas prieš srovę (79 pav., “Pito vamzdelis”), galima išmatuoti srovės greitį v .



Skysčio greitis v prieš pat vamzdelio galą bus lygus nuliui. Pasinaudoję (8) lygtimi galime rašyti:

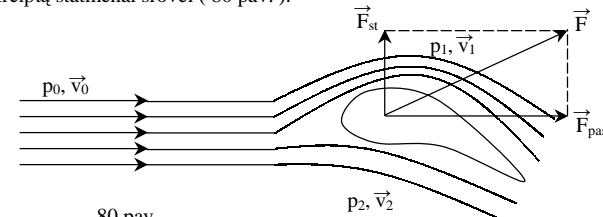
$$p_1 = \rho v^2 / 2 + p.$$

79 pav.

Monometrinis vamzdelis parodys slėgį p_1 . Žinant p , rasime srovės greitį v .

Pasinaudodami Bernulio lygtimi, išveskime lėktuvo sparno keliamosios jėgos formulę, kai sparną apteka besūkurinė idealaus skysčio srovė.

Kai skystis apteka asimetrinį kūną, atstojamoji jėga F , kuria skystis veikia kūną, nesutampa su srovės kryptimi. Šiuo atveju ją galima išskaidyti į dvi dedamąsias: priekinio pasipriešinimo jėgą $F_{pas.}$, nukreiptą išilgai srovės, ir keliamąją jėgą $F_{st.}$, nukreiptą statmenai srovei (80 pav.).



80 pav.

Pažymėkime skysčio slėgį toli nuo sparno p_0 , o srovės greitį v_0 . Atitinkamus dydžius virš sparno ir po sparnu – p_1, v_1 ir p_2, v_2 . Pagal (8) lygtį galime rašyti:

$$\rho v_0^2 / 2 + p_0 = \rho v_1^2 / 2 + p_1 = \rho v_2^2 / 2 + p_2. \quad (9)$$

Virš sparno srovės greitis didesnis negu po sparnu ($v_1 > v_2$), todėl slėgis $p_2 > p_1$.

Iš (9) lygties:

$$p_2 - p_1 = \rho v_1^2 / 2 - \rho v_2^2 / 2 = (v_1^2 - v_2^2) \rho / 2.$$

Keliamoji jėga

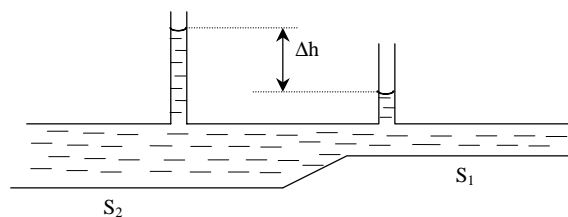
$$F_{st} = (p_2 - p_1) \Delta S = (v_1^2 - v_2^2) \rho \Delta S / 2. \quad (10)$$

Čia ΔS yra sparno projekcijos į horizontalią plokštumą plotas.

Pratybos

1. Paveikslėlyje (81 pav.) parodyta pratekėjusio vandens kiekio matavimo schema. Horizontaliu kintamo skerspjūvio vamzdžiu teka vanduo.

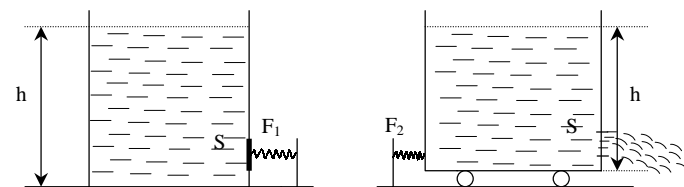
Nustatykite pratekėjusio vandens kiekį Q pagal vandens aukščių skirtumą Δh dviejuose monometriniuose vamzdeliuose, jeigu vamzdžio skersmuo prie abiejų vamzdelių yra žinomas.



81 pav.

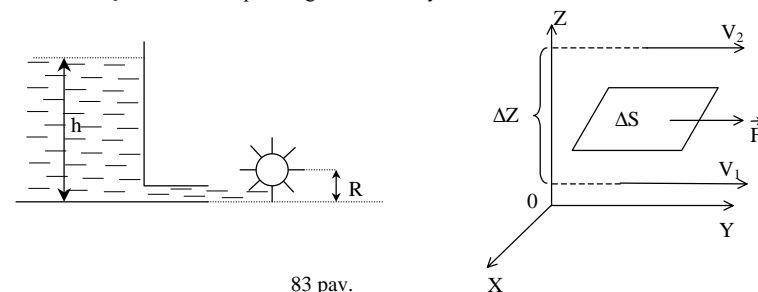
2. Inde su skysčiu yra skylutė, kurios plotas S . Vienu atveju skylutė uždaryta plokštele ir matuojama slėgio jėga F_1 į plokštele, kai skysčio aukštis inde yra h . Kitu atveju indas stovi ant vežimėlio, o skylutė yra atvira ir matuojama reakcijos jėga F_2 , kai skysčio tekėjimas yra stacionarus ir jo aukštis inde toks pats, kaip pirmu atveju.

Ar jėgos F_1 ir F_2 lygios? (82 pav.)



82 pav.

3. Nustatykite 83 pav. parodyto rato maksimalią galią ir naudingiausią sukimosi kampinį greitį, jeigu žinoma, kad vandens užtvankos aukštis $h = 5$ m, srovės skerspjūvio plotas $S = 0,06$ m², rato spindulys $R = 1,5$ m. Vandens srovė pastoviai atsimuša į rato mentes ir po smūgio krinta žemyn.



83 pav.

2.3 Klampaus skysčio judesys. Stokso pasipriešinimo dėsnis.

Realių skysčių judėjimas skiriasi nuo idealaus skysčio judėjimo. Juose vienam sluoksniui slenkant kito sluoksnio atžvilgiu atsiranda trinties jėgos.

Greičiau judantis sluoksnis veikia lėčiau judantį sluoksnį greitinančia jėga. Ir atvirkščiai: lėčiau judantis sluoksnis stabdo greičiau judantį sluoksnį. Tos jėgos vadinamos vidinės trinties jėgomis ir yra nukreiptos sluoksnių paviršių liečiamąja. Vidinės trinties jėga F_{tr} yra tiesiog proporcinga nagrinėjamo sluoksnio paviršiaus plotui ΔS ir priklauso nuo skysčių tekėjimo greičio v kitimo, einant nuo sluoksnio prie sluoksnio.

Tegul du sluoksniai (84 pav.), nutolę vienas nuo kito atstumu Δz , teka greičiais v_1 ir v_2 . Pažymėkime jų skirtumą $\Delta v = v_1 - v_2$. Atstumas Δz yra matuojamas kryptimi, statmena sluoksnių judėjimo greičiui. Dydis $\Delta v / \Delta z$, kuris rodo, kaip sparčiai

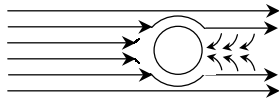
kinta greitis, einant nuo sluoksnio prie sluoksnio, vadinamas greičio gradientu. Vidinės trinties jėga yra tiesiog proporcinga greičio gradientui. Taigi galima rašyti:

$$F_{tr} = \eta \Delta S (\Delta v / \Delta z). \quad (1)$$

Dydis η vadinamas vidinės trinties koeficientu arba klampumo koeficientu, kuris priklauso nuo skysčio prigimties. Kuo didesnis klampumo koeficientas, tuo didesnės vidinės trinties jėgos jame atsiranda.

Skysčio klampumas labai priklauso nuo temperatūros. Didėjant temperatūrai, klampumas mažėja. Yra ir išimčių. P. Kapica nustatė, kad skystas helis maždaug -271°C temperatūroje pereina į ypatingą "supertakumo" būseną, kurioje jo klampumas yra lygus nuliui.

Mūsų nagrinėjamas skysčio tekėjimas vadinamas laminariniu (sluoksniniu), nes skysčio sluoksniai tartum slenka vienas kito atžvilgiu. Didėjant skysčio tekėjimo greičiui, tekėjimas nustoja būti laminarinis ir tampa betvarkiu. Atsiranda greičio dedamosios statmenos vamzdelio ašiai. Kiekviename skysčio taške greičio vektorius tada chaotiškai nukrypsta nuo savo vidutinės reikšmės. Toks judesys vadinamas turbulentiniu. Pereinant nuo laminarinio prie turbulentinio judesio vamzdžiuose arba kanaluose, žymiai padidėja pasipriešinimas.



85 pav.

Klampiam skysčiui aptekant kūnus, tėkmė keičia savo pobūdį ir tampa sūkurine. Skysčio srovė, atitrukstanti nuo aptekamo kūno paviršiaus, susiskaido į atskirus sūkurius (85 pav.). Toliau nuo kūno jie palaipsniui išnyksta.

Bernulio lygtis klampiams skysčiams, griežtai kalbant, netinka, nes dėl trinties jėgų dalis mechaninės energijos virsta šiluma. Tačiau tokiems skysčiams, kurių klampumas mažas, Bernulio lygtis gana gerai patenkinama.

Judant kūnui nekalpiame (idealiame) skystyje, pasipriešinimo jėgų nėra. Pasipriešinimas atsiranda tik judant kūnui klampioje aplinkoje. To pasipriešinimo prigimtis yra dvejopa. Kai greičiai maži ir kūno forma aptaki, kai neatsiranda sūkurių, pasipriešinimo jėgą sąlygoja skysčio klampumas. Pagal Stokso nustatytąjį dėsnį pasipriešinimo jėga yra proporcinga kūno greičio pirmajam laipsniui, klampumo koeficientui ir kūno matmenims. Pasipriešinimo jėga klampiam skystyje judančiam rutuliui pagal Stokso dėsnį išreiškiama taip:

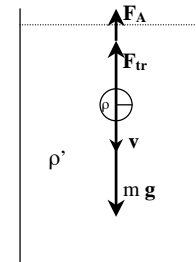
$$F_{tr} = 6 \pi \eta r v, \quad (2)$$

kur η - skysčio klampumo koeficientas, r - rutulio spindulys ir v - jo greitis.

Stokso dėsnis arba formulė tinka ne tik skystyje krintantiems rutuliams, bet ir tada, kai maži rutuliukai krinta dujinėje aplinkoje, pvz., kai smulkūs rūko lašeliai krinta ore. Kai kūnų greičiai maži, sūkuriai nesusidaro, ir pasipriešinimo jėgos yra nedidelės. Didėjant greičiui, pradeda susidaryti sūkuriai, ir pasipriešinimo jėga, kaip minėjome, žymiai padidėja. Statant laivus, gaminant automobilius ir lėktuvus, labai svarbu surasti jiems tokią formą (aptakią), kad sūkuriai beveik nesusidarytų. Sūkuriams susidarant, kai greičiai nelabai dideli, pasipriešinimo jėga yra proporcinga greičio kvadratui. Apie tai jau kalbėjome taško dinamikos skyriuje. Kai kūnų greičiai yra artimi garso greičiui, pasipriešinimo jėga proporcinga greičio kubui, o kai greičiai didesni už garso greitį, ji vėl proporcinga greičio kvadratui.

Pratybos

1. Raskite spindulio r ir tankio ρ rutulio, krintančio η klampumo ir tankio ρ' skystyje, nusistovėjusį greitį v .



86 pav.

Sprendimas

Nusistovėjus greičiui:

$$m g = F_A + F_{tr}.$$

Čia Archimedo jėga $F_A = 4 \pi r^3 \rho' g / 3$,
Stokso pasipriešinimo jėga $F_{tr} = 6 \pi \eta r v$, kūno masė $m = 4 \pi r^3 \rho / 3$.

Irašę tas reikšmes į pirmąją lygtį, gauname:

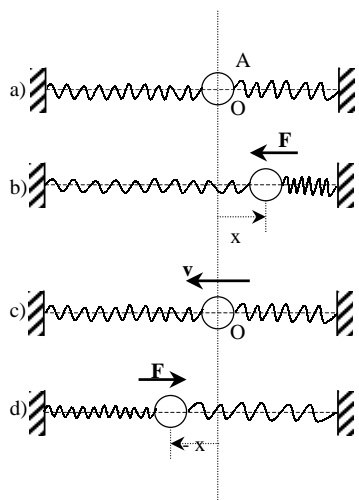
$$v = 2 g r^2 (\rho - \rho') / 9 \eta.$$

Matome, kad nusistovėjęs laminariniame skystyje krintančio rutulio greitis proporcingas rutulio spindulio kvadratui.

III. Svyravimai

3.1 Laisvi harmoniniai materialaus taško svyravimai. Dažnis, periodas. Pavyzdžiai.

Esant tamprims deformacijoms, patenkinančioms Huko dėsnį, atsiranda tamprumo jėga, nukreipta į pusiausvyros padėtį ir proporcinga deformacijai. Apie tą jėgą jau esame kalbėję. Panagrinėkime smulkiau kūno judėjimą veikiant tokiai jėgai.



87 pav.

Tegul kūnas A yra pritvirtintas prie dviejų spyruoklių, kurio pusiausvyros padėtis yra taške O (87 pav.a). Išveskime kūną iš pusiausvyros padėties į dešinę atkarpą $+x$ (87 pav.b). Tuomet dešinioji spyruoklė bus suspausta, kairioji – ištempta ir kūną veiks jėga F , nukreipta į pusiausvyros padėtį O, proporcinga poslinkiui x . Veikiant šiai jėgai, kūnas A didėjančiu greičiu ims judėti į pusiausvyros padėtyje (87 pav.c) tamprumo jėga pasidarys lygi nuliui, tačiau kūnas turės greitį v ir dėl to pereis pusiausvyros padėtį ir judės į kairę. Tuomet kairioji spyruoklė susispaus, dešinioji išsitemps, ir kūną ims veikti tamprumo jėga F , nukreipta dešinėn į pusiausvyros padėtį (87 pav.d). Ši jėga stabdys kūną, kol jis sustos. Po to kūnas pradės judėti atgal į pusiausvyros padėtį. Tuo būdu gaunamas kūno A svyravimas apie pusiausvyros padėtį. Panagrinėkime smulkiau svyravimo procesą.

Tiesiaiegis materialaus taško judėjimas, veikiant jį tamprumo jėgai, vadinamas laisvu taško svyravimu.

