1.

Slėgis bet kuriame iš burbulų bus lygus atmosferos slėgio ir muilo paviršiaus įtempimo kuriamo slėgio sumai. Parašome tris lygtis kiekvienam iš burbulų:

$$P_1 = P_0 + \frac{4\sigma}{R_1}$$
$$P_2 = P_0 + \frac{4\sigma}{R_2}$$
$$P = P_0 + \frac{4\sigma}{R}$$

Kadangi muilo burbulas turi du paviršius (sluoksnio vidus ir išorė), jo kuriamas slėgis bus lygus $\frac{4\sigma}{R}$*, o ne* $\frac{2\sigma}{R}$.

Iš kitos pusės, galime slėgius susieti per dujų būsenos lygtį:

$$P_1 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3 = n_1 RT$$
$$P_2 \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3 = n_2 RT$$
$$P \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = (n_1 + n_2)RT$$

$$PR^3 = P_1 R_1^3 + P_2 R_2^3$$
$$\left(P_0 + \frac{4\sigma}{R}\right)R^3 = \left(P_0 + \frac{4\sigma}{R_1}\right)R_1^3 + \left(P_0 + \frac{4\sigma}{R_2}\right)R_2^3$$
$$P_0 R^3 + 4\sigma R^2 = P_0 R_1^3 + 4\sigma R_1^2 + P_0 R_2^3 + 4\sigma R_2^2$$

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{4} P_0 \frac{R^3 - R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2 - R^2}}$$

2.

Vandens lašo paviršius dėl paviršiaus įtempimo jėgų turi energiją, lygią $\sigma * S$. Vadinasi, kad į lašą patektų daugiau vandens, tam reikalinga energija $\sigma * \Delta S$. Jeigu garų kondensacijos atiduota energija $L * \Delta m$ bus mažesnė už šią energiją, reikalingą susikondensavusiems garams patekti į lašą, garai kondensuotis negalės.

$$L\Delta m < \sigma\Delta S$$

Δm - kondensavusių garų masė.
ΔS - vandens lašo paviršiaus ploto pokytis.

$$\Delta S = 4\pi(R+\Delta R)^2 - 4\pi R^2$$
$$\Delta R << R$$
$$\Delta S \approx 4\pi(R^2 + 2R\Delta R - R^2)$$
$$\Delta S \approx 8\pi R\Delta R$$

$$\Delta m = \rho\Delta V$$
$$\Delta m = \frac{4}{3}\pi\rho(R+\Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$
$$\Delta m \approx 4\pi\rho R^2\Delta R$$

$$L \cdot 4\pi\rho R^2\Delta R < \sigma \cdot 8\pi R\Delta R$$
$$L \cdot \rho R < \sigma \cdot 2$$

$$\boxed{R < \frac{2\sigma}{L\rho}}$$

Tuomet ribinis spindulys, žemiau kurio kondensuotis garai negalės, yra lygus

$$\boxed{R_0 = \frac{2\sigma}{L\rho} \qquad R_0 = 6{,}38 * 10^{-11} m}$$

Tačiau tai – dydis, maždaug penkis kartus mažesnis už vandens molekulės diametrą (0.278nm), tad vandens kondensacija duotomis sąlygomis visada vyks.

3.

Kamuoliukas grįžta į pradinę padėtį, todėl, pagal energijos tvermės dėsnį, tašelis po antro smūgio nejudės ir bus ten pat, kur buvo iš pradžių. Vadinasi, antrasis smūgis yra tarsi pirmojo atvaizdas: pirmojo smūgio metu tašelis išjudinamas, antrojo – sustabdomas toje pačioje vietoje.

Po pirmojo smūgio tašelis pradės harmoniškai svyruoti, o kamuoliukas atšoks (kadangi jo masė mažesnė). Tašelis grįš į pradinę padėtį (ir jo greitis bus toks pats, tik nukreiptas į priešingą pusę) po pusės svyravimo periodo T. Jeigu kamuoliukas per tą laiką irgi spės sugrįžti į pirmojo smūgio vietą, įvyks toks smūgis, kokio reikia, kad tašelis sustotų ir kamuoliukas grįžtų į pradinę padėtį.

$\frac{1}{2}T = 2\frac{v`}{g}$ $v`$ - kamuoliuko greitis po pirmojo smūgio

Smūgio metu išlaikomas judesio kiekis bei energija:

$$\begin{cases} m_1 v = m_1 v` + m_2 u \\ \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_2 v`^2 + \frac{1}{2} m_1 u^2 \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname

$$v` = v\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$|v`| = \sqrt{2gh}\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

Spyruoklės svyravimo periodas $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$.

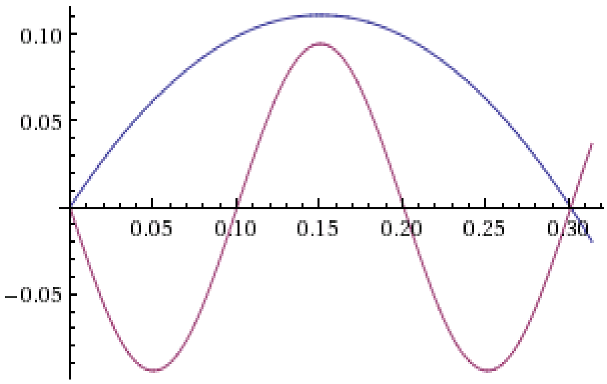
Susistatę T ir $v`$ į pirmąją lygtį ir ją išsprendę, gauname

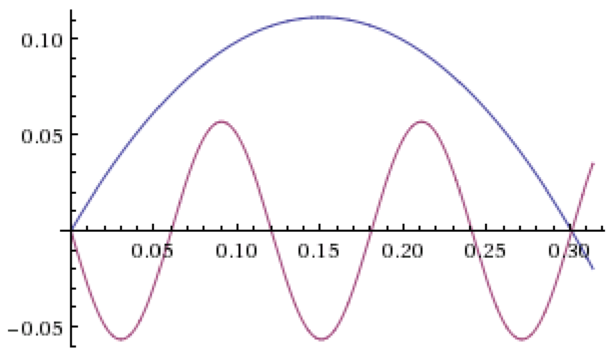
$$\boxed{\begin{gathered} k = \frac{\pi^2 m_2 g}{8h}\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1}\right)^2 \\ k = 21{,}7\,\frac{N}{m} \end{gathered}}$$

Tašelis grįžtų į pradinę padėtį su priešingu greičiu ir po bet kokio sveiko skaičiaus pusperiodžių - $\left(\frac{1}{2}+n\right)\cdot T$. Tačiau ne su visomis n reikšmėmis bus tenkinamos reikalingos sąlygos, kadangi esant $n \geq 1$ atsiranda galimybė tašeliui susidurti su rutuliuku prieš pasiekiant pirmojo smūgio vietą. Iš esmės galima būtų surasti visus n, su kuriais jie susiduria tada, kada reikia, ir kaip atsakymą pateikti n skirtingų k reikšmių.

Kadangi spyruoklės tamprumas priklauso nuo n, tašelio svyravimo amplitude irgi priklauso nuo n, tad uždavinys pasidaro gan sudėtingas. Dėl to spręsti jį reikia įsistatant n ir tikrinant, ar kūnai nesusidaužia. Tačiau vieno kūno aukščio priklausomybė nuo laiko – sinusoidė, kito – parabolė, tad bandant surasti susidaužimo momentą lygtimis gautume transcendentinę lygtį. Dėl to reikia brėžti kūnų aukščių priklausomybes nuo laiko su skirtingais n ir tikrinti, ar jie nesusidaužia.

Aukščių priklausomybės nuo laiko paėmus $n=1$ ir $n=2$:





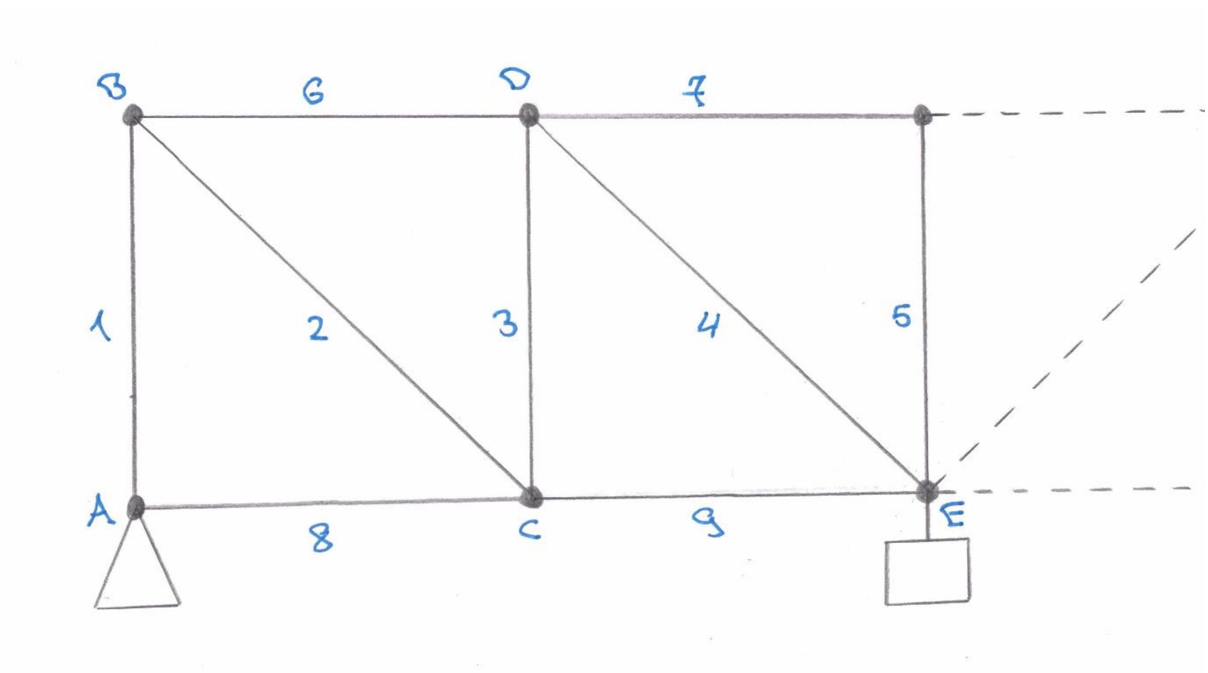
Sudėtinga tokio uždavinio matematika leidžia jį išspręsti tik dirbant su kompiuteriu ir braižant daug skirtingų grafikų, kol pagaliau rasime ribinį n, su kuriuo grafikai jau susikerta prieš įvykstant reikalingam smūgiui (ties $n=20$ grafikai vis dar nesikerta, tad spėlioti / dirbti reikėtų nemažai). Tai nėra olimpiadinis uždavinys, tad čia tiesiog analizuojame paprasčiausią, užtikrintą variantą $n=0$.

4.

Iš pradžių surasime visas vertikalių ir pasvirusių šiaudų jėgas, tada iš pasvirusių šiaudų išplauks horizontalių jėgos.

Analizuosime tik kairiąją tilto pusę, kadangi dešinė bus visiškai analogiška.

Suspaustųjų strypų įtempimo jėga bus neigiama, ištemptų – teigiama.



Kadangi kūnelis tempia tiltą žemyn jėga mg, dvi atramos turi veikti tiltą į viršų jėgomis 0,5 mg.

Tuomet atrama veikia jungtį A jėga 0,5 mg į viršų. Kad jungtis nejudėtų, 1-asis šiaudas turi veikti jį žemyn tokia pat jėga, t.y. $T_1 = -\frac{1}{2}mg$ (minusas, nes šiaudas suspaustas). 8-asis strypas negali veikti jungties vertikaliai, tad $T_8 = 0$.

1-asis šiaudas tuomet stumia jungtį B į viršų jėga 0,5 mg. Kad jungtis nejudėtų, 2-asis strypas turi traukti ją žemyn jėga, kurios vertikali projekcija lygi 0,5 mg. Kadangi tai – kvadrato įžambinė, $T_2 = \sqrt{2}T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}mg$ (šiaudas ištemptas).

Analogiškai einame per visas jungtis: pažvelgę į jungtį B veikiančias horizontalias jėgas, randame $T_6 = -\frac{1}{2}mg$ (kompensuoja 2-ojo strypo horizontalią jėgą), C horizontalias: $T_9 = \frac{1}{2}mg$,

C vertikalias: $T_3 = -\frac{1}{2}mg$,

D vertikalias: $T_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}mg$,

D horizontalias: $T_7 = -mg$.

Jungtį E kūnelis traukia žemyn jėga mg, tačiau du strypai (4-as ir simetriškas dešinėje) traukia į viršų jėgomis 0,5 mg, tad šios jėgos išsiprastina ir iš to $T_5 = 0$.

Atsakymai:

$T_1 = -\frac{1}{2}mg$

$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}mg$

$T_3 = -\frac{1}{2}mg$

$T_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}mg$

$T_5 = 0$

$T_6 = -\frac{1}{2}mg$

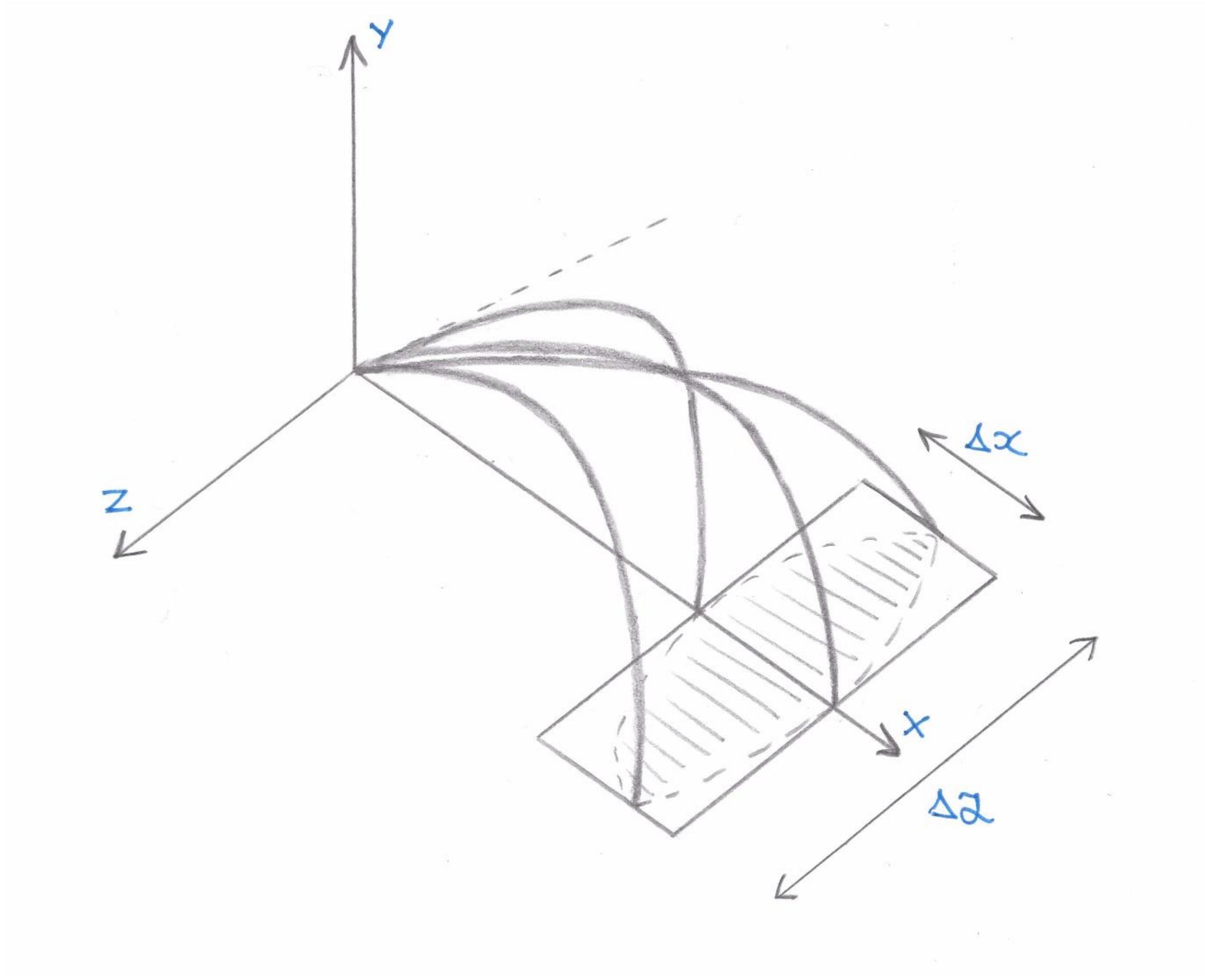
$T_7 = -mg$

$T_8 = 0$

$T_9 = \frac{1}{2}mg$

5.

Apibrėžkime sritį, kurioje gali nukristi šratai, mažiausiu įmanomu stačiakampiu.



Viena iš šio stačiakampio kraštinių bus du toliausiai vienas nuo kito nutolę šratai Z kryptimi, kita – X kryptimi (tad iš viso reikės 4 skirtingais kampais paleistų šratų, žr. brėžinį). Stačiakampio kraštinės Δz ir Δx.

Jeigu bent viena iš šio stačiakampio kraštinių bus didesnė nei 4 km, tikrai bus įmanoma apšaudyti žemės paviršiaus taškus, nutolusius 4 km vienas nuo kito.

Jeigu bent viena iš šio stačiakampio kraštinių bus mažesnė už lygiakraščio trikampio aukštinę $4\sin 60^o \approx 3{,}46$ km, į sritį toks lygiakraštis trikampis niekaip netilps.

Toliausiai Z ašyje nukris šratas, „išskleistas“ 5 laipsnių kampu Z ašies kryptimi. Vieno tokio nukritusio šrato atstumas iki X ašies bus lygus pusei stačiakampio kraštinės Δz.

$$\frac{1}{2}\Delta z = v\sin\alpha\cdot\tau$$

τ - laikas, po kurio šratas nukris ant žemės.

$$g\tau = 2v\sin\beta$$

$$\frac{1}{2}\Delta z = 2\frac{v^2}{g}\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Delta z = 4\frac{v^2}{g}\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Delta z \approx 6{,}3km$$

Toliausiai X kryptimi nuskris šratas, iššautas tiesiog 45 laipsnių kampu XY plokštumoje. Kad surasti stačiakampio kraštinę Δx, dar reikia šrato, nukrisiančio arčiausiai medžiotojo. Brėžinyje pavaizduotas 50 laipsnių kampu šautas šratas, tačiau toje pačioje vietoje nukristų ir 40 laipsnių šratas. Tuo galite įsitikinti galutinėje Δx formulėje vietoj α įsistatę $-\alpha$.

$$\Delta x = x(\beta) - x(\beta+\alpha)$$

$$x = v\cos\theta\cdot\tau$$

$$g\tau = 2v\sin\theta$$

$$x(\theta) = \frac{v^2}{g}\sin 2\theta$$

$$x(\beta) - x(\beta+\alpha) = \frac{v^2}{g}(\sin 2\beta - \sin 2(\beta+\alpha))$$

$$\Delta x = \frac{v^2}{g}(\sin 2\beta - \sin 2(\beta+\alpha))$$

$$\Delta x \approx 0{,}4km$$

Kaip matome, Δz > 4 km, tad du taškus, nutolusius per 4 km vienas nuo kito apšaudyti įmanoma. Tačiau Δx < 3,46 km, tad trejų taškų, sudarančių lygiakraštį 4 km kraštinės trikampį, apšaudyti neįmanoma.

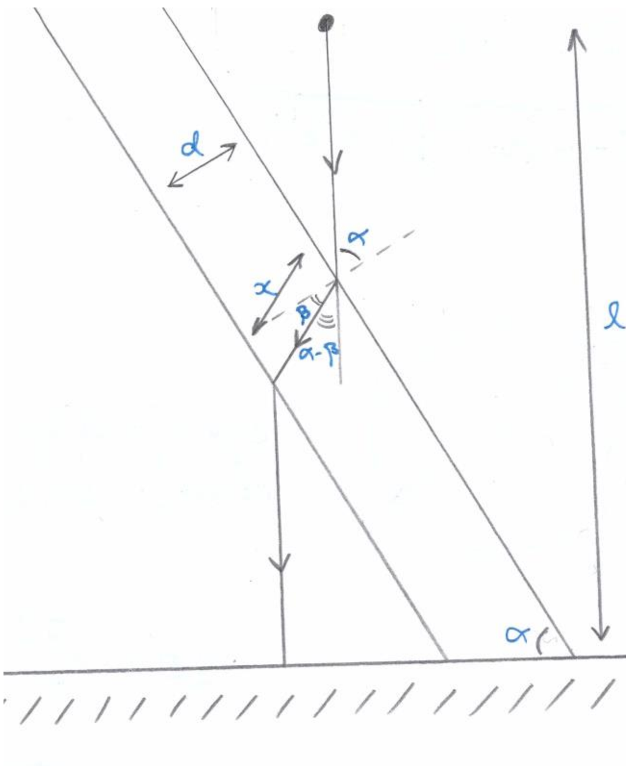
6.

Kadangi ieškome trumpiausio kelio tarp dviejų taškų, čia patogu taikyti geometrinę optiką, kadangi šviesos spindulio kelios iš vieno taško į kitą visada yra trumpiausias įmanomas. Tarkime, vergai – šviesos spindulys, dykuma – terpė, kurios lūžio rodiklis lygus 1 ir kopa – terpė, kurios lūžio rodiklis lygus 2.

Kad ir kur iš kopos išsikapanotų vergai, iki upės trumpiausias kelias bus statmenai krantui. Bet tada pagal optikos dėsnius ir priešingoje kopos pusėje vergai turėjo judėti statmenai upės krantui. Vadinasi, iki kopos vergai turi judėti taip tarsi jos nebūtų, tada ją kirsti pagal optikos dėsnius ir toliau traukti link upės.

$$t_2 = \frac{L-x}{v} + \frac{x}{v/2} = \frac{L+x}{v}$$

$$t_1 = \frac{l}{v}$$



$$\begin{cases} t_2 = t_1 \dfrac{L+x}{l} \\ x = \dfrac{d}{\cos\beta} \\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2 \\ l = L - x + x\cos(\alpha-\beta) \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, gauname

$$t_2 = t_1\left[1 + \frac{d}{l}\left(\sqrt{3+\cos^2\alpha} - \cos\alpha\right)\right]$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta t = t_1 \frac{d}{l}\left(\sqrt{3+\cos^2\alpha} - \cos\alpha\right) \\ &\Delta t \approx 1h \end{aligned}}$$

7.