Pagal II Niutono dėsnį galime rašyti:

$$m a_x = F_x. \quad (1)$$

Kadangi $a_x = dv_x / dt$, $v_x = dx / dt$, t. y., $a_x = d^2x / dt^2$, o $F_x = -kx$, tai turime:

$$m d^2x / dt^2 = -kx. \quad (2)$$

Padaliję abi puses iš masės m ir pažymėję $\omega^2 = k / m$, (3) gausime:

$$d^2x / dt^2 + \omega^2 x = 0. \quad (4)$$

Išsprendę (4) lygtį, gausime funkciją $x = f(t)$, kuri parodys, kaip juda kūnas (materialus taškas). Lengva patikrinti, kad (4) lygtį tenkina sprendinys:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (5)$$

Čia A ir α - konstantos, kurias galima nustatyti iš pradinių sąlygų. Patikrinkime (5) lygties teisingumą. Diferencijuokime ją:

$$dx / dt = v_x = -A \omega \sin(\omega t + \alpha), \quad (6)$$

$$d^2x / dt^2 = a_x = -A \omega^2 \cos(\omega t + \alpha). \quad (7)$$

Lygtis (7) ir (5) įrašę į (4), gausime:

$$-A \omega^2 \cos(\omega t + \alpha) + A \omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \equiv 0.$$

Taigi (5) lygtis tikrai teisinga. Dydis A vadinamas svyravimo amplitude. Iš (5) matyti, kad amplitudė $A = x_{\max}$, nes $\{\cos(\omega t + \alpha)\}_{\max} = +1$. Taigi amplitudė yra didžiausias kūno atsilenkimas nuo pusiausvyros padėties ir visada yra teigiama. Amplitudė gali reikšti ne tik ilgį, bet ir kampą. Argumentas (5) lygtyje $(\omega t + \alpha)$ vadinamas svyravimo faze, o α - pradine faze. Iš (5) lygties pradinė svyruojančio kūno koordinatė

$$x_0 = A \cos \alpha.$$

Taigi pradinė fazė α nustato pradinę svyruojančio kūno padėtį x_0 . Iš pastarosios lygybės gauname:

jeigu $x_0 = A$ (pradiniu momentu kūnas daugiausia pasislinkęs iš pusiausvyros padėties x ašies kryptimi), tai $\cos \alpha = 1$, ir pradinė fazė $\alpha = 0^0$;

jeigu $x_0 = 0$ (pradiniu momentu kūnas yra pusiausvyros padėtyje), tai $\cos \alpha = 0$, ir $\alpha = -90^0 = \pi / 2$.

Priklausomai nuo pradinės koordinatės x_0 vertės galimos kitos įvairios pradinės fazės α reikšmės.

Iš (6) lygybės pradinis kūno greitis (tiksliau jo projekcija)

$$(v_x)_0 = -A\omega \sin\alpha.$$

Jeigu pradinio laiko momentu kūnas yra pusiausvyros padėtyje (pradinė fazė $\alpha = \pi/2$), tai $(v_x)_0 = -A\omega$ ir $(v_x)_0^2 = A^2\omega^2 = A^2k/m$ (žr. dar į (3)) ir

$$A = v_0 \sqrt{m/k}. \quad (8)$$

Taigi amplitudė priklauso nuo kūno pradinio greičio pusiausvyros padėtyje arba kūno greitis pusiausvyros padėtyje priklauso nuo pradinio atlenkimo iš pusiausvyros padėties – nuo amplitudės.

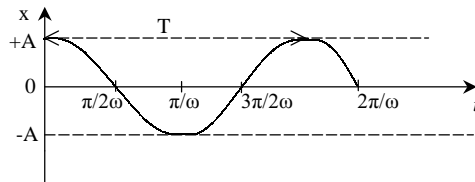
Vietoje (5) svyravimo lygties galima rašyti ir tokią lygtį:

$$x = A \sin(\omega t + \beta). \quad (9)$$

Nuo (5) ji skiriasi tuo, kad pradinė fazė β skiriasi nuo pradinės fazės α . Siūlome tą skirtumą nustatyti patiems. Taip pat patikrinkite, kad (9) sprendinys, kaip ir (5), tikrai patenkina (4) lygtį.

(5) arba (9) lygtys vadinamos harmoninio svyravimo lygtimis.

Harmoninio svyravimo pagrindinė savybė – jo periodiškumas. Panagrinėkime (5) arba (9) lygtimis aprašomą judėjimą.



88 pav.

Tegul pradinio laiko momentu $t = t_0 = 0$ kūno atsilenkimas $x_0 = A$ (88 pav.). Tuomet, kaip matėme, pradinė fazė $\alpha = 0^0$, ir (5) lygtis turės pavidalą:

$$x = A \cos \omega t.$$

Didėjant laikui t , $\cos \omega t$ mažės, ir taškas slinks žemyn į pusiausvyros padėtį. Laiko momentu, kurį nusako sąlyga $\omega t = \pi/2$, t. y., kai $t = \pi/2\omega$, taškas atsидurs pusiausvyros padėtyje O. Laikui toliau didėjant, $\cos \omega t$ taps neigiamu, taškas pasislinks žemyn nuo pusiausvyros padėties (88 pav.). Laiko momentu $t = \pi/\omega$ $\cos \omega t$ bus lygus -1 , o $x = -A$, t. y., taškas pasieks kraštutinę apatinę padėtį. Po to jis pradės judėti į viršų, antrą kartą praeis pusiausvyros padėtį O ir laiko momentu $t = 2\pi/\omega$ vėl bus daugiausia pakilęs į

viršų. Po to judesys kartosis. Tuo būdu taškas grįžta į pradinę padėtį per laiką $2\pi/\omega$. Pažymėkime tą laiką T:

$$T = 2\pi/\omega. \quad (10)$$

Šis laikas vadinamas svyravimo periodu, t. y., laikas, per kurį įvyksta vienas pilnas svyravimas.

Dydis $\omega = 2\pi/T$ yra svyravimų skaičius per 2π laiko vienetų ir vadinamas cikliniu dažniu. Kartu su cikliniu dažniu ω vartojamas ir “paprastas” dažnis

$$v = 1/T, \quad (11)$$

reiškiantis svyravimų skaičių per laiko vienetą. Sugretinę visus tris dydžius ω , v ir T, turėsime tarp jų ryšį:

$$\omega = 2\pi v = 2\pi/T. \quad (12)$$

Iš (12) matyti, kad svyruojančio kūno ciklinis dažnis ω yra analogiškas apskritimu judančio kūno arba besisukančio kieto kūno kampiniam greičiui

$$\omega = 2\pi n,$$

kur n – apsisukimų skaičius per laiko vienetą. Svyruojančio kūno dažnis v yra analogiškas besisukančio kūno apsisukimų dažniui n . Abu jie turi tą pačią dimensiją: $1/s$. Vienodas dimensijas (rad/s) arba trumpiau (1/s) turi ir ciklinis dažnis bei kampinis greitis. Abu jie žymimi ta pačia raide ω .

Įrašę šias ω reikšmes į (5) lygtis, gausime dar du harmoninio svyravimo lygties pavidalus:

$$x = A \cos(2\pi v t + \alpha), \quad (5a)$$

$$x = A \cos(2\pi t/T + \alpha). \quad (5b)$$

Prisiminę pažymėjimą $\omega^2 = k/m$ (žr. (3)) ir sąryšį $T = 2\pi/\omega$, gausime:

$$T = 2\pi \sqrt{m/k}, \quad (13)$$

$$v = (1/2\pi) \sqrt{k/m}. \quad (14)$$

Tai dažniausia naudojamos svyravimo teorijos formulės.

Dažnai svyruojantį kūną be tamprumo jėgos dar veikia kita pastovi jėga, pavyzdžiui sunkis. Pažymėkime tą jėgą \mathbf{P} ir pažiūrėkime, kokią įtaką ji turi harmoniniams svyravimams. Vietoj (2) lygties dabar turėsime:

$$m \, d^2x / dt^2 = -kx + P. \quad (15)$$

Čia P – jėgos \mathbf{P} projekcija į x ašį.

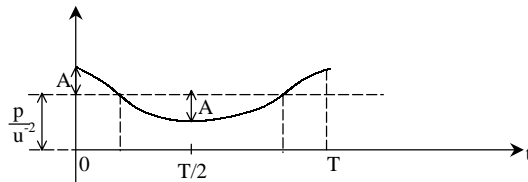
Padaliję šią lygtį iš masės m ir pažymėję: $\omega^2 = k/m$, $P/m = p$, turime:

$$d^2x / dt^2 + \omega^2 x = p.$$

Nesunku įsitikinti, kad šios lygties sprendinys yra:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) + p / \omega^2. \quad (16)$$

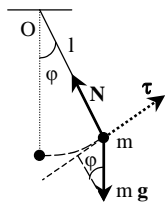
Iš gautos formulės matyti, kad pastovios jėgos veikimas tiksliai pastumia laisvuosius svyravimus dydžiu p / ω^2 . Tokius svyravimus galima pavaizduoti grafiku (kai $p > 0$ ir $p / \omega^2 > A$, 89 pav.).



89 pav.

Pratybos

1. Nustatykite matematinės svyruoklės svyravimo periodą.



90 pav.

Matematinė svyruoklė yra rutuliukas, pakabintas lengvu, lanksčiu, netašiu siūlu nejudančiame taške.

Sprendimas

Svyruoklės masę pažymėkime m , ilgį l ir atlenkime mažu kampu φ iš pusiausvyros padėties. Rutuliuką veikianti atstojamoji jėga (90 pav. ji nenubrėžta)

$$\mathbf{F} = m \mathbf{g} + \mathbf{N}.$$

Projekcija į tangentę τ

$$F_{\tau} = -m g \sin \varphi, \text{ nes } \mathbf{N} \perp \tau.$$

Tegul kampas φ tiek mažas, kad $\sin \varphi \approx \varphi$. Tada

$$F_{\tau} \approx -m g \varphi.$$

Be to,

$$F_{\tau} = m a_{\tau},$$

o iš kinematikos žinome, kad tangentinis pagreitis

$$a_{\tau} = r \, d^2\varphi / dt^2 = l \, d^2\varphi / dt^2.$$

Todėl

$$-m g \varphi = m l \, d^2\varphi / dt^2$$

arba

$$l \, d^2\varphi / dt^2 = -g \varphi.$$

Ši lygtis visai analogiška (2) lygčiai:

$$m \, d^2x / dt^2 = -kx.$$

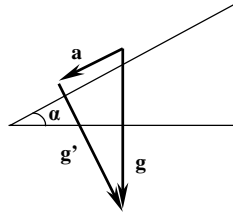
Kampas φ nuo laiko priklauso taip kaip koordinatė x , tik vietoj m ir k reikia atitinkamai rašyti l ir g . Taigi, remdamiesi (13) formule, gausime, kad matematinės svyruoklės mažų svyravimų periodas

$$T = 2 \pi \sqrt{l/g}. \quad (17)$$

Matematinės svyruoklės maži svyravimai (mažais kampais) yra harmoniški.

2. Matematinė svyruoklė įtaisyta vežimėlyje, riedančiame be trinties nuožulniaja plokštuma (kampas su horizontu lygus α). Nejudančio vežimėlio svyruoklės periodas T_0 . Koks bus riedančio vežimėlio svyruoklės periodas?

Sprendimas



91 pav.

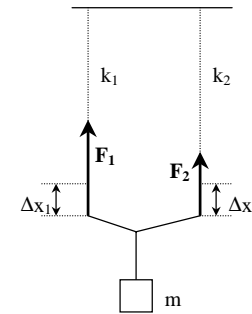
$$T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$$

o ieškomas periodas $T = 2\pi \sqrt{l/g'}$,
kur $g' = g - a$ (91 pav.), o $a = g \sin \alpha$ -
vežimėlio pagreitis. Apskaičiuavus $g' = g \cos \alpha$ ir

$$T = T_0 / \sqrt{\cos \alpha} > T_0.$$

3. Į ritinio formos susisiekiančius indus įpilta gyvsidabrio. Kiekvieno indo skerspjūvio plotas $S = 0,3 \text{ cm}^2$, o gyvsidabrio masė $m = 484 \text{ g}$. Raskite gyvsidabrio svyravimo periodą. Į trintį nekreipkite dėmesio.
(Ats.: Viename inde pakilus gyvsidabrio lygiui virš pusiausvyros padėties dydžiu x , į pusiausvyros padėtį skystį grąžinanti jėga $F = -2\rho g S x$. $T = 1,54 \text{ s}$.)
4. Įrodykite, kad (9) funkcija patenkina (4) lygtį bei raskite ryšį tarp (9) pradinės fazės β ir (5) funkcijos pradinės fazės α .
5. Nubrėžkite 89 brėžinį kūnui, kuris svyruoja prikabintas prie spyruoklės, kai $p/\omega^2 < A$.
6. Prie spyruoklės pakabintas krovinėlis, kurio masė daug kartų didesnė už spyruoklės masę. Pakabinus krovinėlį, spyruoklė pailgėjo $\Delta x = 4 \text{ cm}$. Kokiu dažniu ν svyruos krovinėlis, kai jį atlenksime vertikalia kryptimi iš pusiausvyros padėties ir paleisime? Kam šiuo atveju bus lygus praeitame uždavinyje nagrinėtas dydis p/ω^2 ? Nuo ko priklausys, ar p/ω^2 bus mažesnis už amplitudę A , ar p/ω^2 bus didesnis už A ?
(Ats.: $\nu \approx 2,49 \text{ s}^{-1}$, $p/\omega^2 = \Delta x$.)

3.2. Spyruoklių jungimas



92 pav.

Tegul prie dviejų lygiagrečiai sujungtų spyruoklių prikabintas m masės kūnas (92 pav.). Spyruoklių standumai k_1 ir k_2 , o deformacijos Δx_1 ir Δx_2 . Jėgos, kuriomis spyruoklės veikia kūną:

$$F_1 = k_1 \Delta x_1, F_2 = k_2 \Delta x_2.$$

Jėga, kuria abi spyruoklės veikia kūną,

$$F = F_1 + F_2.$$

Atstojamąjį abiejų spyruoklių standumą pažymėkime k , jų deformaciją Δx . Tada

$$F = k \Delta x.$$

Kadangi $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$, tai galime rašyti:

$$k_1 \Delta x + k_2 \Delta x = k \Delta x.$$

Iš čia gauname:

$$k = k_1 + k_2. \quad (1)$$

Esant didesniam lygiagrečiai sujungtų spyruoklių skaičiui:

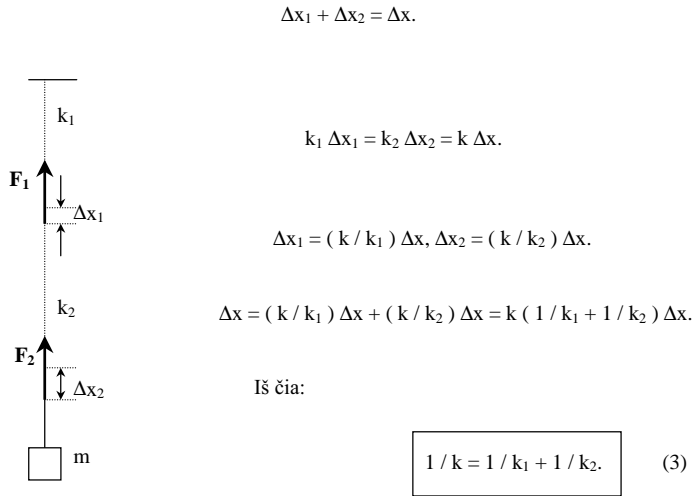
$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n. \quad (2)$$

Lygiagrečiai sujungtų spyruoklių standumas skiačiuojamas kaip nuosekliai sujungtų rezistorių varža.

Tegul dvi spyruoklės sujungtos nuosekliai (93 pav.). Pačių spyruoklių masių, kaip ir lygiagretaus jungimo atveju, nepaisome (spyruoklės pakankamai lengvos). Tada spyruoklių įtempimas visur vienodas.

$$F_1 = k_1 \Delta x_1, F_2 = k_2 \Delta x_2.$$

Šį kartą



93 pav.

Esant didesniam nuosekliai sujungtų spyruoklių skaičiui,

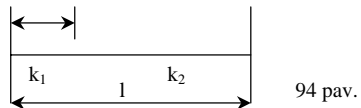
$$1 / k = 1 / k_1 + 1 / k_2 + \dots + 1 / k_n \quad (4)$$

Nuosekliai sujungtų spyruoklių standumas skaičiuojamas kaip lygiagrečiai sujungtų rezistorių varža.

Pratybos

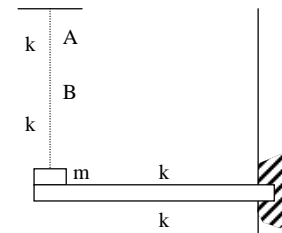
1. Spyruoklė, kurios ilgis l ir standumas k , įtvirtinta tarp dviejų atramų (94 pav.). Kaip priklauso prie spyruoklės pritvirtinto rutuliuko horizontalių svyravimų periodas T nuo atstumo a iki atramos? Į sunkio jėgą nekreipkite dėmesio.

Sprendimas



Pažymėkime atskirų spyruoklės dalių standumus k_1 ir k_2 . $k_1 = k l / a$, $k_2 = k l / (l - a)$. Atstojamasis standumas $K = k_1 + k_2 = k l^2 / a (l - a)$. $T = 2 \pi (m / K)^{1/2}$. Nesunku gauti, kad $T_{\max} = T_0 / 2$ (kai $a = l / 2$). Galima $T = f(a)$ pavaizduoti ir grafiškai.

2. Nustatykite 87 pav. pavaizduoto m masės kūno svyravimo periodą, jeigu vienos spyruoklės standumas k_1 , o kitos – k_2 . (Ats.: $T = 2 \pi (m / (k_1 + k_2))^{1/2}$).
3. Kūnas m svyruoja periodu $T_0 = 0,3$ s, privirtintas prie dviejų spyruoklių ir dviejų suglaustų plokštelių, kaip parodyta 95 pav.



95 pav.

Abiejų plokštelių ir spyruoklių tamprumai vienodi. Kokiu periodu T_1 svyruos tas kūnas, jeigu apatinė plokštelė nulūš ir nukris?

Sprendimas

Pradinis atstojamasis standumas:

$$k_0 = 2 k + k / 2 = 5 k / 2.$$

Atstojamasis standumas, nulūžus plokštei:

$$k_1 = k + k / 2 = 3 k / 2.$$

Santykis

$$T_1 / T_0 = 2 \pi (m / k_1)^{1/2} / 2 \pi (m / k_0)^{1/2} = (k_0 / k_1)^{1/2} = (5 / 3)^{1/2}.$$

$$T_1 = T_0 (5 / 3)^{1/2} = 1,29 T_0 \approx 0,39 \text{ s.}$$

3.3 Fizinė spyruoklė

Fizinė spyruoklė yra bet kokios formos kietasis kūnas, svyruojantis apie nejudamą ašį (96 pav.). Tegul ta ašis O yra horizontali, atstumas nuo sukimosi ašies iki masių centro C

lygus 1, apie ašį O kūnas sukiojasi laisvai – be trinties. Mūsų kūnui tinka pagrindinė sukamojo judėjimo dinamikos lygtis (žr. 1.8 paragrafą):

$$I d\omega_z / dt = M_z.$$

Tarkime, kūnas sukasi iš pusiausvyros padėties kampo φ didėjimo kryptimi. Tuomet kampinis greitis ω bus nukreiptas į skaitytį. Ta kryptimi nukreipime z ašį. Tada $\omega_z = \omega$, o sunkio jėgos \mathbf{P} momentas $\mathbf{M} = [\mathbf{l} \mathbf{p}]$ bus nukreiptas nuo skaitytį, ir jo projekcija $M_z = -M = -Pl \sin \varphi$. Gauname:

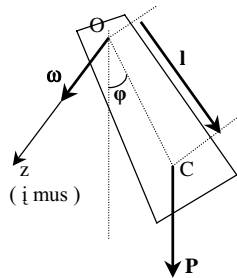
$$I d\omega / dt = -Pl \sin \varphi.$$

Kaip ir matematinės svyruoklės atveju, apsiribokime taip mažais kampais φ , kad būtų $\sin \varphi \approx \varphi$. Kadangi $\omega = d\varphi / dt$, tai:

$$I d^2\varphi / dt^2 = -Pl \varphi. \quad (1)$$

Ši lygtis visai analogiška 3.1 paragrafe gautai matematinės svyruoklės judėjimo lygčiai:

$$I d^2\varphi / dt^2 = -g \varphi.$$



96 pav.

Lygindami šias dvi lygtis, matome, kad fizinės svyruoklės maži svyravimai yra harmoniniai. Jų periodą rasime, į matematinės svyruoklės periodo formulę $T = 2\pi (I/g)^{1/2}$ (3.1 paragrafo (17)) vietoje l įrašę inercijos momentą ašies O atžvilgiu I, o vietoje g įrašę p l. Taigi fizinės svyruoklės mažų svyravimų periodas

$$T = 2\pi \sqrt{I/P l} = 2\pi \sqrt{I/m g l}. \quad (2)$$

Atlenkiant fizinę ar matematinę svyruoklę nuo pusiausvyros padėties dideliais kampais, jų svyravimo periodai būna didesni, negu rodo gautos formulės. Skaičiuojant 1 % tikslumu, kampas φ turi būti ne didesnis už 20° .

Fizinės svyruoklės ciklinį dažnį ω ir dažnį ν gauname, kaip ir kitoms svyruoklėms:

$$\omega = 2\pi \nu = 2\pi / T = \sqrt{m g l / I}.$$

Dydis $L = I / m l$ (3) vadinamas redukuotuoju fizinės svyruoklės ilgiu. Jis nepriklauso nuo kūno msaės, o priklauso nuo kūno formos ir masės pasiskirstymo.

Įvedus redukuotąjį ilgį, fizinės svyruoklės periodas

$$T = 2\pi \sqrt{L/g} \quad (4)$$

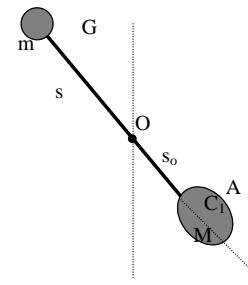
skaičiuojamas kaip L ilgio matematinės svyruoklės periodas.

Kai sistemą sudaro ne vienas svyruojantis kietasis kūnas, o didesnis jų skaičius (kai kurie kūnai gali svyruoti slenkamuoju judėjimu), naudojant (2) lygtį, negalima rasti periodo T. Tada galima remtis teorema apie sistemos kinetinės energijos kitimą (žr. 1.7 paragrafą). Teorinėje mechanikoje naudojami ir kiti metodai, pvz., Lagranžo lygtys, tačiau tai neįeina į mūsų programą.

Pratybos

1. Gaukite matematinės svyruoklės periodo formulę, remdamiesi pagrindine sukamojo judėjimo dinamikos lygtimi.

2.

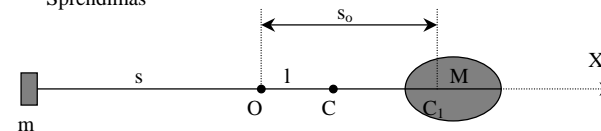


97 pav.

Suraskite metronomo mažų svyravimų periodą T. Metronomas yra M masės svyruoklė A ir nedidelis kietai sujungtas m masės kūnas G. Keičiant kūno G atstumą nuo svyravimo ašies O, galima pagal reikalą keisti metronomo inercijos momentą tos ašies atžvilgiu ir svyravimo periodą.

Tegul svyruoklės A masių centro C_1 atstumas nuo svyravimo ašies O yra s_0 , inercijos momentas tos ašies atžvilgiu I_0 , o kūno G atstumas iki svyravimo ašies yra s (97 pav.).

Sprendimas



98 pav.

Metronomo masių centro C atstumas nuo svyravimo ašies O (98 pav.)

$$OC = X_C = l = (M s_0 - m s) / (M + m),$$

o inercijos momentas ašies O atžvilgiu

$$I = I_0 + m s^2.$$

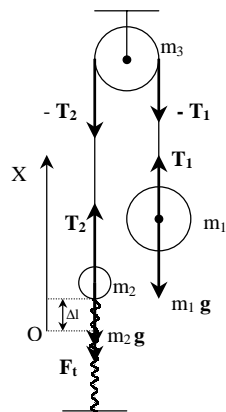
Ieškomas svyravimų periodas

$$T = 2 \pi \sqrt{ I / g l (m + M) } = 2 \pi \sqrt{ (I_0 + m s^2) (m + M) / g (m + M) (M s_0 - m s) }.$$

$$T = 2 \pi \sqrt{ (I_0 + m s^2) / g (M s_0 - m s) }.$$

$M s_0 > m s$.

3. Paveiksle (99 pav.) parodytai sistemai esant pusiausvyroje, lengva spyruoklė P išsitempusi ilgiu $\Delta l = 7$ cm, palyginus su nedeformuota spyruokle.



99 pav.

Skridinys m_3 yra vienalytis diskas. Skridinio ir krovinų masės $m_3 = 100$ g, $m_1 = 300$ g, $m_2 = 100$ g. Krovinį m_1 arba m_2 patempus žemyn ir paleidus, sistema pradeda svyruoti. Suraskite svyravimo periodą T . Trinties nepaisykite. Siūlas netąsus, lengvas ir skridiniu m_3 neslysta.

Sprendimas

Tame pat 99 pav. pažymėjome daugumą sistemoje veikiančių jėgų. Sistemai esant pusiausvyroje, spyruoklės tamprumo jėga $F_t = k \Delta l = (m_1 - m_2) g$. Iš čia randame spyruoklės standumą

$$k = (m_1 - m_2) g / \Delta l.$$

Tačiau to dar neužtenka, nes kroviniai m_1 ir m_2 juda slenkamuju, o skridinys m_3 – sukamuju judėjimu. Dėl tos pačios priežasties negalime remtis ir fizinės spyruoklės periodo formule.

Pasiremkiame teorema apie sistemos kinetinės energijos kitimą (žr. I skyrių – Kietojo kūno dinamika):

$$dT_k = dA.$$

Kad nepainiotume su periodu T , prie kinetinės energijos simbolio T pridėjome indeksą k . Mūsų atveju sistemos kinetinė energija

$$T_k = m_1 v^2 / 2 + m_2 v^2 / 2 + I \omega^2 / 2.$$

Disko inercijos momentas $I = m_3 r^2 / 2$, $\omega = v / r$, todėl $T_k = (m_1 + m_2 + m_3 / 2) v^2 / 2$ ir

$$dT_k = (m_1 + m_2 + m_3 / 2) v dv.$$

Patemkime iš pusiausvyros padėties žemyn krovinį m_2 dėl aiškinimo paprastumo dydžiu $\Delta l_1 < \Delta l = 7$ cm ir paleiskime. Tada spyruoklė dar bus įtempta, tamprumo jėga F_t nukreipta žemyn, ir jos didumas $F_t = k x$, kur x – spyruoklės deformacija (pailgėjimas). Paleidus krovinys m_2 kils aukštyn. Elementarusis sistemą veikiančių išorinių jėgų darbas (vidinių siūlo įtempimo jėgų $T_1, -T_1, T_2$ ir $-T_2$ darbų suma lygi nuliui)

$$dA = \{ (m_1 - m_2) g - k x \} dx$$

arba

$$dA = \{ (m_1 - m_2) g - k x \} v dt.$$

Palyginę atliktą darbą ir kinetinės energijos pokytį, rašome:

$$(m_1 + m_2 + m_3 / 2) v dv = \{ (m_1 - m_2) g - k x \} v dt.$$

Suprastinę iš v ir atsižvelgę į tai, kad $dv / dt = d^2 x / dt^2$, gauname:

$$(m_1 + m_2 + m_3 / 2) d^2 x / dt^2 = - k x + (m_1 - m_2) g.$$

Tai 3.1 paragrafo (15) tipo lygtis.