Po labai ilgo laiko tarpo rutuliukų sistema per laiką $\frac{d}{v}$ nukeliauja atstumą d. Per šį laiką sistema dėl stūmimo įgauna judesio kiekį $F\frac{d}{v}$, tačiau atsitrenkusi į naują rutuliuką jam atiduoda judesio kiekį mv. Nusistovėjus greičiui visas sistemos įgautas judesio kiekis pavirs naujo rutuliuko judesio kiekiu ir sistemos greitis nekis.

$$F\frac{d}{v} = mv$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Fd}{m}}}$$

II būdas

Šį uždavinį galima spręsti keliais būdais, nes duota daugiau duomenų, nei reikia: kai smūgiai yra visiškai netamprūs, greitis nusistovės. Spręsdami pirmu būdu, pasinaudojome greičio nusistovėjimu. Dabar (beveik) išspręsime iš visiškai netampraus smūgio pusės (vis tiek naudosimės visais duomenimis, tiesiog parodysime, kad galima be to apsieiti).

Įprasta traktuoti, kad visiškai netamprus susidūrimas yra, kai du kūnai sulimpa, bet iš esmės situacija yra ta pati, kai du kūnai po susidūrimo juda viena kryptimi vienodu greičiu (ir dėl to visą laiką vienas šalia kito).

Šiame uždavinyje jėga visada veikia pirmąjį rutuliuką, todėl prieš jį esantys rutuliukai nejudės greičiau už pirmąjį ir visi judės vienodu greičiu kaip vienas ilgas kietasis kūnas.

Tarkime, po susidūrimo su n-uoju rutuliuku, tos n rutuliukų juostos greitis yra v_n. Pajudėję atstumą d iki n+1-ojo rutuliuko, prieš smūgį rutuliukai įgijo greitį $v_n^{'}$, kurį randame iš energijos tvermės dėsnio:

$\frac{1}{2}nmv_n^2 + Fd = \frac{1}{2}nmv_n^{'2}$

$v_n^{'} = \sqrt{v_n^2 + \frac{2Fd}{nm}}$

Po susidūrimo iš judesio tvermės dėsnio randame v_{n+1}:

$nmv_n^{'} = (n+1)mv_{n+1}$

Viską įsistatę, gauname: $v_{n+1} = \frac{n}{n+1}\sqrt{v_n^2 + \frac{2Fd}{nm}}$

(Pasinaudodami paskutiniąja lygtimi, galėtume griežtai matematiškai įrodyti, kad greitis nusistovi.)

Perrašykime

$v_{n+1} = \frac{n}{n+1}v_n\sqrt{1 + \frac{2Fd}{v_n^2 nm}}$

ir išskleiskime $v_{n+1} \approx \frac{n}{n+1}v_n\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2Fd}{v_n^2 nm}\right)$.

Pasinaudodami $v_{n+1} = v_n$ (nepamiršdami, kad $n \to \infty$), gauname:

$v_{n\to\infty} = \sqrt{\frac{Fd}{m}}$

8.

Labai panašus uždavinys buvo spręstas 1984m. tarptautinėje olimpiadoje:

http://olimpas.lt/konspektai/I-XVol_sprend.pdf , 64 (olimpiados pirmo teorinio) uždavinio b) bei c) atvėjai. Čia analizuojamas miražas dykumoje, kurio susidarymo principas yra visiškai analogiškas kelio miražo (kelio balos – dangaus „atspindžiai“ kelyje).

Atsakymas:

$$L = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{T(n-1)+T_1}{T(n-1)+T_2}\cdot\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1}}$$

T_n - duotosios temperatūros t_n, išreikštos kelvinais.

$L \approx 220m$

9.

***

September 2, 2010

Tegul α yra metimo kampas, β - kampas tarp atšokimo krypties bei horizonto. Pradinis greitis v_0. Tada namo stogo krašto koordinatės (koordinačių pradžia - išmetimo taškas):

$$\begin{cases} y_f = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_1^2 \\ x_f = v_0 t_1 \cos\alpha. \end{cases} \tag{1}$$

Analogiškai metimo taško koordinatės :

$$\begin{cases} 0 = y_f + v_0' t_2 \sin\beta - \frac{1}{2} g t_2^2 \\ 0 = x_f - v_0' t_2 \cos\beta. \end{cases} \tag{2}$$

Čia v_0' - greitis aukštyje y_f:

$$v_0' = \sqrt{v_0^2 - 2 g y_f}. \tag{3}$$

Įrašius (3) į (2), pakėlus kvadratu bei sudėjus abi sistemos (2) lygtis:

$$y_f^2 + x_f^2 + \frac{1}{4} g^2 t_2^4 = v_0^2 t_2^2 - g y_f t_2^2. \tag{4}$$

Panašiai iš (1):

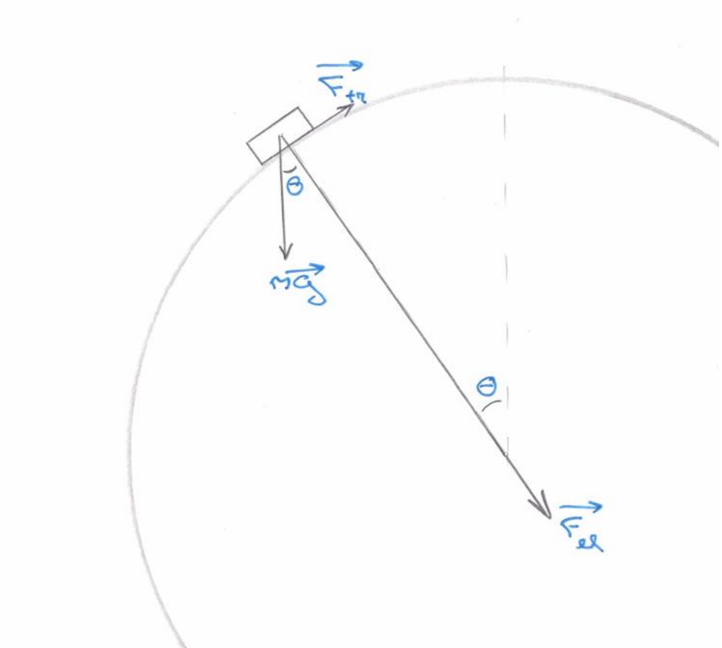
$$y_f^2 + x_f^2 + \frac{1}{4} g^2 t_1^4 = v_0^2 t_1^2 - g y_f t_1^2. \tag{5}$$

(4)-(5) sistema jau redukuojasi į : $y_f^2 + x_f^2 = \frac{1}{4} g^2 t_1^2 t_2^2 \Longleftrightarrow L = \frac{1}{2} g t_1 t_2$.

10.

Tikimybė tašeliui išsilaikyti bus lygi ploto, kuriame padėtas tašelis nejuda, santykiui su visu rutulio plotu.

$$F_{el} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \approx 9N$$
$$mg = 0{,}98N$$



Jeigu tenkinama sąlyga $mg\sin\theta < F_{tr}$, tašelis tokioje padėtyje padėtas nejudės. F_{tr} - maksimali trinties jėga tarp tašelio ir rutulio.

$$\begin{cases} mg\sin\theta < F_{tr} \\ F_{tr} = \mu(mg\cos\theta + F_{el}) \end{cases}$$

$$\sin\theta - \mu\cos\theta < \mu\frac{F_{el}}{mg}$$

Paprastumui pasižymime $\frac{F_{el}}{mg} = k \approx 9{,}18$

$$\sqrt{1-\cos^2\theta} < \mu\cos\theta + \mu k$$

Sutvarkę lygtį, gauname

$$\cos^2\theta\cdot(1+\mu^2) + \cos\theta\cdot 2k\mu^2 - (1-k^2\mu^2) > 0$$

Tai – parabolė šakomis į viršų, kertanti X ašį dvejose vietose (kurios apibrėžimo sritis yra nuo -1 iki 1, kadangi X ašyje atidėta $\cos\theta$). Todėl kai rasime dvi $\cos\theta$ reikšmes prilyginę šią lygtį nuliui, mus domins visos likusios reikšmės, esančios ne tarp jų – ten gautos lygties reikšmės bus didesnės už 0.

$$\cos\theta = \frac{1}{1+\mu^2}\left(-k\mu^2 \pm \sqrt{k^2\mu^4 + (1+\mu^2)(1-k^2\mu^2)}\right)$$
$$\cos\theta_1 \approx 0{,}31$$
$$\cos\theta_2 \approx -0{,}45$$

Vadinasi, kai $\cos\theta \in [-1;-0{,}45] \cup [+0{,}31;+1]$, arba $\theta \in [0^o;72^o] \cup [117^o;180^o]$, tašelis nejudės. Kitaip tariant, sritis, kurioje tašelis nuslysta žemyn, yra maždaug aplink rutulio pusiaują – logiška, kadangi ten sunkio jėgos dedamoji $mg\sin\theta$, bandanti išjudinti tašelį, yra didžiausia.