Pažymėkime:

$$\omega^2 = k / (m_1 + m_2 + m_3 / 2),$$

$$p = (m_1 - m_2) g / (m_1 + m_2 + m_3 / 2).$$

Tada turime:

$$d^2 x / dt^2 + \omega^2 x = p.$$

Šios lygties sprendinys yra 3.1 paragrafo (16) lygtis. Sistemos svyravimai yra harmoniniai. Ieškoma periodą randame iš ω^2 išraiškos:

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi [(m_1 + m_2 + m_3) / k]^{1/2}.$$

Irašę anksčiau rastą standumo koeficiento k išraišką, gauname

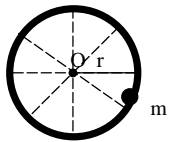
$$T = 2\pi [(m_1 + m_2 + m_3) / 2] \Delta l / (m_1 - m_2) g]^{1/2}. \quad (m_1 \neq m_2)$$

Apskaičiavus

$$T \approx 0,8 \text{ s.}$$

Jeigu $m_1 = m_2$, negalioja k algebrinė išraiška. Tada reiktų atskirai duoti k reišmę.

4. Sunkus plonas lankas su lengvais stipiniais yra vertikaloje plokštumoje ir gali suklotis apie per centrą O einančią horizontalią ašį. Lanke vienoje vietoje įtvirtintas rutuliukas, kurio masė tokia, kaip lanko (100 pav.).



100 pav.

Koks bus lanko svyravimo apie centrinę ašį O periodas T ? Kaip jis pasikeis, jeigu: a) lanką pernešime į Mėnulį, b) panardinsime į neklampų skystį? Uždavinį išspręskite 3 būdais:

1. "Paprastu" būdu – panašiai, kaip 3.1 paragrafe nagrinėjome matematinę svyruoklę.
2. Remiantis fizinės svyruoklės teorija.
3. Remiantis teorema apie sistemos kinetinės energijos kitimą.

3.4 Harmoniškai svyruojančio kūno energija

Jau matėme (žr. 3.1 paragrafą), kad harmoniškai svyruojančio kūno koordinatė

$$x = A \cos (\omega t + \alpha),$$

greitis (tiksliau – greičio projekcija)

$$v_x = -A \omega \sin (\omega t + \alpha).$$

Be to, matėme, kad kūno pradinis greitis pusiausvyros padėtyje v_0 ir amplitudė A susieti taip:

$$A = v_0 \sqrt{m/k}.$$

Kadangi v_0 yra didžiausias svyruojančio kūno greitis, tai iš pastarosios lygybės seka, kad didžiausia kinetinė energija

$$(T_k)_{\max} = m v_0^2 / 2 = k A^2 / 2. \quad (1)$$

Iš tvermės dėsnų konspekto žinome, kad veikiant tamprumo jėgai, kūno potencinė energija $U = k x^2 / 2$. Parašykime visą mechaninę harmoniškai svyruojančio kūno energiją:

$$E = T_k + U = m v^2 / 2 + k x^2 / 2 = m A^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t + \alpha) / 2 + k A^2 \cos^2 (\omega t + \alpha) / 2.$$

Kadangi $\omega^2 = k / m$, tai

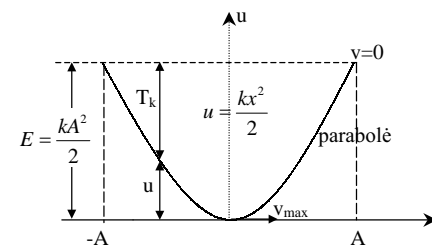
$$E = [\sin^2 (\omega t + \alpha) + \cos^2 (\omega t + \alpha)] k A^2 / 2,$$

t. y.,

$$E = k A^2 / 2 = m \omega^2 A^2 / 2 = 2 \pi^2 m v^2 A^2 = 2 \pi^2 m A^2 / T^2. \quad (2)$$

Taigi mechaninė energija nuo laiko nepriklauso. Jai tinka tvermės dėsnis.

Pratybos



101 pav.

1. Pavaizduokite harmoniškai svyruojančio kūno potencinės energijos U priklausomybę nuo kūno padėties (koordinatės) grafiškai.

Sprendimas

Grafikas pavaizduotas 101 pav. Jis vadinamas paraboline potencine duobe. $v_{\max} = A (k/m)^{1/2} = A \omega$. Energija pereina iš kinetinės į potencinę ir atvirkščiai arba "svyruoja" periodu $T = T / 2$.

3.5 Vienoje tiesėje vykstančių svyravimų sudėtis

Nereti atvejai, kai kūnas tuo pačiu metu būna dviejuose ar keliuose svyravimuose, svyruoja svyruojančioje sistemoje. Pavyzdžiui, kroviny, pakabintas spyruokle prie vagono lubų, kuris savo ruožtu svyruoja ant vagono lingių. Taigi kroviny judės judesiu, susidarančiu iš dviejų vienos krypties svyravimų.

Panagrinėkime, kas bus atstojamasis judesys, sudedant du vienu dažnių, skirtingų amplitudžių ir pradinių fazių svyravimus, vykstančius vienoje tiesėje.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Poslinkis x nuo pusiausvyros padėties nejudančioje sistemoje

$$x = x_1 + x_2. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} x &= A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A_1 (\cos \omega t \cos \alpha_1 - \sin \omega t \sin \alpha_1) + \\ &+ A_2 (\cos \omega t \cos \alpha_2 - \sin \omega t \sin \alpha_2) = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \cos \omega t - \\ &- (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \sin \omega t. \end{aligned}$$

Pažymėkime:

$$\left. \begin{aligned} A \cos \alpha &= A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2, \\ A \sin \alpha &= A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Tuomet

$$\begin{aligned} x &= A (\cos \alpha \cos \omega t - \sin \alpha \sin \omega t), \\ x &= A \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (4)$$

(4) lygtis rodo, kad atstojamasis svyravimas yra taip pat harmoninis svyravimas, vykstantis tuo pačiu cikliniu dažniu ω . Pradinę fazę ir amplitudę A galime surasti iš (3) lygčių:

$$\operatorname{tg} \alpha = (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) / (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2). \quad (5)$$

$$A^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2,$$

Atlikus veiksmus:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (6)$$

Pagal (6) formulę atstojamojo svyravimo amplitudę A priklauso nuo sudedamųjų svyravimų fazių skirtumo $(\alpha_1 - \alpha_2)$. Kadangi $\cos(\alpha_1 - \alpha_2)$ gali kisti nuo -1 iki $+1$, tai

$$A_1 + A_2 \geq A \geq |A_2 - A_1|.$$

Kai $(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\pi n$, kur $n = 0, 1, 2, \dots$, tai $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = +1$ ir

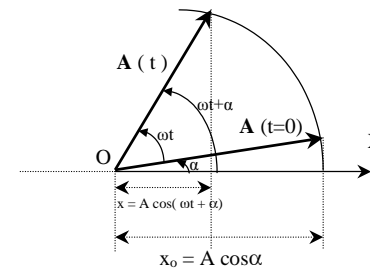
$$A = A_1 + A_2.$$

Kai $(\alpha_1 - \alpha_2) = (2n + 1)\pi$, $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = -1$ ir

$$A = |A_2 - A_1|.$$

Čia absoliutinio didumo ženklas yra dėl to, kad svyravimo amplitudę pagal apibrėžimą visada yra teigiama.

Tą patį dviejų svyravimų sudėties rezultatą galima gauti ir kitu, sakytume, geometrinio arba vektorinio būdu.



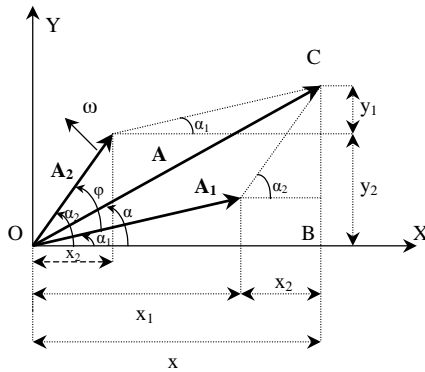
102 pav.

Paimkime vektorį \mathbf{A} , kurio didumas lygus harmoniškai svyruojančio kūno amplitudei A . Tegul tas vektorius pradiniu momentu $t = 0$ su X ašimi sudaro kampą α ir pradeda sukis apie savo pradžios tašką O pastoviu kampiniu greičiu ω . Tuomet vektoriaus \mathbf{A} projekcija į X ašį arba jo galo taško koordinatė bet kurio laiko momentu t (žr. 102 pav.)

$$x = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (7)$$

Vektorių \mathbf{A} galima vadinti amplitudės vektoriumi arba vektorine amplitude, o 102 pav. – vektorine svyravimo diagrama. Iš (7) matome, kad harmoniška svyruojančio kūno judėjimo lygtis arba koordinatė yra amplitudės vektoriaus projekcija. Čia taip pat matome minėtą skaitinę ciklinio dažnio ir kampinio greičio tapatybę.

Pateiktu vektoriniu būdu pavaizduokime jau išnagrinėtą vienoje tiesėje vykstančių svyravimų sudėtį, kai jų cikliniai dažniai vienodi, o amplitudės ir pradinės fazės skiriasi (žr. (1) formulę). Vieną svyravimą vaizduoja amplitudės vektoriaus \mathbf{A}_1 projekcija į $x - \varphi$ ašį x_1 , o kitą svyravimą toje pačioje tiesėje vaizduoja amplitudės vektoriaus \mathbf{A}_2 projekcija į $x - \varphi$ ašį x_2 . 103 pav. abu amplitudės vektoriai parodyti pradiniu laiko momentu $t = 0$, kai $\alpha_2 > \alpha_1$. Nagrinėjimo išvados tai neturės įtakos.



103 pav.

Atstojamojo svyravimo koordinatė

$$x = x_1 + x_2$$

yra atstojamojo amplitudės vektoriaus

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$$

projekcija į $x - \varphi$ ašį:

$$x = A_x.$$

Atstojamojo svyravimo amplitudė yra lygi vektoriaus \mathbf{A} didumui (moduliui) A . Žiūrėdami į vektorių \mathbf{A}_1 ir \mathbf{A}_2 sudėties lygiagretainį, iš karto rašome:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \varphi = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \quad (7)$$

nes kampas

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Lygtis (7) sutampa su anksčiau gauta (6) lygtimi, nes $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)$.

Iš to paties 103 pav. matome, kad atstojamojo svyravimo pradinės fazės α

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= BC / OB = (y_1 + y_2) / (x_1 + x_2) = \\ &= (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) / (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2). \end{aligned}$$

Tai sutampa su (5) lygtimi. Taigi kitu metodu gavome dviejų vienodų dažnių svyravimų sudėties išvadas. Dabar tuo vektoriniu metodu panagrinėkime dviejų svyravimų sudėtį, kai tų svyravimų dažniai skirtingi.

Taigi tegul vieno svyravimo ciklinis dažnis yra ω_1 , o kito toje pačioje $x - \varphi$ tiesėje vykstančio svyravimo ciklinis dažnis ω_2 . Dėl aiškinimo paprastumo tegul tų svyravimų amplitudės ir pradinės fazės yra vienodos. Tada atstojamojo svyravimo amplitudės vektorius $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, kur $A_1 = A_2$, o vektorių sudėties lygiagretainis yra rombas. 104 pav. tie vektoriai parodyti laiko momentu t , kai $\omega_2 > \omega_1$. Kampas tarp vektorių \mathbf{A}_1 ir \mathbf{A}_2

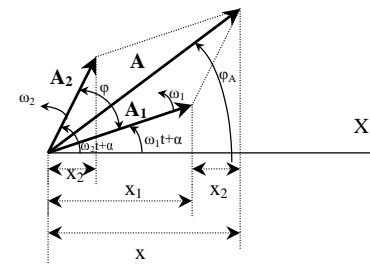
$$\varphi = \omega_2 t + \alpha - (\omega_1 t + \alpha) = (\omega_2 - \omega_1) t. \quad (8)$$

Matome, kad tas kampas, laikui bėgant, kinta. (8) įrašę į (7), mūsų atveju gauname

$$A^2 = 2 A_1^2 [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1) t] = 4 A_1^2 \cos^2 [(\omega_2 - \omega_1) t / 2]$$

ir

$$A = | 2 A_1 \cos [(\omega_2 - \omega_1) t / 2] |. \quad (9)$$



104 pav.

Amplitudės A kitimo dažnis

Matome, kad atstojamojo svyravimo amplitudė A yra kintama. Jos kitimo periodą pažymėkime τ . Kadangi kosinuso modulis pasikartoja, argumentui pakitus dydžiu π , tai $(\omega_2 - \omega_1) \tau / 2 = \pi$ ir

$$\tau = 2 \pi / (\omega_2 - \omega_1). \quad (10)$$

$$v_A = 1 / \tau = (\omega_2 - \omega_1) / 2 \pi = \nu_2 - \nu_1. \quad (11)$$

Kai dažniai ν_2 ir ν_1 yra artimi, v_A yra mažas, o τ - didelis.

Iš 104 pav. matyti, kad atstojamojo svyravimo koordinatė

$$x = A \cos \varphi_A. \quad (12)$$

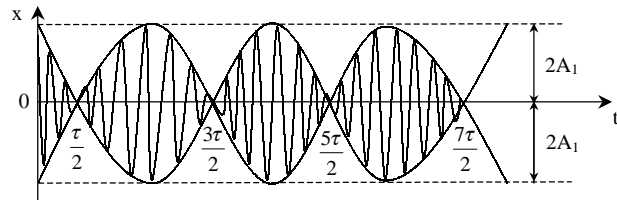
Kadangi vektorių \mathbf{A}_1 ir \mathbf{A}_2 lygiagrečiai yra rombas, tai kampas

$$\varphi_A = (\omega_2 t + \alpha + \omega_1 t + \alpha) / 2 = (\omega_1 + \omega_2) t / 2 + \alpha. \quad (13)$$

Lygybes (9) ir (13) įrašę į (12), gauname:

$$x = 2 A_1 \cos [(\omega_2 - \omega_1) t / 2] \cos [(\omega_1 + \omega_2) t / 2 + \alpha]. \quad (14)$$

Tai harmoninis svyravimas su lėtai kintančia amplitude. Jis grafiškai pavaizduotas 105 pav.



105 pav.

Tai taip vadinami mušimai. Juos galima išgirsti sklindančius ore, kai skamba du vienas šalia kito pastatyti kamertonai, kurių skambėjimo dažniai šiek tiek skiriasi.