Tuomet ieškomas plotas bus lygus dviejų rutulio nuopjovų paviršiaus plotų sumai, kurią patogiausia suskaičiuoti pasinaudojant erdviniais kampais.

$$p = \frac{S_1 + S_2}{4\pi R^2}$$
$$S = \Omega R^2$$
$$\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$$

$$p = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\cos\theta_1 + |\cos\theta_2|\right)$$

$$\boxed{p \approx 62\%}$$

11 uždavinio sprendimas

Pasižymėkime lemputės varžą R, ilgintuvo varžą r. Nominali lemputės galia P_0 realiai pasiekiama, kai lemputė prijungiama tiesiogiai prie $U = 220\,\mathrm{V}$ įtampos. Kai ji prijungiama per ilgintuvą, lempute teka srovė $U/(R+r)$, taigi

$$P_0 = \frac{U^2}{R} \qquad P_1 = R\left(\frac{U}{R+r}\right)^2 \qquad \Rightarrow \tag{1}$$

$$R = \frac{U^2}{P_0} \qquad r = U^2\left(\frac{1}{\sqrt{P_0 P_1}} - \frac{1}{P_0}\right) \tag{2}$$

Tarkime, kad siurbliui veikiant (praėjus ilgam laikui po įsijungimo) ilgintuvu teka srovė I_3, o siurblio varža R_s. Elektros prietaisai prie ilgintuvo jungiami tik lygiagrečiai, todėl šiuo atveju siurblys ir lemputė sujungti lygiagrečiai, ir prie šios sistemos nuosekliai prijungtas ilgintuvas. Todėl įtampa ant lemputės gnybtų yra $U - RI_3$ ir

$$P_3 = \frac{(U - RI_3)^2}{R} = P_0\left(1 - \frac{rI_3}{U}\right)^2 \tag{3}$$

Iš čia gauname

$$I_3 = \frac{U}{r}\left(1 - \sqrt{\frac{P_3}{P_0}}\right) \tag{4}$$

Kita vertus, per ilgintuvą tekanti srovė lygi lemputės ir siurblio srovių sumai:

$$I_3 = (U - rI_3)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_s}\right) \tag{5}$$

Todėl, pasinaudodami (3), (4) ir (5) galime parašyti

$$\frac{1}{R_s} = \frac{I_3}{U - RI_3} - \frac{1}{R} = \frac{1}{U^2}\left(\sqrt{\frac{P_0}{P_3}}\frac{P_0 - \sqrt{P_0 P_3}}{\sqrt{P_0/P_1} - 1} - P_0\right) \tag{6}$$

Taigi siurblio nominali ir realiai išvystoma galios yra atitinkamai

$$P_{s0} = \frac{U^2}{R_s} = \sqrt{\frac{P_0}{P_3}}\frac{P_0 - \sqrt{P_0 P_3}}{\sqrt{P_0/P_1} - 1} - P_0 \approx 1.42\,\mathrm{kW} \tag{7}$$

$$P_s = \frac{(U - RI_3)^2}{R_s} = \frac{P_3 R}{R_s} = \sqrt{\frac{P_3}{P_0}}\frac{P_0 - \sqrt{P_0 P_3}}{\sqrt{P_0/P_1} - 1} - P_3 \approx 1.07\,\mathrm{kW} \tag{8}$$

Analogiškai randame siurblio galią pirmąją veikimo sekundę P_s'.

$$P_s' = \sqrt{\frac{P_2}{P_0}}\frac{P_0 - \sqrt{P_0 P_2}}{\sqrt{P_0/P_1} - 1} - P_2 \approx 2.13\,\mathrm{kW} \tag{9}$$

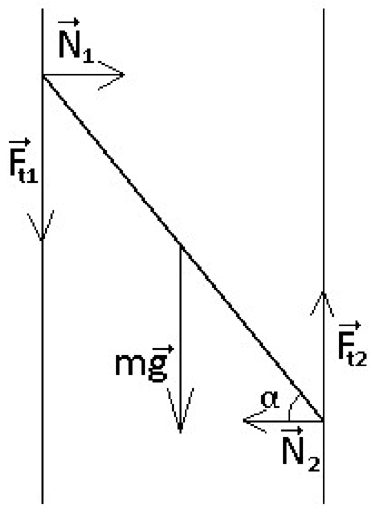
Kai siurblys įjungiamas, jo variklio sukimosi greitis kurį laiką didėja, kol pasiekia maksimalią vertę. Varikliui sukantis pastoviu greičiu, visa iš elektros tinklo gaunama energija suvartojama siurbimui ir trinčiai nugalėti. Tik įjungus siurblį, reikia daugiau energijos, kuri sunaudojama siurblio varikliui greitinti. Todėl variklio kinetinę energiją galima apytikriai nustatyti apskaičiavus papildomai sunaudotą elektros energiją:

$$E_k \approx (P_s' - P_s)\,t \approx 1\,\mathrm{kJ} \tag{10}$$

Šis įvertinimas labai apytikris, nes kol variklis sukasi lėčiau nei maksimaliu greičiu, siurbimui ir trinčiai nugalėti suvartojama mažiau energijos nei paprastai. Be to, neatsižvelgiama į energijos nuostolius variklyje.

12 uždavinio sprendimas

I būdas (griežtas)



Strypas yra pusiausvyroje, todėl jį veikianti jėgų atstojamoji ir jėgos momentas yra lygūs 0. Iš brėžinio:

$h = \frac{L}{cos\alpha}$, kur h - strypo ilgis.

$N_1 - N_2 = 0$

$F_{t2} - F_{t1} = mg$

Jėgos momentas yra 0 bet kurio taško atžvilgiu. Dėl patogumo mes pasirinksime strypo masės centrą:

$(N_1 + N_2)\,\frac{L}{2}\,sin\alpha = (F_{t1} + F_{t2})\,\frac{L}{2}\,cos\alpha$

Trinties jėgos: $F_{t1} = \mu\beta_1 N_1$, $F_{t2} = \mu\beta_2 N_2$, kur $-1 \le \beta_1, \beta_2 \le 1$.

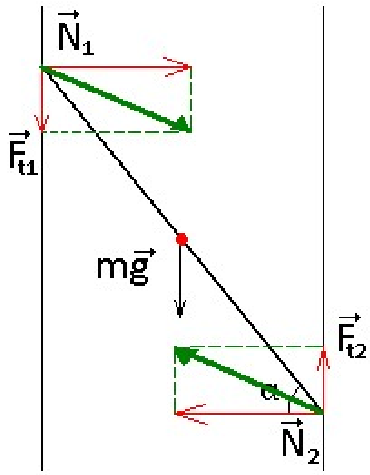
Viską susistatę, gauname:

$tan\alpha = \mu\left(\beta_2 - \frac{mg}{2\mu N}\right)$

Matome, kad didžiausias kampas bus tada, kai $\beta_2 = 1$ ir kai strypo masė yra žymiai mažesnė už jėgą, kuria įspraudžiamas strypas, t.y. $\frac{mg}{\mu N} \ll 1$.