Pratybos

1. Sudedami du 2 Hz dažnio, vykstantys vienoje tiesėje, svyravimai. Vieno pradinė fazė $\alpha_1 = 0$, o kito $\alpha_2 = \pi / 2$. Amplitudės atitinkamai: $A_1 = 10$ cm, $A_2 = 5$ cm. Nubrėžkite atstojamojo svyravimo grafiką pagal 88 pav. pavyzdį.
2. Nubrėžkite pagal 103 pav. pavyzdį atstojamojo svyravimo amplitudės vektorių \mathbf{A} , kai vieno svyravimo amplitudės vektoriaus didumas $A_1 = 3$ cm, o kito

svyravimo $A_2 = 4$ cm, kai pradinės fazės: 1) $\alpha_1 = 30^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$ ir 2) $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$.

3.6 Slopinamieji svyravimai

Anksčiau nagrinėjome laisvus svyravimus, nepaisėme svyravimus slopinančių jėgų. Tačiau iš tikrųjų bet koks medžiaginėje aplinkoje sužadintas svyravimas palaipsniui gęsta, jo amplitudė mažėja. Gesimo priežastis yra svyravimą stabdančios trinties jėgos. Pasipriešinimo arba trinties jėga priklauso nuo greičio. Mažų greičių atveju galime tarti, kad ji yra proporcinga greičiui ir nukreipta į priešingą greičiui pusę. Todėl galime rašyti, kad pasipriešinimo jėga $F_{tr} = -r x'$, kur r yra pastovus dydis, vadinamas pasipriešinimo koeficientu. Ši jėga prisideda prie tamprumo jėgos $-kx$. Todėl atstojamoji jėga, veikianti tašką, bus lygi: $F = -kx - r x'$. Antrąjį Niutono dėsnį galėsime parašyti taip:

$$m d^2x / dt^2 = -kx - r dx / dt \quad (1)$$

arba

$$d^2x / dt^2 = -kx / m - (r / m) dx / dt. \quad (2)$$

Pažymėkime

$$k / m = \omega_0^2, \quad r / m = 2 \beta. \quad (3)$$

Tuomet (2) lygtis turės pavidalą:

$$d^2x / dt^2 = -\omega_0^2 x - 2 \beta dx / dt. \quad (4)$$

Dydžiai ω_0^2 ir β yra teigiami. ω_0 sutampa su 3.1 paragrafe vartotu dydžiu ω . Įveskime naują kintamąjį z , susietą su x lygybe:

$$x = z e^{-\beta t}. \quad (5)$$

Suraskime išvestines: dx / dt ir d^2x / dt^2 . Jas trumpiau pažymėkime x' ir x'' , atitinkamai z' ir z'' .

$$x' = e^{-\beta t} z' - \beta e^{-\beta t} z,$$

$$x'' = e^{-\beta t} z'' - 2 \beta e^{-\beta t} z' + \beta^2 e^{-\beta t} z.$$

Irašę šias x' ir x'' išraiškas į (4) lygtį, suprastinę visus narius iš daugiklio $e^{-\beta t}$ ir atlikę kitus paprastus veiksmus gauname:

$$z'' = -(\omega_0^2 - \beta^2)z. \quad (6)$$

Tarkim, kad aplinkos pasipriešinimas yra tiek mažas, jog $\omega_0^2 > \beta^2$. Tada $\omega_0^2 - \beta^2$ yra teigiamas dydis, ir mes galime įvesti pažymėjimą:

$$\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2. \quad (7)$$

Tada iš (6) lygties gauname:

$$z'' + \omega^2 z = 0. \quad (8)$$

Ši lygtis sutampa su 3.1 paragrafo harmoningo svyravimo lygtimi (4). Jos sprendinys

$$z = A_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (9)$$

kur A_0 ir α - konstantos, turinčios tą pačią prasmę kaip ir 3.1 paragrafe. Iš (9) lygties matyti, kad z kinta periodiškai, ir kitimo periodas

$$T = 2\pi / \omega.$$

Atsižvelgus į (7) lygybę,

$$T = 2\pi / (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}. \quad (10)$$

Pasinaudoję (3) lygybėmis, periodą galėsime išreikšti dar ir taip:

$$T = 2\pi m / (k m - r^2 / 4)^{1/2}. \quad (11)$$

Į (9) sprendinį įrašę z reikšmę iš (5), gauname:

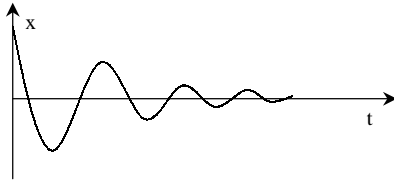
$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) \quad (12)$$

arba

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (13)$$

kur $A = A_0 e^{-\beta t}$ yra nuo laiko priklausanti amplitudė. Ji laikui bėgant mažėja. (10) lygybę palyginę su 3.1 paragrafo (9) matome, kad slopinamojo svyravimo periodas yra didesnis

negu tokios pat masės m taško laisvo svyravimo periodas $T_0 = 2\pi / \omega_0$, veikiant tokiai pačiai tamprumo jėgai. Slopinamo svyravimo grafikas parodytas 106 pav.:



106 pav.

Dviejų viena po kitos sekančių amplitudžių, nutolusių viena nuo kitos per periodą T , santykio natūrinis logaritmas vadinamas slopinimo logaritminiu dekrementu. Logaritminį dekrementą pažymėję raide λ , pagal apibrėžimą turėsime:

$$\lambda = \ln (A_0 e^{-\beta t} / A_0 e^{-\beta(t+T)}) = \ln e^{\beta T},$$

t. y.,

$$\lambda = \beta T. \quad (14)$$

I (12) formulę įrašę (14), gausime dar tokią slopinamųjų svyravimų išraišką:

$$x = A_0 e^{-\lambda t / T} \cos (2 \pi t / T + \alpha), \quad (15)$$

kur periodas $T = 2 \pi / \omega$.

Logaritminį dekrementą λ galima nustatyti, išmatavus dvi viena po kitos sekančias amplitudes A_1 ir A_2 .

Žinodami λ ir pasinaudoję (3) bei (14), galime nustatyti pasipriešinimo koeficientą: $r = 2 \beta m = 2 \lambda m / T$.

Dar pastebėsime, kad kai aplinkos pasipriešinimas yra didesnis, tai $\beta^2 > \omega_0^2$ ir judesys tampa neperiodiškas. Tai matyti ir iš (10) lygybės. Atlenkta iš pusiausvyros padėties kūnas tada asimptotiškai artės atgal į pusiausvyros padėtį ir toliau nebejudės. Pavyzdžiui, rutuliukas pritvirtintas prie spyruoklės smaloje.

Partijos

1. Įrodykite (6) lygtį.
2. Išmatuotos dvi masės m kūno slopinamojo svyravimo amplitudės A_1 ir A_2 , sekančios viena po kitos ir nutolusios viena nuo kitos per periodą T . Išmatuotas ir periodas T . Koks turi būti spyruoklės standumas k , kad kūno judesys dar būtų periodinis? (Ats.: $k > m (\ln (A_1 / A_2))^2 / T^2$.)

3.7 Priverstiniai svyravimai. Rezonansas

Panagrinėkime kūno arba materialaus taško svyravimus, kai jį apart tamprumo ir pasipriešinimo jėgų veikia dar papildoma periodinė jėga. Pavyzdžiui, spyruokle tankiose dujose pakabintą kūną papildomai vertikaliai tampo prie to kūno pritvirtinta gumytė. Nagrinėsime atvejį, kai pašalinė periodinė jėga f kinta pagal sinuso arba kosinuso dėsnį. Pavyzdžiui,

$$f = H \cos \omega t. \quad (1)$$

Tokios jėgos kitimo periodas

$$T = 2 \pi / \omega.$$

Dydis H vadinamas jėgos amplitude. Tai yra didžiausia jos reikšmė. Vietoje preito skirsnio (1) lygties dabar turėsime:

$$m d^2x / dt^2 = - k x - r dx / dt + H \cos \omega t. \quad (2)$$

Vietoje praeito skirsnio (4) lygties bus:

$$d^2x / dt^2 = - \omega_0^2 x - 2 \beta dx / dt + h \cos \omega t. \quad (3)$$

Čia ω_0 ir β turi tas pačias reikšmes, kaip ir praeito skirsnio (3) lygybėse, o

$$h = H / m.$$

Kai trinties jėgos ir priverstinės jėgos nėra ($\beta = 0$, $h = 0$), kūnas svyruos harmoniškai savuoju cikliniu dažniu ω_0 .

Pabandykime surasti (3) lygties sprendinį tarę, kad

$$x = A \cos (\omega t + \alpha), \quad (4)$$

t. y., kad svyravimas vyksta priverstinės jėgos dažniu ω .

Įrašykime (4) sprendinį į (3) lygtį. Suradę išvestines dx / dt , d^2x / dt^2 , pasinaudoję formulėmis $\sin (\gamma + \delta) = \sin \gamma \cos \delta + \cos \gamma \sin \delta$, $\cos (\gamma + \delta) = \cos \gamma \cos \delta - \sin \gamma \sin \delta$ ir atlikę algebrinius pertvarkymus, gausime (tai siūlome atlikti kaip pratimą):

$$- A \omega^2 \cos \alpha \cos \omega t + A \omega^2 \sin \alpha \sin \omega t = (- A \omega_0^2 \cos \alpha + 2 \beta A \omega \sin \alpha + h) \cos \omega t + (A \omega_0^2 \sin \alpha + 2 \beta A \omega \cos \alpha) \sin \omega t. \quad (4a)$$

Ši lygybė turi galioti visoms laiko t reikšmėms. Todėl daugikliai prie $\cos \omega t$ ir daugikliai prie $\sin \omega t$ abejose lygybės pusėse turi būti atitinkamai lygūs. Taigi galime rašyti:

$$-A \omega^2 \cos \alpha = -A \omega_0^2 \cos \alpha + 2 \beta A \omega \sin \alpha + h,$$

$$A \omega^2 \sin \alpha = A \omega_0^2 \sin \alpha + 2 \beta A \omega \cos \alpha$$

arba

$$\begin{cases} A (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \alpha - 2 \beta A \omega \sin \alpha = h, \\ A (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \alpha + 2 \beta A \omega \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Iš (5) antrosios lygties gauname:

$$\operatorname{tg} \alpha = -2 \beta \omega / (\omega_0^2 - \omega^2). \quad (6)$$

Abi (5) lygybes pakėlę kvadratu ir sudėję, gausime:

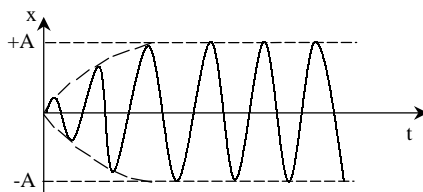
$$A^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \beta^2 \omega^2] = h^2.$$

Todėl

$$A = h / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \beta^2 \omega^2]^{1/2}. \quad (7)$$

(6) ir (7) formulės nusako nusistojusių priverstinių svyravimų fazę ir amplitudę.

Jeigu kūnas iš pradžių buvo parimęs ir jį pradėjo veikti priverstinė jėga, tai jis ims svyruoti, bet svyravimų amplitudė (7) reikšmę pasieks ne iškart, o palaipsniui po tam tikro laiko. Tai pavaizduota 107 pav.



107 pav.

Kai priverstiniai svyravimai nusistovi, amplitudė toliau nedidėja.

Iš (7) formulės matyti, kad priverstinių svyravimų amplitudė A priklauso nuo priverstinės jėgos amplitudės ir taip pat nuo jos dažnio ω . Dažnį ω , kuriam esant svyravimo amplitudė A yra didžiausia, vadina rezonansiniu dažniu ir žymi ω_{rez} . Iš (7) taip pat matome, kad amplitudė A bus didžiausia kai vardiklis mažiausias. Pakanka nustatyti, kada pošaknis yra mažiausias. Rašome išvestinę:

$$d [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \beta^2 \omega^2] / d\omega = 2 (\omega_0^2 - \omega^2) (-2\omega) + 8 \beta^2 \omega = 0$$

arba

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - 2 \beta^2) \omega = 0.$$

Šios lygties sprendinys $\omega = 0$ mūsų nagrinėjamam uždaviniui netinka, nes jis atitinka pastovią priverstinę jėgą f. Lieka lygties

$$\omega_0^2 - \omega^2 - 2 \beta^2 = 0$$

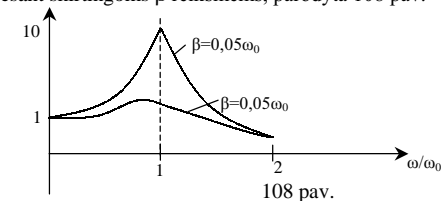
sprendinys. Jis yra toks:

$$\omega = \omega_{\text{rez}} = (\omega_0^2 - 2 \beta^2)^{1/2}. \quad (8)$$

(8) įrašę į (7) gauname rezonansinę amplitudę:

$$A_{\text{rez}} = h / 2 \beta (\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2}. \quad (9)$$

Iš (8) matyti, kad $\omega_{\text{rez}} < \omega_0$, o iš (9) – kad slopinimui mažėjant, rezonansinė amplitudė didėja. Kai slopinimo nėra ($\beta = 0$), $\omega_{\text{rez}} = \omega_0$, o $A_{\text{rez}} = \infty$. Rezonansas labai reikalingas radiotechnikoje, didelį vaidmenį vaidina akustikoje. Mechaninis rezonansas gali būti ir žalingas, nes dėl per didelės rezonansinės amplitudės gali sugriūti tiltai, statiniai, suirti įrenginiai. Esant slopinimui ($\beta \neq 0$), priverstinio svyravimo amplitudė A niekada nepasiekia begalybės. Tos amplitudės priklausomybė nuo priverstinės jėgo dažnio ω , esant skirtingoms β reikšmėms, parodyta 108 pav.



108 pav.

Pratybos

1. Gaukite (4 a) lygtį.
2. Vagono masė $m = 50$ t. Jam važiuojant greičiu $v = 12$ m / s, prasideda stiprus supimas dėl smūgių į bėgių sandūras. Bėgio ir vagono ilgis $l = 12,8$ m. Vagonas supasi ant 4 spyruoklių. Raskite kiekvienos spyruoklės standumą k .

Sprendimas

Priverstinės jėgos periodas $T = l / v$, o vagono laisvų svyravimų periodas $T_0 = 2 \pi (m / 4k)^{1/2}$. Rezonanso atveju $T = T_0$. Iš tų lygčių gauname $k = \pi^2 m v^2 / l^2$. Apskaičiavus $k \approx 4,33 \cdot 10^2$ kN / m.

IV. Bangos

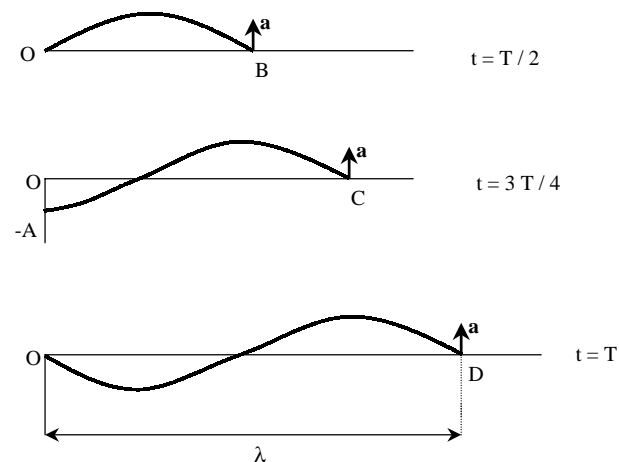
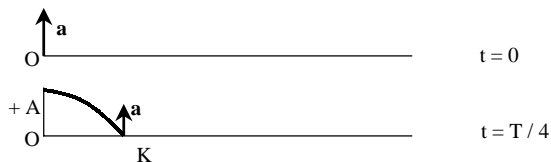
4.1 Banga. Skersinė ir išilginė banga. Bangos greitis, ilgis, periodas

Tegul turime surištų dalelių aplinką, kurioje yra svyruojantis taškas. Taško svyravimo energija gali persiduoti aplinkiniams taškams priverčiant juos svyruoti. Svyravimo plitimo aplinkoje reiškinys vadinamas bangą. Bangos susidaro, pavyzdžiui, metus akmenį į vandens paviršių. Vandens paviršiaus sritis, kurią betarpiškai sujūdino krintantis akmuo, ima svyruoti. Šis svyravimas nuo vieno taško persiduoda kitam ir vandens paviršiuje gauname bangą. Kitas pavyzdys – ranka svyruojant laisvą virvės galą, ima plisti išilgai virvės banga.

Svyravimui sklindant svyruojančios dalelės neslenka kartu su plintančiu svyravimo procesu, o svyruoja ties savo pusiausvyros vieta.

Jeigu dalelės svyruoja išilgai tos pačios tiesės, kuria sklinda banga, tai ją vadiname išilgine banga, o jeigu dalelės svyruoja statmenai bangos sklidimo kryptčiai, tai ji vadinama skersine banga.

Panagrinėkime skersinių bangų susidarymo schemą, pavaizduotą 109 pav.



109 pav.

Jeigu taškui O, kai laikas $t = 0$, suteiksime pagreitį a , nukreiptą į viršų, tai jis atsilenks nuo pusiausvyros padėties. Dėl dalelių tarpusavio ryšio su tam tikru pavėlavimu poveikis persiduos kaimyninėms dalelėms. Per laiko tarpą $t = T / 4$ (T – dalelės svyravimo periodas) poveikis pasieks tašką K, o dalelė O atsilenks iki maksimalios padėties $+A$ ir stabtels. Tamprumo jėgų veikiamą ji pakeis judėjimo kryptį ir judės priešinga kryptimi, o dalelė K tik pradės judėti ją paveikusias jėgos kryptimi. Po laiko tarpo $t = T / 2$ dalelė O grįš į pusiausvyros padėtį, bet joje nesustos, o dėl inercijos judės toliau. Po laiko $t = 3 T / 4$, dalelė O atsilenks į priešingą pusę iki maksimalios vertės $-A$, o trikdymas pasieks tašką C. Ir po laiko $t = T$ dalelė vėl grįš į pusiausvyros vietą ir ten vėl nesustos, o trikdymas pasieks tašką D. Minėtų dalelių judesys kartosis, o trikdymas plis toliau po visą aplinką. Taip susidaro skersinės bangos tamprioje aplinkoje.

Panašų modelį galima sukurti ir išilginėm bangom. Siūlome tai padaryti patiems. Padarę pamatysite, kad išilginėje bangoje susidaro dalelių sutankėjimai ir praretėjimai. Bangos procesą lydi sutankėjimų ir praretėjimų slinkimas. Ar aplinkoje yra skersinės ar išilginės bangos – priklauso nuo medžiagos tamprumo savybių. Jei aplinkos vienam sluoksniui pasislinkus kito sluoksnio atžvilgiu atsiranda tamprumo jėgos, grąžinančios paslinktą sluoksnį į pradinę padėtį, tai gali plisti skersinės bangos. Tokios aplinkos yra kieti kūnai. Skysčiai ir dujos minėtų savybių neturi. Juose gali skliti tik išilginės bangos.

Bangos sklidimo greitis priklauso nuo aplinkos tamprumo savybių ir jos tankio ρ . Išilginių bangų greitis

$$v = \sqrt{E / \rho} . \quad (1)$$

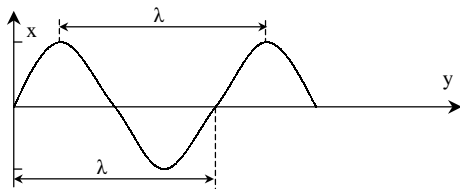
Čia E – medžiagos, kurioje plinta banga, Jungo modulis. Tai dydis, analogiškas spyruoklės standumui k . Standumas k charakterizuoja konkrečią tam tikro ilgio ir storio spyruoklę. Medžiaginei tampriai aplinkai charakterizuoti patogiau vietoje mums žinomos lygybės $F = k \Delta l$ rašyti:

$$F / S = E \Delta l / l . \quad (2)$$

Čia S ir l – išivaizduojamo medžiagos stulpelio skerspjūvio plotas ir ilgis, tačiau koeficientas E nuo S ir l nepriklauso, o priklauso tik nuo pačios medžiagos (pvz., dujų) savybių. Iš (2) matyti, kad Jungo modulis E matuojamas N / m^2 .

Atstumas, kurį per vieną periodą T nueina duota svyravimo fazė, vadinamas bangos ilgiu λ . Kitais žodžiais, bangos ilgis yra mažiausias atstumas tarp svyruojančių taškų, esančių vienodose fazėse arba tarp dviejų artimiausių sutankėjimų ar praretėjimų (išilginėse bangose).

Bangą galima pavaizduoti grafiškai, pasirinkus koordinatų ašis x, y . Ašyje x atidėkime dalelės atsilenkimą nuo pusiausvyros padėties, o ašyje y – dalelės padėtį aplinkoje (110 pav.).



110 pav.

Bangos sklidimo greičiu suprantamas duotos fazės sklidimo greitis. Per periodą T fazės nueitas kelias lygus λ . Taigi greitis

$$v = \lambda / T = \lambda \nu . \quad (3)$$

Čia ν - bangos dažnis.

Geometrinė vieta taškų, iki kurių tam tikru momentu nuėjo banga, vadinama bangos frontu. Jeigu aplinka yra izotropinė, tai iš sužadavimo centro bangos į visas puses sklis vienodais greičiais, ir frontas bus sfera, kurios spindulys $r = v t$. Jei frontas yra sfera, tai banga vadinama sferine banga, jei frontas – plokštuma, tai bus plokščia banga.

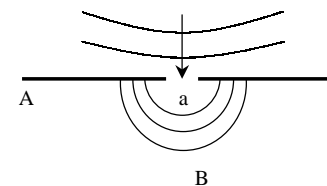
Kryptys, kuriomis plinta bangos, vadinamos spinduliais. Sferinės bangos spinduliai sutampa su sferos spinduliais. Plokščios bangos spinduliai yra lygiagretūs.

Pratybos

1. Pavaizduokite išilginių bangų susidarymo modelį analogiškai 109 pav.
2. Paskaičiuokite įvairių dažnių garso bangų ilgį, radijo bangų ilgį.
3. Žemės plutoje išilginių bangų greitis $c_1 = 14 \text{ km / s}$, o skersinių bangų greitis $c_2 = 7,5 \text{ km / s}$. Raskite kampinį atstumą nuo Žemės drejbėjimo centro taško A iki seisminės stoties B, jeigu iš seismogramos matyti, kad išilginės bangos atėjo $\Delta t = 91 \text{ s}$ anksčiau, negu skersinės. Galima tarti, kad šiuo atveju bangos plinta tikrai Žemės pluta. Kampinis atstumas yra kampas tarp spindulių, išvestų iš Žemės centro į taškus A ir B. Žemės spindulys $R = 6370 \text{ km}$.

4.2 Hiuigenso (Heigenso) principas

Dažnai reikia surasti bangos frontą kurio nors vėlesniu momentu, kai jis buvo žinomas ankstesniu laiko momentu. Metodą tam tikslui 1690 m. pasiūlė olandas Hiuigenas (Ch. Huggens). Tas metodas vadinamas Hiuigenso principu. Jo teisingumą patvirtina stebėjimai. Jį galima įrodyti, remiantis elastingumo teorija, o principą paaiškinti eksperimentu. Tegul turime plyšį, kurio plotis $a \ll \lambda$ (111 pav.).



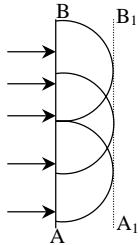
111 pav.

Banga (pvz., vandens paviršiuje) priėjusi pertvarą A atsispindi, o plyšys yra šaltinis svyravimų, plintančių kitoje pertvaros pusėje. Nepriklausomai nuo pirminės bangos fronto pavidalo už plyšio sklis pusžiedžio formos bangos B. Plyšys bus lyg naujas svyravimų centras. Tuo remiantis galima tarti, kad kiekviena aplinkos taška, iki kurio priėjo bangos frontas, galima laikyti nauju bangų šaltiniu. Tai yra Hiuigenso principo esmė.



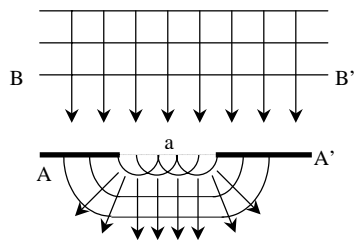
112 pav.

Tegul vienu momentu yra žinomas bangos frontas AB (112 pav.). Rodyklės rodo bangos atėjimo kryptį. Norint gauti naują frontą vėlesniu momentu, praėjus laikui t , kiekvieną senojo fronto tašką reikia laikyti atskiru pirmyn sklindančių bangų centru. Iš kiekvieno taško nubrėžkime naujos bangos paviršių, kuris būtų spindulio $r = v t$ pusrutulius (hemisfera). Visų naujų bangų paviršių gaubiančioji A_1B_1 bus naujas bangos frontas. Taigi jeigu bangos AB frontas buvo sferinis spindulio R paviršius, tai izotropinėje aplinkoje jis liks sferiniu ir praėjus laikui t . Naujas spindulys $R_1 = R + v t$. Sklindanti sferinė banga turi vis didėjančio spindulio sferinį frontą. Kai spindulys yra labai didelis, bangos fronto dalį galima laikyti plokščia. 113 pav. parodyta plokščios bangos fronto dalis AB.



113 pav.

Visus to fronto taškus laikydami savistoviais bangų šaltiniais ir išvedę aplink juos pusrutulius, gausime gaubiantį paviršių A_1B_1 , kuris bus lygiagretus plokštumai AB. Iš čia darome išvadą, kad plokščia banga, sklisdama vienoje izotropinėje aplinkoje, ir toliau pasilieka plokščia. Dabar panagrinėsime atvejį, kai plokščios bangos sklidimo kelyje yra pastatyta pertvara A su skylute a, kurios skersmuo yra didesnis už bangos ilgį λ (114 pav.).



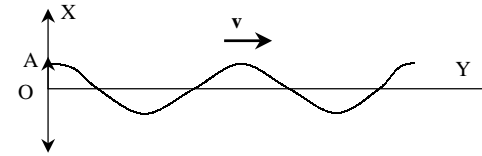
114 pav.

Priejęs pertvarą A, plokščias frontas BB' atsispindės nuo jos, o skylutės a taškai taps savistoviais bangų centrais. Aplink kiekvieną centrą susidarys elementarusis pusrutulinis bangos paviršius. Šių paviršių gaubiančioji bus bangos frontas už skylutės. Iš 114 pav. matyti, kad tas frontas už skylutės nebėra plokščias, tik jo vidurinė dalis yra lygiagretė buvusiam frontui. Ties kraštais frontas užlinksta. Toks spindulių užsilenkimas yra vadinamas difrakcija. Norint tiksliai nustatyti tokį spindulių užsilenkimą, reikia bangas, ateinančias nuo atskiru

skylutės taškų, sudėti, priimant dėmesin jų fazes. Smulkiau šį veiksmą panagrinėsime vėliau. Kuo mažesnė skylutė, tuo labiau pasireiškia spindulių užsilenkimas. Jeigu skylutės a skersmuo yra mažesnis už bangos ilgį, tai skylutė bus lyg vienietinis bangu centras, nuo kurio plis pusrutulinė banga.

4.3 Bangos lygtis

Kaip galima analitiškai aprašyti bangų plitimo procesą ?



115 pav.

Tegul turime bangą, plintančią Y ašies kryptimi (115 pav.). Banginis procesas bus žinomas, jeigu žinosime, kokią reikšmę x turi kiekvienas taškas kiekvienu laiko momentu. Kitaip sakant, reikia žinoti taško poslinkį x kaip laiko ir vietos funkciją. Tegul taške O yra svyravimo centras, ir čia taškas svyruoja pagal dėsnį

$$x = A \cos \omega t. \quad (1)$$

Čia A , ω ir t – svyravimo amplitudė, ciklinis dažnis ir laikas, žinomi iš svyravimų skyriaus.