Gauname: $tan\alpha = \mu$. Įsistatome į pirmąją lygtį, truputis trigonometrijos ir atsakymas: $h = L\,\sqrt{1+\mu^2}$.

II būdas



Pagudrausime, pasinaudodami simetrija apie tašką. Judesio kiekį nagrinėsime masės centro atžvilgiu, o strypą iš karto pasirenkame lengvą (silpnas argumentas, bet...: mūsų prašo didžiausio kampo, o mes galime įtarti, kad bemasis strypas nepamažins kampo, todėl tokį atvejį ir pasirenkame).

Kadangi horizontalios jėgos yra tik dvi atramos reakcijos jėgos, todėl jų moduliai turi būti lygūs $|N_1| = |N_2|$. Tas pats galioja ir trinties jėgoms. Dėl to kiekvieno kampo atramos reakcijos ir trinties jėgų atstojamoji jėga (brėžinyje pažymėtos žalia spalva) sudarys tą patį kampą su strypu, tik iš priešingų pusių. Jei atstojamosios jėgos nebus išilgai strypo, susidarys jėgų petys ir strypas nebebus pusiausviras, todėl būtinai $F_t = N \cdot tan\alpha$, o α bus tuo didesnis, kuo didesnis $\frac{F_t}{N}$.

Iš lygties $|F_t| \leq \mu\,|N|$ matome, kad maksimalus $\frac{F_t}{N} = \mu$.

Todėl maksimalus kampas bus $tan\alpha = \mu$.

$h = \frac{L}{cos\alpha}$, kur h - strypo ilgis.

Įsistačius kampą, $h = L\,\sqrt{1+\mu^2}$.

13.

Ribiniu atveju plieno įtempimo jėga ties sferos „pusiauju“ (dalinančiu sferą į dvi pussferes) bus lygi slėgio jėgoms, bandančioms atplėšti vieną pussferę nuo kitos.

$$F_m = \sigma S_m$$
$$S_m \approx 2\pi R \cdot d \quad (\text{ nes } d << R)$$
$$F_m = 2\pi R d \sigma$$

$$F_s = pS$$
$$S \approx \pi R^2$$
$$F_s = \pi p R^2$$

$$2\pi R d \sigma = \pi p R^2$$
$$2\sigma d = pR$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p = 2\sigma \dfrac{d}{R} \\ p = 17{,}2 MPa \end{array}}$$

14.

Tai, kad veidrodžių atspindžio koeficientas lygus $\frac{1}{2}$ reiškia, kad fotonas, atsimušęs į veidrodį, turi $\frac{1}{2}$ šansą nuo jo atsispindėti. Tuomet n kartų atsispindėjęs fotonas turi $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ šansą išlikti nesugertas.

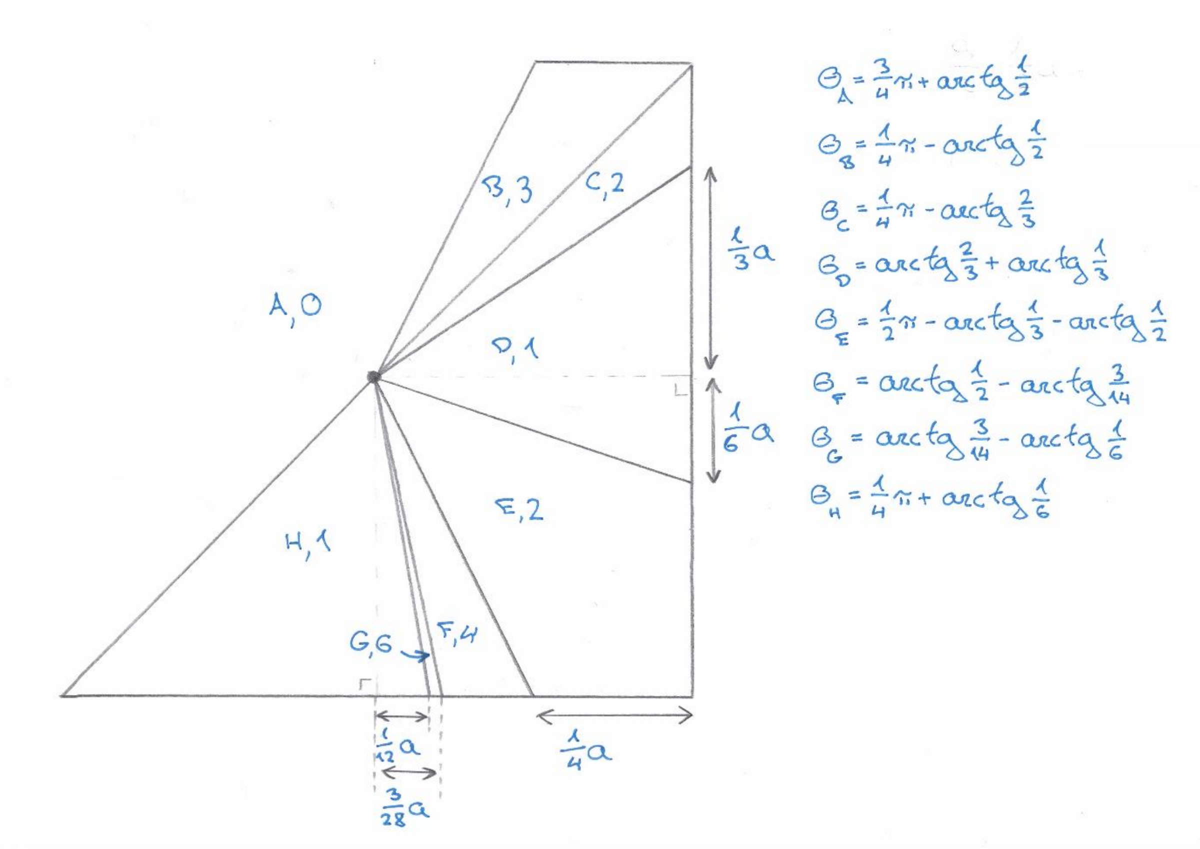
Reikia suskirstyti visą kampą 2π (radianais), kuriuo gali būti paleisti fotonai, į sritis taip, kad paleistas vienoje srityje fotonas atsispindėtų nuo veidrodžių tiek pat kartų, kiek ir betkur kitur toje pačioje srityje. Tuomet tikimybė fotonui išlėkti iš sistemos (likti nesugertam) bus lygi

$$p = \frac{\theta_A}{2\pi} \cdot \frac{1}{2^{n_A}} + \frac{\theta_B}{2\pi} \cdot \frac{1}{2^{n_B}} + \ldots$$

$$p = \frac{1}{2\pi} \sum \frac{\theta_x}{2^i}$$

x - srities indeksas (A , B , C , ..)
i - atsispindėjimų skaičius tam tikroje srityje

Sričių „žemėlapis“:



Raidė – srities indeksas, skaičius po kableliu – atsispindėjimų skaičius toje srityje.

Rasti šias sritis ir suskaičiuoti atspindžių skaičių – gan bjaurus geometrinis uždavinys. Turbūt sunkiausia yra rasti ribą tarp srities G ir F ; iš esmės galima tarti, kad sritis G priklauso sričiai F (t.y. joje fotonai atsispindi 4 kartus), kadangi srities G kampas akivaizdžiai mažas ir atsakymas nuo to beveik nepasikeis.