Sklidami svyravimai bet kurį tašką K pasieks po laiko $\Delta t = y / v$, kur v – bangos sklidimo greitis. Taškas K pradės svyruoti laikotarpiu Δt vėliau, negu taškas O. Jeigu svyravimai neslopunami, tai taškas K svyruos tuo pačiu dažniu ir ta pačia amplitude:

$$x = A \cos \omega t'. \quad (2)$$

Čia laikas t' skaičiuojamas nuo tada, kai pradėjo svyruoti taškas K. Todėl

$$t' = t - \Delta t,$$

o

$$x = A \cos \omega (t - \Delta t) = A \cos \omega (t - y / v). \quad (3)$$

y gali būti teigiamas ir neigiamas. Kadangi $v T = \lambda$, $T = 1 / v = 2 \pi / \omega$, $v = \lambda / T = \lambda \omega / 2 \pi$, tai (3) lygtį galima užrašyti taip:

$$x = A \cos \omega (t - 2 \pi y / \lambda \omega) = A \cos (\omega t - 2 \pi y / \lambda)$$

arba

$$x = A \cos 2\pi (vt - y/\lambda).$$

(4)

Tai ir yra bangos lygtis. Kitas jos pavidalas yra (3).

Dalelė, kurios atstumą nuo svyravimo centro nusako y reikšmė, pagal (3) lygtį svyruos harmoningai pagal dėsnį:

$$x = A \cos \omega (t - y/v) = A \cos (\omega t - \alpha),$$

(5)

kur $\alpha = \omega y / v = 2\pi y / \lambda$. Duotam taškui y yra pastovus ir α taip pat bus pastovus. Jis yra vadinamas to taško pradine faze. Tokią sąvoką mes jau aptarėme svyravimų skyriuje. Dviejų taškų, kurių svyravimų padėtys yra y_1 ir y_2 , fazių skirtumas

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi (y_2 - y_1) / \lambda.$$

(6)

Taškų, kurie vienas nuo kito nutolę atstumu λ , fazių skirtumas $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi$. Kiekvienu laiko momentu jie bus vienodai atsilenkę nuo pusiausvyros padėties. Sakome, kad tokie taškai svyruoja vienodomis fazėmis. Lygiai taip pat svyruos ir taškai, tarp kurių atstumas yra $k\lambda$ (sveikas bangų ilgių skaičius, $k = 0, 1, 2, \dots$). Jeigu $y_2 - y_1 = (2k + 1)\lambda / 2$, tai fazių skirtumas bus $\pi, 3\pi, \dots$, ir sakome, kad tie taškai svyruoja priešingose fazėse. Kiekvienu laiko momentu jie vienodai atsilenkę, bet priešingomis kryptimis.

Iki šiol nagrinėjome plokščią bangą. Sferinės bangos energija, tenkanti ploto vienetui, atvirkščiai proporcinga atstumo nuo svyravimo centro kvadratui. Kadangi svyruojančio kūno energija proporcinga amplitudės kvadratui, tai galime rašyti, kad $1/r^2 \sim A^2$, t. y., amplitudė atvirkščiai proporcinga atstumui nuo centro r. Todėl sferinės bangos lygtis pagal (3):

$$x = (A/r) \cos \omega (t - r/v).$$

(7)

Čia A – pastovus dydis.

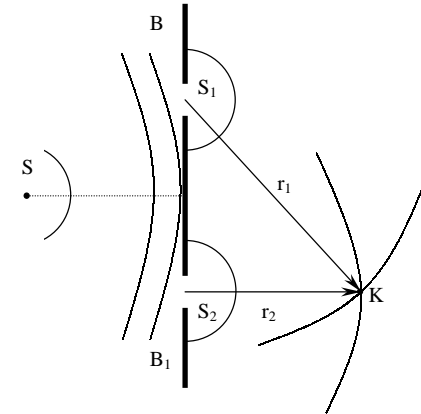
Pratybos

1. Paieškokite duomenų apie įvairių greičių, dažnių, ilgių ir amplitudžių bangas ir pavaizduokite bent vienam atvejui (4) bangos lygtį grafiškai.

4.4 Bangų interferencija. Stovinčios bangos

Aplinkoje bangos gali plisti iš įvairių šaltinių. Pakeliui jos gali susitikti. Jeigu kurioje nors vietoje dvi bangos, plintančios iš įvairių šaltinių, dengia viena kitą, o po to išsiskiria, tai toliau kiekviena iš jų sklinda taip, lyg ji savo kelyje nebūtų sutikusi kitos. Ši bangų sklidimo nepriklausomybė viena nuo kitos yra vadinama superpozicijos principu. Jis analogiškas jėgų nepriklausomybės principui. Jo teisingumu galima nesunkiai įsitikinti, į vandenį įmetus du akmenukus. Susitikę jų bangos vėl išsiskiria ir kaip ir anksčiau sudaro taisyklingus ratus su centrais akmenukų kritimo vietoje. Šį faktą pastebėjo dar Leonardas da Vinčis (Leonardo da Vinci), italų meninikas, mokslininkas ir išradėjas, gyvenęs 1452 – 1519 m. Bangų užsiklojimo vietoje bangos susideda. Įvyksta taip vadinama bangų interferencija. Kiekviename aplinkos taške atstojamasis svyravimas bus visų iki to taško atėjusių svyravimų suma. Interferencija gali būti įvairių bangų. Įdomus paprastesnis atvejis, kai susitinka dvi vienodų dažnių, vienodų svyravimo kryptių ir vienodų fazių arba pastovų fazių skirtumą turinčios bangos. Jos yra vadinamos koherentinėmis bangomis.

Panagrinėkime koherentinių bangų interferenciją.



116 pav.

Tegul mūsų šaltinių S_1 ir S_2 (116 pav.) svyravimai vienodomis fazėmis išreiškiami taip:

$$x_1 = A_0 \cos \omega t, \quad x_2 = A_0 \cos \omega t.$$

(1)

Iš tų šaltinių plis sferinės bangos. Taške K jų lygtys bus:

$$x_1 = A_1 \cos 2\pi (vt - r_1 / \lambda), \quad x_2 = A_2 \cos 2\pi (vt - r_2 / \lambda). \quad (2)$$

Sferinėms bangoms

$$A_1 / A_2 = r_2 / r_1,$$

tačiau jeigu $r \gg |r_2 - r_1|$, tai apytikriai $A_1 \approx A_2 = A$.

Panagrinėkime bangų interferenciją, kai: 1) $r_2 - r_1 = \lambda$ ir 2) $r_2 - r_1 = \lambda / 2$.

$$1) \quad x = x_1 + x_2 = A [\cos 2\pi (vt - r_1 / \lambda) + \cos 2\pi (vt - (r_1 + \lambda) / \lambda)].$$

Atlikę trigonometrinius pertvarkymus, gautume:

$$1) \quad x = 2A \cos 2\pi (vt - r / \lambda). \quad (3)$$

Atstumo r_1 indeksą mes čia praleidome.

$$2) \quad r_2 - r_1 = \lambda / 2.$$

Atlikę visiškai analogiškus veiksmus gautume:

$$x = x_1 + x_2 = 0. \quad (4)$$

Iš (2) lygčių matyti, kad interferuojančių bangų fazių skirtumas

$$\Delta\alpha = 2\pi (r_2 - r_1) / \lambda. \quad (5)$$

Vadinasi 1) atveju, kai $(r_2 - r_1) = \lambda$, $\Delta\alpha = 2\pi$, o iš (3) matyti, kad atstojamosios bangos amplitudė tada lygi $2A$, dažnis – tas pats ν ir pradinė fazė lygi $2\pi r / \lambda$. Sako, kad tada interferuoja vienodų fazių bangos. Tas pats bus ir tada, kai fazių skirtumas

$$\Delta\alpha = \pm 2\pi k, \quad (r_2 - r_1 = k\lambda) \quad (6)$$

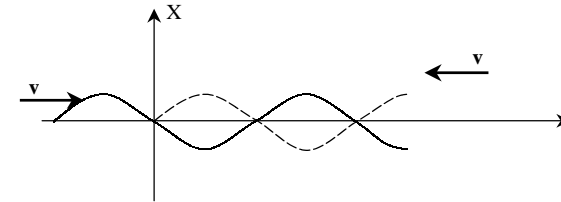
kur $k = 0, 1, 2, \dots$ (sveikas skaičius).

2) atveju, kai $(r_2 - r_1) = \lambda / 2$, fazių skirtumas $\Delta\alpha = \pi$, o iš (4) matyti, kad interferuojančios bangos tada viena kitą naikina. Bendriau svarstant, tai minimumo sąlyga. Tada interferuoja priešingų fazių bangos. Tas pats bus ir tada, kai fazių skirtumas

$$\Delta\alpha = \pm (2k + 1)\pi, \quad (r_2 - r_1 = (2k + 1)\lambda / 2) \quad (7)$$

Galimi įvairūs tarpiniai atvejai tarp 1) ir 2).

Įdomus bangų interferencijos atvejis yra stovinčios bangos. Jos susidaro interferuojant dviem vienodų amplitudžių priešingomis kryptimis plintančioms plokščioms bangoms.



117 pav.

Jeigu koordinatčių pradžioje abiejų bangų fazės vienodos (117 pav.), tai

$$x_1 = A \cos 2\pi (vt - y / \lambda), \quad (8)$$

$$x_2 = A \cos 2\pi (vt + y / \lambda).$$

Atstojamosios bangos

$$x = x_1 + x_2 = A \cos 2\pi (vt - y / \lambda) + A \cos 2\pi (vt + y / \lambda).$$

Atlikus trigonometrinius perdėrbimus,

$$x = 2A \cos (2\pi y / \lambda) \cos (2\pi \nu t). \quad (9)$$

Daugiklis $\cos (2\pi \nu t)$ rodo, kad atsirado to paties dažnio ν svyravimai. Daugiklis $2A \cos (2\pi y / \lambda)$ nepriklauso nuo laiko ir reiškia atstojamojo svyravimo amplitudę:

$$A_s = |2A \cos (2\pi y / \lambda)|. \quad (10)$$

Amplitudė priklauso nuo koordinatės y . Taškai, kuriuose atstojamoji amplitudė A_s lygi $2A$, yra vadinami pūpsniais, o taškai, kuriuose amplitudė A_s lygi nuliui, vadinami mazgais. Nustatykite jų vietas:

$$A_s = 2A, \text{ kai } \left| \cos(2\pi y / \lambda) \right| = 1, \quad 2\pi y / \lambda = \pm \pi k,$$

kur $k = 0, 1, 2, \dots$. Tai gi pūpsnių koordinatės

$$y = \pm k \lambda / 2.$$

Atstumas tarp dviejų pūpsnių

$$y_{k+1} - y_k = \lambda / 2.$$

Mazgams $\cos(2\pi y / \lambda) = 0$, arba $2\pi y / \lambda = \pm (2k + 1) \pi / 2$ ir

$$y = \pm (2k + 1) \lambda / 4.$$

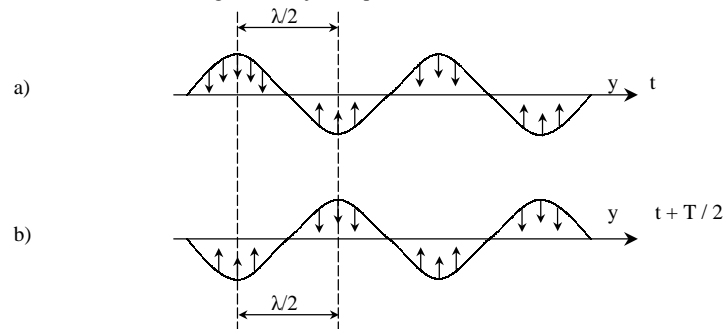
Atstumas tarp dviejų gretimų pūpsnio ir mazgo yra

$$(2k + 1) \lambda / 4 - k \lambda / 2 = \lambda / 4.$$

Pereinant mazgą, svyravimų fazė pasikeičia į priešingą. Tai išplaukia iš to, kad amplitudės daugiklis $\cos(2\pi y / \lambda)$ pereinant per nulį mazge keičia ženklą. Todėl jeigu vienoje mazgo pusėje tam tikru laiko momentu poslinkis x – teigiamas, tai kitoje mazgo pusėje tuo pačiu laiko momentu jis bus neigiamas.

Kadangi $\cos(2\pi v t)$ visuose y – ko taškuose turi vienodą reikšmę, tai visi taškai tarp dviejų mazgų svyruoja vienoda faze.

Stovinčią bangą viažduoja 118 pav.:



118 pav.

Stovinčios bangos paprastai susidaro, interferuojant plintančiai į priekį ir atsispindėjusiai bangoms. Atspindžio taške gali būti ir pūpsnis, ir mazgas. Jeigu aplinka, nuo kurios banga atsispindi, yra tankesnė už aplinką, kurioje sklinda bangos, tai tu

aplinkų riboje gaunamas mazgas. Jeigu aplinka, nuo kurios banga atsispindi, yra retesnė už tą, kur plinta banga, tai riboje gaunamas pūpsnis.

Pratybos

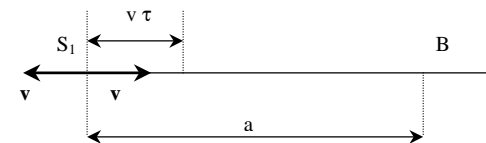
1. Gaukite atstojamosios bangos lygtį (3).
2. Gaukite (4) rezultata.
3. Gaukite stovinčios bangos lygtį (9).
4. Pavaizduokite brėžiniu stovinčią išilginę bangą.

4.5 Doplerio efektas

Matuojamas bangos dažnis priklauso ne tik nuo bangos prigimties, bet ir nuo šaltinio arba stebėtojo (prietaiso) judėjimo. Šį reiškinį pirmasis 1842 m. pastebėjo Dopleris, nurodęs, kad dažnis padidėja šaltiniui ir stebėtojui suartėjant ir sumažėja, jiems tolstant vienas nuo kito. Doplerio efektas pasireiškia visuose banginiuose reiškiniuose (optiniuose, akustiniuose ir kt.). Austrų fizikas, matematikas ir astronomas Ch. Doppler gyveno 1803 – 1853 m.

Panagrinėkime du atvejus: a) šaltinio judėjimą ir b) stebėtojo judėjimą.

a) Šaltinis juda aplinkoje greičiu v , o bangos greitis c joje yra pastovus ir nepriklauso nuo šaltinio judėjimo. (Atskiru atveju c gali būti šviesos greitis).



119 pav.