Įsistatę rastus duomenis į p formulę, gauname

$$\boxed{p \approx 64{,}5\%}$$

Tarus, kad visi G srities fotonai sugeriami, šis atsakymas nepasikeičia (pakinta tik antras skaičius po kablelio).

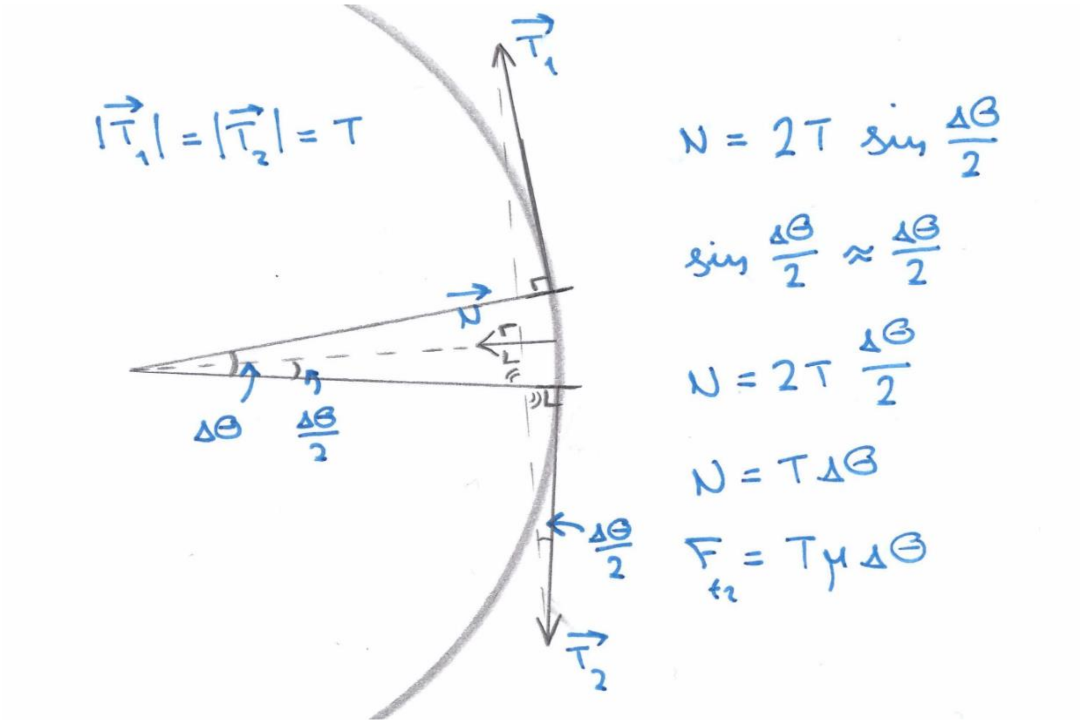
15.

Kitą virvės galą reikės veikti mažesne jėga, nei F , kadangi jai padeda trintis tarp virvės ir skridinio.

$$F = F` + \sum \Delta F$$

$\sum \Delta F$ - visų mažų virvės ilgio elementų, besiliečiančių su skridinių, kuriamų trinties jėgų (ΔF) suma.

Taip pat $\Delta F = T\mu\Delta\theta$. T – virvės įtempimo jėga ilgio elemente, $\Delta\theta$ - mažas kampas, gaubiantis virvės elementą. Įrodymas:



Taigi, virvės ilgio elementų kuriamos trinties jėgos priklauso tik nuo kampo, kuris gaubia tuos elementus, o ne nuo pačių elementų dydžio. Vadinasi, kad ir koks būtų ritinio spindulys, jeigu virvės sąlyčio su skridiniu lanko kampas bus toks pats, visi trinties jėgos elementai išliks tokie patys ir todėl jų suma taip pat išliks tokia pati.

Užrašę lygtis diferencialiniu pavidalu ir jas išsprendę gautume sąryšį $F` = F\exp(-\mu\theta)$. θ *- virvės ir skridinio sąlyčio lanko kampas radianais. Jis gali būti didesnis už* 2π *jeigu virvė bus apjuosta daugiau nei 1 kartą, tokiu atveju formulė irgi teisinga.*

II būdas

Spręsime pagal dimensijų analizę: pagal matavimo vienetus patikrinsime, ar gali būti fizikinių dydžių, susijusių su skridinio ir virvės sistema, kombinacija, matuojama niutonais, į kurią įeitų kokiu nors laipsniu skridinio spindulys.

Jėga F' gali priklausyti nuo F, μ, virvės masės m, skridinio masės M, skridinio spindulio R, virvės ir skridinio sąlyčio lanko kampo θ, laisvojo kritimo pagreičio g (jei skridinys vertikalus).

μ ir θ iš dimensijų analizės iškrenta, nes yra bedimensiniai.

Iš likusių dydžių F, m, M, g, R jėgos dimensiją turi šios kombinacijos: F, mg, Mg.

Neįmanoma R įkomponuoti į dydį, turintį jėgos dimensijas.

Vadinasi, atsižvelgiant į trinties ir gravitacijos jėgas, F' nepriklauso nuo R.

Pastaba: jei skridinys suktųsi, tada būtų kampinis greitis ir dimensijų analizė sufleruotų, kad F' gali priklausyti nuo R.

16.

Šiluma, kurią rezervuaras atiduoda aplinkai per laiko vienetą:

$$P_{-} = k(T - T_0)$$

Šiluma, kurią rezervuarui atiduoda naujai įpiltas vanduo (nusistovint temperatūrai) per laiko vienetą:

$$P_{+} = C\tfrac{\Delta m}{\Delta t}(T_1 - T)$$

Nusistovėjus pusiausvyrai $P_{+} = P_{-}$.

$$kT - kT_0 = C\tfrac{\Delta m}{\Delta t}T_1 - C\tfrac{\Delta m}{\Delta t}T$$

$$\boxed{T = \frac{kT_0 + CT_1\tfrac{\Delta m}{\Delta t}}{k + C\tfrac{\Delta m}{\Delta t}}}$$

17.

Prieš šildant dujas skystas vanduo (rūkas) neprisideda prie dujų slėgio.

Užrašome dujų būsenos lygtis prieš šildant rūką ir po:

$$\begin{cases} P_0 = \frac{n_0}{V} RT_0 \\ P = \left(\frac{n_0}{V} + \frac{n_r}{V} \right) RT \end{cases}$$

n_0 - *pradinių dujų molių kiekis.*

n_r - *rūko molių kiekis*

$$\frac{n_r}{V} = \frac{\rho_r}{\mu}$$

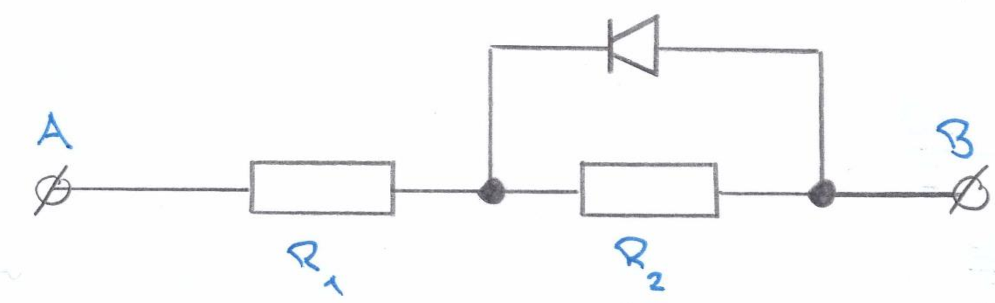
$$\frac{n_0}{V} = \frac{P_0}{RT_0}$$

$$P = P_0 \frac{T}{T_0} + \rho_r \frac{RT}{\mu}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_r &= \mu \frac{PT_0 - P_0 T}{RTT_0} \\ \rho_r &\approx 0{,}3 \tfrac{kg}{m^3} \end{aligned}}$$

18.

Iš viso įmanomos dvi grandinės. Pirmoji:



Toks sujungimas veiks tik jeigu sujungus grandinę pirmuoju atveju (srovė teka iš gnybto A į B, diodas srovės nepraleidžia) antrojo rezistoriaus įtampa bus didesnė, nei $0{,}3V$. Tada sujungus grandinę antruoju atveju srovė praeis pro diodą ir jo (bei antrojo rezistoriaus) įtampa bus lygi $0{,}3V$.

Kad antrojo rezistoriaus įtampa būtų didesnė, nei $0{,}3V$, rezistorių varžų santykis $\frac{R_1}{R_2}$ turi būti mažesnis, nei $\frac{7}{3}$.

$$\begin{cases} I_1(R_1 + R_2) = U \\ I_2 R_1 = U - \varepsilon \end{cases}$$

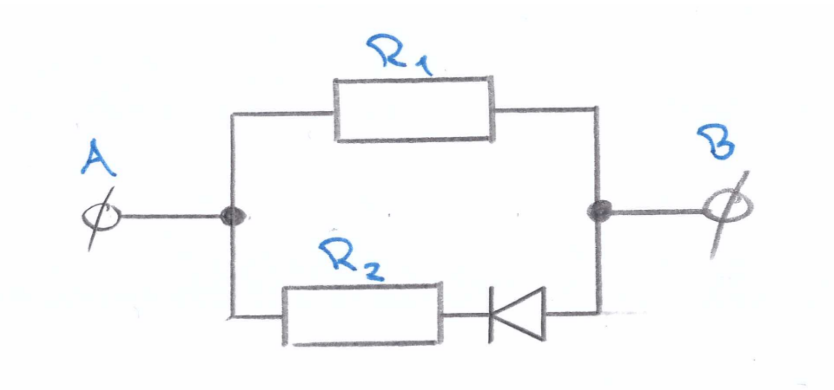
$$R_1 = \frac{U - \varepsilon}{I_2}$$

$$R_2 = \frac{U}{I_1} - \frac{U - \varepsilon}{I_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &\approx 167\Omega \\ R_2 &\approx 83\Omega \end{aligned}}$$

Kaip matome, $\frac{R_1}{R_2} = 2 = \frac{6}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1}{R_2} < \frac{7}{3}$, tad grandinė veiks taip, kaip tikėtasi.

Antroji grandinė:



Pirmuoju atveju srovė tekės tik pro pirmąjį rezistorių, antruoju – pro abu, bet tai nebus tiesiog dviejų lygiagrečiai sujungtų rezistorių grandinė, kadangi dalį įtampos „pasisavins“ diodas ir pro antrąjį rezistorių tekanti srovė bus mažesnė.

Abiem atvejais pro pirmąjį rezistorių tekės tokios pačios srovės, kadangi jis lygiagrečiai (jeigu neatsižvelgiame į ampermetro varžą) prijungtas prie šaltinio. Tuomet antrojo ir pirmojo atvejo srovių skirtumas bus lygus pro antrą rezistorių tekančiai srovei:

$$I_2 - I_1 = \frac{U - \varepsilon}{R_2}$$

$$R_2 = \frac{U - \varepsilon}{I_2 - I_1}$$

$$R_1 = \frac{U}{I_1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_1 &= 200\Omega \\ R_2 &= 700\Omega \end{aligned}}$$

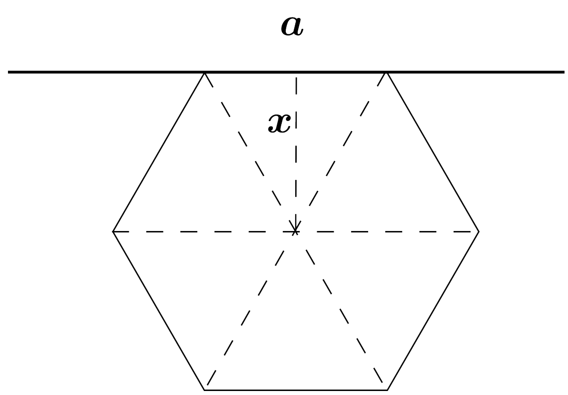
19.

Tam, kad rėmelis būtų pusiausvyroje, jį veikiantys jėgos momentai turi būti lygūs.

$$M_g = mgx\cos\alpha,$$

$$M_B = IBS\sin\alpha = IB\frac{lx}{2}\sin\alpha,$$

Kad taisyklingojo daugiakampio plotas yra $\frac{lx}{2}$ galima įsitikinti suskaidžius jį į N trikampių. $S = N \cdot \frac{ax}{2} = \frac{lx}{2}$.



$$m = \frac{IBL}{2g}\tan\alpha,$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R},$$

$$R = \rho\frac{l}{S_l},$$

$$V = S_l l,$$

Čia S_l yra laido skerspjūvio plotas.

$$\rho_x = \frac{m}{V},$$

$$\rho_x = \frac{B\varepsilon l S_l}{2g\rho l S_l l}\tan\alpha,$$

$$\boxed{\rho_x = \frac{B\varepsilon}{2\rho g l}\tan\alpha}$$

Kaip matome, jokioje sprendimo vietoje nebuvo panaudotas faktas, kad daugiakampis yra šešiakampis. Lygiai tas pats atsakymas tinka bet kokiam kitam taisyklingajam daugiakampiui.

20 uždavinio sprendimas

Jei smiltelė nė kiek neslysta per visą disko “svyravimo” periodą, tai akivaizdu, kad ji liks ant disko (toje pačioje jo vietoje) visą laiką. Bet jei smiltelė nors kiek slidinėja (nesvarbu, kuria kryptimi), dėl išcentrinės jėgos veikimo ji po truputėlį juda tolyn nuo disko ašies, kur disko paviršiaus pagreitis tik didėja. Todėl slidinėjimas tik stiprėja ir smiltelė galų gale nukrenta nuo disko krašto. Taigi po ilgo laiko tarpo ant disko liks tik tos smiltelės, kurios nuo pat pradžių visiškai nejuda disko atžvilgiu. Tokios smiltelės, nutolusios nuo disko centro atstumu r, tangentinis ir normalinis (įcentrinis) pagreičiai yra atitinkamai

$$a_T = r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\varphi_0 r\omega^2 \sin(\omega t) \qquad a_N = r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \varphi_0^2 r\omega^2 \cos^2(\omega t) \tag{1}$$

Šių pagreičių maksimalios vertės per svyravimo periodą yra atitinkamai $a_{Tm} = \varphi_0 r\omega^2$ ir $a_{Nm} = \varphi_0^2 r\omega^2$. Kadangi $\varphi_0 = 1^\circ \ll 1\,\mathrm{rad}$, tai $a_{Tm} \gg a_{Nm}$. Taip pat iš (1) matyti, kad $a_N = 0$ kai a_T įgyja maksimalią vertę, taigi smiltelė nejudės, jei trinties į disko paviršių jėga gali suteikti smiltelei pagreitį, ne mažesnį už a_{Tm}:

$$a_{Tm} < \frac{F_t}{m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 r\omega^2 < \frac{\mu m g}{m} = \mu g \quad \Rightarrow \quad r < \frac{\mu g}{\varphi_0\omega^2} \equiv r_0 \tag{2}$$

kur m - smiltelės masė. Kadangi smiltelės ant viso disko paviršiaus ploto pasiskirsčiusios tolygiai, po ilgo laiko ant disko liks jų dalis

$$\xi = \frac{\pi r_0^2}{\pi R^2} = \left(\frac{\mu g}{\varphi_0\omega^2 R}\right)^2 \approx 1.3 \times 10^{-4} \tag{3}$$