Tegul stebėtojas yra taške B, o šaltinis – S_1 juda greičiu v link stebėtojo (119 pav.). Laiko momentu t_1 išspinduliuota iš šaltinio S_1 , kai atstumas $S_1B = a$, banga pasieks stebėtoją laiko momentu

$$\Theta_1 = t_1 + a / c. \quad (1)$$

Banga, išspinduluota laiko tarpu τ vėliau, laiko momentu t_2 , pasieks stebėtoją laiko momentu

$$\Theta_2 = t_2 + (a \pm v \tau) / c. \quad (2)$$

Mat, laiko momentu t_2 atstumas tarp šaltinio ir stebėtojo yra $a + v \tau$ arba $a - v \tau$ priklausomai nuo šaltinio judėjimo krypties. Taigi bangos, išspinduluotos per laiką $\tau = t_2 - t_1$, prietaisus veikia per laiką

$$\Theta = \Theta_2 - \Theta_1 = \tau (1 \pm v / c). \quad (3)$$

Jei šaltinio dažnis ν_0 , tai per laiką τ jis išspinduliuos $N = \nu_0 \tau$ bangų. Taigi prietaisu išmatuotas dažnis

$$\nu = N / \Theta. \quad (4)$$

Atsižvelgę į (3) ir (4), gauname:

$$\nu = \nu_0 / (1 \pm v / c). \quad (5)$$

Čia “+” ženklas, kai šaltinis tolsta nuo stebėtojo ir “-“, jei šaltinis artėja prie stebėtojo.

Pakis ir bangos ilgis. Jei λ_0 yra nejudančio šaltinio spinduliuojamas bangos ilgis, o λ - judančio, tai

$$\lambda_0 = c / \nu_0, \lambda = c / \nu = (c / \nu_0) (1 \pm v / c) = \lambda_0 (1 \pm v / c). \quad (6)$$

Taigi, judant šaltiniui aplinkoje, kurioje bangos greitis c pastovus, pasikeis registruojamas dažnis ir bangos ilgis.

b) Prietaisas juda aplinkoje greičiu v . Bangos greitis aplinkoje kaip ir a) atveju – c .

Pakartoję ankstesnius samprotavimus, gauname:

$$\Theta_1 = t_1 + a / (c - v) \text{ ir } \Theta_2 = t_2 + (a \pm v \tau) / (c - v). \quad (7)$$

Mat, bangos greitis prietaiso atžvilgiu yra $(c - v)$.

Tuomet

$$\Theta = \tau (1 \pm v / (c - v)). \quad (8)$$

Prietaiso nustatytas dažnis, kaip ir a) atveju, bus:

$$\nu = \nu_0 (1 - v / c). \quad (9)$$

Čia “-“ ženklas, kai prietaisas tolsta nuo šaltinio ir “+” – kai artėja. Minėtas bangos greitis prietaiso atžvilgiu

$$c_r = c - v = c (1 - v / c). \quad (10)$$

Išmatuotas bangos ilgis šiuo atveju:

$$\lambda = (c - v) / \nu = c (1 - v / c) / \nu_0 (1 - v / c) = c \nu_0 = \lambda_0. \quad (11)$$

Vadinasi, bangos ilgis lieka nepakitęs.

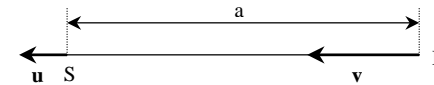
Kai $c \gg v$, a) ir b) atvejais gautas formules (5) ir (9) galima sujungti. Tikrai, iš (5):

$$\begin{aligned} \nu &= \nu_0 / (1 \pm v / c) = \nu_0 (1 - v / c) / (1 \pm v / c) (1 - v / c) = \\ &= \nu_0 (1 - v / c) / (1 - (v / c)^2) = \nu_0 (1 - v / c), \end{aligned}$$

nes $(v / c)^2$ yra mažas dydis.

Gavome (9) formulę. Vadinasi, (9) Doplerio efekto formulė tinka, kai greičiu $v \ll c$ juda šaltinis arba kai juda prietaisas.

Panagrinėkime vieną atvejį, kai juda šaltinis ir prietaisas. Tegul prietaisas juda greičiu v , o šaltinis greičiu u ta pačia kryptimi, ir prietaisas pasiveja šaltinį ($v > u$).



120 pav.

Žiūrėdami į 120 pav., rašome:

$$\Theta_1 = t_1 + a / (c + v), \Theta_2 = t_2 + (a - (v - u) \tau) / (c + v).$$

$$\Theta = \Theta_2 - \Theta_1 = t_2 - t_1 + (a - (v - u) \tau) / (c + v) - a / (c + v) =$$

$$= \tau + (a - (v - u) \tau - a) / (c + v) = \tau (c + u) / (c + v).$$

Registruojamas dažnis

$$\begin{aligned} \nu &= N / \Theta = \nu_0 \tau / \Theta = \nu_0 (c + v) / (c + u) = \\ &= \nu_0 (1 + v / c) / (1 + u / c). \end{aligned} \quad (12)$$

Kai $u = v$, $v = v_0$.

Taigi jeigu šaltinis ir prietaisas juda drauge, nejudėdami vienas kito atžvilgiu, tai Doplerio efekto nėra. Jei $v \neq u$, tai Doplerio reiškinys egzistuoja, ir stebimas dažnumo pakitimas priklauso nuo u ir v dydžių. Todėl Doplerio reiškinys leidžia nustatyti šaltinio bei prietaiso greitį aplinkos atžvilgiu.

Beveik visi žinome, kad garvežio, šilumvežio ar elektrovežio signalas mašinai artėjant yra aukštesnio tono, o tolstant – žemesnio. Daug kas žinote, kad žvįgdžių spektrų linijų poslinkio į raudonąją pusę (į mažesnių dažnių sritį) viena priežastis yra žvaigždžių tolumas nuo Žemės (Visatos plėtimasis). Tai Doplerio reiškiniai, kurie charakterizuojami mūsų gautomis formulėmis (nereliatyvistiniu atveju).

Pratybos

1. Raskite registruojamą dažnį v (kaip pasikeis (12) formulė), kai šaltinis, judėdamas greičiu u ir prietaisas, judėdamas greičiu v , tolsta vienas nuo kito. (Ats.: $v = v_0(1 - v/c) / (1 + u/c)$).
2. Raskite praeito uždavinio dažnį v , kai u ir $v \ll c$. (Ats.: $v = v_0(1 - (u + v)/c)$)
3. Gaukite (12) formulę, kai u ir $v \ll c$. (Ats.: $v = v_0(1 + (v - u)/c)$).
4. Raskite registruojamą dažnį v , kai šaltinis ir prietaisas, judėdami greičiais u ir v , artėja vienas prie kito. (Ats.: kai u ir $v \ll c$, $v = v_0(1 + (v + u)/c)$).
5. Stebėtojiui, besiklausančiam automobilio signalo, atrodo, kad automobiliu artėjant, jo signalo pagrindinio tono dažnis 9 / 8 kartų didesnis negu nuvažiuojančio automobilio. Apskaičiuokite automobilio greitį, laikydami garso greitį ore lygiu 340 m / s. Orą laikykite nejudančiu. Tas pats klausimas, kai signalo šaltinis yra nejudantis, o stebėtojas važiuoja automobiliu pradžioje artėdamas, o paskui nutoldamas.

4.6 Garso bangos

Ore ir bet kuriose kitose dujose svyravimai sklinda išilginėmis bangomis. Pasiekę mūsų ausį, svyravimai, kurių dažniai būna maždaug nuo 20 iki 20000 svyravimų per 1 sekundę, sukelia garso pojūtį.

Dažnio vienetas yra toks svyruojamojo proceso dažnis, kai per 1 sekundę įvyksta vienas svyravimas. Šis dažnio vienetas vokiečių fiziko Herco (H. Hertz) garbei vadinamas hercu (sutrumpintai žymimas Hz). H. Hercas gyveno 1857 – 1894 m.

Taigi svyravimai, esantieji nuo 20 iki 20000 Hz intervale, turi savybę sukelti garso pojūtį. Jie pagal šį požymį yra vadinami garsiniais arba akustiniais svyravimais.

Fizikiniu požiūriu tie svyravimai niekuo specifiskai nesiskiria nuo kitų dažnių, pvz., nuo 10 Hz arba 30000 Hz svyravimų.

Garso bangas, kurių dažniai yra didesni už 20000 Hz, įprasta vadinti ultragarsais, o bangos, kurių dažniai mažesni negu 20 Hz, vadinamos infragarsais.

Garso bangos sklinda įvairiose aplinkose. Jų plitimo greitis priklauso nuo aplinkos savybių. Pagrindinė aplinka, kurioje sklinda garsiniai svyravimai, yra oras – dujos. Jau 4.1 paragrafe rašėme, kad tamproje medžiagoje (dujose) išilginių bangų greitis

$$v = \sqrt{E / \rho}. \quad (1)$$

Čia E – dujų Jungo modulis, ρ – tankis.

Šalia Jungo modulio vartojamas elastingumo (tamprumo) koeficientas $\alpha = 1 / E$. Tada

$$v = (1 / \alpha \rho)^{1/2}. \quad (2)$$

Skersinių bangų sklaidimo greitis priklauso nuo šlyties modulio N :

$$v = (N / \rho)^{1/2}. \quad (3)$$

Šlyties modulio N sąvokos dabar neaptarinėsime.

Remianti dujų dėsniais, galima parodyti, kad garso greitis

$$v = (\gamma R T / \mu)^{1/2}. \quad (4)$$

Čia R – universali dujų konstanta, T – absoliutinė temperatūra, μ – dujų molinė masė, o γ – dujų savitosios šilumos c_p , esant pastoviam slėgiui, ir savitosios šilumos c_v , esant pastoviam tūriui, santykis (adiabatės rodiklis):

$$\gamma = c_p / c_v.$$

Garso bangų sklaidimui atmosferoje didelę įtaką turi atmosferos nevienalytiškumas. Garso greitis priklauso ir nuo oro temperatūros bei jo drėgnumo. Vėjas taip pat turi įtakos garso bangų greičiui. Pagaliau garso bangos atsispindi nuo dviejų aplinkų, kuriose jos juda įvairiais greičiais, ribos. Galima pastebėti garsų atspindį nuo debesų ir nuo rūko ribos.

Lentelėje pateikiame garso greitį kai kuriose dujose 0°C temperatūroje:

Dujos	Garso greitis, m/s
Oras	331
Deguonis	315
Vandenilis	1263
Anglies dvideginis	258

Pratybos

1. Moksleivis ir moksleivė stovi sutemus ant tiesaus tako, vedančio link aukštos plokščios uolos. Atstumas nuo moksleivio iki uolos $l = 300$ m. Moksleivei šūktelėjus, moksleivis tą šūktelėjimą išgirdo du kartus su $t = 1,5$ s intervalu. Kokiu atstumu nuo uolos stovi moksleivė? Kas pakistų, jei laiko intervalas tarp moksleivio girdinų garsų būtų $t' = 1,8$ s? Garso greitis ore $v = 330$ m / s. Moksleivės balso (soprano) aukštį atitinkančio tono "la" dažnis $\nu = 440$ Hz. Kiek tokio garso bangų telpa tarp jos ir uolos? (Ats.: 248 m. Jei $t' = 1,8$ s, moksleivės atstumo nuo uolos nustatyti negalima. 330 bangų).
2. Du lėktuvai "Concorde" skrenda vienas paskui kitą 10 km atstumu vienas nuo kito 1700 km / h greičiu. a) I lėktuve iššaunamas garsus šūvis. Po kiek laiko tas signalas pasigirs II lėktuve? b) Šaunama II lėktuve. Kada tas šūvis bus išgirstas I lėktuve? (Ats.: a) Du kartus – po 13 s ir po 59 s. b) Nebus išgirstas).
3. Suradę vadovėlyje oro tankį įprastomis sąlygomis, apskaičiuokite oro Jungo modulį.

Pagrindinė literatūra

1. О. В. Голубева. Теоретическая механика. – Москва, 1961.
2. А. А. Космодемьянский. Курс Теоретической механики. - Москва, 1955.
3. V. Paliūnas. Teorinė mechanika. – Vilnius, 1982.
4. S. E. Frišas ir A. V. Timoreva – Bendrosios fizikos kursas. I tomas. – Vilnius, 1955.
5. B. Javorskis, A. Detlafas, L. Milkovskaja, G. Sergejevas. Fizikos kursas 1. – Vilnius, 1970.

Turinys

Įvadas	3
I. Kietojo kūno dinamika	4
1.1 Įvairių kietųjų kūnų masių centras	4
1.2 Kietojo kūno judėjimo rūšys	9
1.3 Kietojo kūno judesio kiekio momentas. Inercijos momentas	10
1.4 Inercijos momento pavyzdžiai. Inercijos spindulys	17
1.5 Šteinerio – Heigenso teorema	22
1.6 Kinetinė besisukančio kietojo kūno energija. Kionigo teorema kietajam kūnui	25
1.7 Tvermės dėsniai kietojo kūno atveju	28
1.8 Pagrindinė sukamojo judėjimo dinamikos lygtis	31
1.9 Girokopas ir jo taikymai	36
1.10 Analogija tarp slenkamojo ir sukamojo judėjimo charakteristikų	43
1.11 Įvairūs kietojo kūno dinamikos pavyzdžiai	43
II. Hidrodinamika	62
2.1 Hidrodinamika. Tolydumo lygtis	62
2.2 Bernulio lygtis. Lėktuvo sparno keliamoji jėga	63
2.3 Klampaus skysčio judesys. Stokso pasipriešinimo dėsnis	67
III. Svyravimai	70
3.1 Laisvi harmoniniai materialaus taško svyravimai. Dažnis, periodas. Pavyzdžiai	70
3.2 Spyruoklių jungimas	77
3.3 Fizinė svyrųoklė	79
3.4 Harmoniškai svyruojančio kūno energija	84
3.5 Vienoje tiesėje vykstančių svyravimų sudėtis	86
3.6 Slopinamieji svyravimai	91
3.7 Priverstiniai svyravimai. Rezonansas	95
IV. Bangos	98
4.1 Banga. Skersinė ir išilginė banga. Bangos greitis, ilgis, periodas	98
4.2 Hiuigenso principas	101
4.3 Bangos lygtis	103
4.4 Bangų interferencija. Stovinčios bangos	105
4.5 Doplerio efektas	109
4.6 Garso bangos	112