1 Nykštukė

Pasižymėkime nykštukės nueitą atstumą $S = 200\,\mathrm{m}$, pagreitį pirmojoje kelionės dalyje $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$, laiko dalį, sugaištą pirmajai kelionės daliai, $\gamma = 0.4$, visą kelionei sugaištą laiką t. Tada baigiantis pirmajai kelionės daliai nykštukės greitis $v = a\gamma t$. Kadangi pagreitis antrojoje kelionės dalyje pastovus, tai vidutinis jos greitis toje dalyje

$$\overline{v} = \frac{(v + 4v)}{2} = \frac{5v}{2}$$

taigi

$$S = \frac{a\left(\gamma t\right)^2}{2} + \frac{5v}{2}\left(1-\gamma\right)t = \frac{a\left(\gamma t\right)^2}{2} + \frac{5a\gamma}{2}\left(1-\gamma\right)t^2 = \frac{a\gamma t^2}{2}\left(5-4\gamma\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a\gamma\left(5-4\gamma\right)}} \qquad t = 12.1\,\mathrm{s}$$

2.

R	t, f
D	$h = 35\mu m = 3{,}5 \cdot 10^{-5} m$ $d = 13mm = 1{,}3 \cdot 10^{-2} m$ $P = 60mW = 0{,}06W$ $\eta = 0{,}8$ $L = 3{,}3 \cdot 10^{5} J$ $\rho = 1100 kg/m^3$
	$t_1 = 10ns$ $\Delta E = 1mJ = 10^{-3} J$

Lazerio tiekiama energija: $E = Pt$

Naudinga energija sunaudojama ragenai garinti: $\eta E = Q$

Tam reikalingas šilumos kiekis: $Q = mL$

$$m = h\frac{\pi d^2}{4}\rho$$

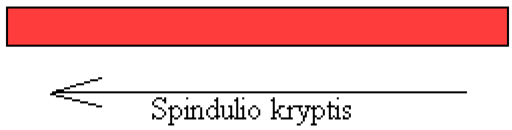
Turime visas lygtis, sustatome į vieną formulę:

$$\eta Pt = h\frac{\pi d^2}{4}\rho L$$

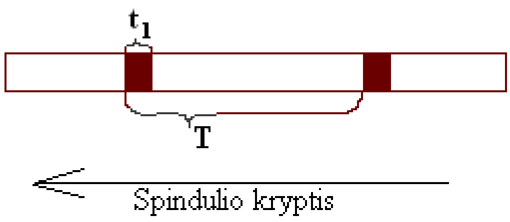
$$t = \frac{\pi d^2}{4\eta P} h\rho L$$

$$t = 35s$$

Impulsinio lazerio spindulys nėra tolygus, o sudarytas iš mažų impuslų ir didelių tarpų be šviesos, paprastai šnekant.



Vietoj



į

Dažnis : $f = \frac{1}{T}$

Vidutinė galia:

$$P = \frac{visa\ energija}{viso\ laiko\ (T, o\ ne\ t_1)}$$

$$P = \frac{\Delta E}{T}$$

$$f = \frac{P}{\Delta E}$$
$$f = 60Hz$$

3. Skridiniai

Jei siūlo įtempimo jėga yra T, tuomet skridinį, kuris pririštas prie 4kg kūno, veikia į viršų jėga 2T, o dešinį jo galą dar ir jėga T. Taigi, iš viso kabantį kūną veikia jėga $3T - mg = 0$, nes jis yra pusiausvyroje. Taigi, $T = mg/3$.
Jei ant sverto galo pakabinta masė M, tuomet svertą veikiančių jėgos momentų suma turi būti lygi 0:
$-Mg*b + T*c = 0$. Šiuo atveju $b = 3m$, $c = 2m$. Tuomet $M = (c/b)m/3 = 2m/9$.

Vandentiekio avarija

Jėga, kuria pensininkas turi spausti skylę, kad vanduo netekėtų yra $F = pS$, kur p - skysčio slėgis vamzdyje, S - skylės plotas. Jei vanduo veržiasi pro skylę greičiu v, tai vandens tūris ištekentis per laiko vienetą yra $Q = vS$, todėl $F = \frac{pQ}{v}$

Fontano vanduo sustoja pakilęs į aukštį H, todėl jei mažo vandens lašelio masė jam išlekiant iš vamzdžio m, tai pagal energijos tvermę

$$\frac{mv^2}{2} = mgH \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{2gH} \tag{1}$$

Kita vertus, slėgio jėgos, išstumdamos mažą tūrio V lašelį iš vamzdžio atliko darbą $A = pV$. Tada pagal energijos tvermę $pV = mgH$, taigi

$$p = \frac{mgH}{V} = \rho gH \tag{2}$$

Tada

$$F = \frac{pQ}{v} = \rho Q \cdot \sqrt{\frac{gH}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad F = 29\,\mathrm{N}$$

Pensininkui turėtų nesunkiai pavykti spausti gumą prie vamzdžio tokia jėga.

Čia pasirinktas sprendimo būdas, kuris turėtų būti suprantamas visiems, net ir jauniausiems, olimpiados dalyviams. Tie, kas moka Bernulio dėsnį idealiems skysčiams, gali gauti (1) ir (2) tiesiogiai iš šio dėsnio be jokių papildomų samprotavimų.

Sviediniai

Sprogimo energija susideda iš trijų dalių: skeveldrų kinetinės energijos, energija sunaudota metalui suskaldyti į 2 dalis (ji yra sunaudojama deformacijai atlikti) ir energija sunaudota sviediniu šildyti. Taigi $W = E_k + E + E_Q$.

$$E_Q = mc\Delta T, \tag{1}$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \tag{2}$$

čia v yra skeveldrų greitis iš karto po sprogimo. Abiejų skeveldrų greitis turi būti vienodas. Taip yra todėl, kad iš karto prieš sprogimą, masių centras nejudėjo, taigi vienodos skeveldros turi judėti vienodai greičiais priešingomis kryptimis, tam kad ir po sprogimo masių centras nejudėtų (judesio kiekio tvermės dėsnis).

Skeveldra, kuri lekia į viršų greičiu v, po laiko $\frac{2v}{g}$ grįš į tą patį tašką ir judės greičiu v žemyn. Todėl $\frac{2v}{g} = \Delta t$,

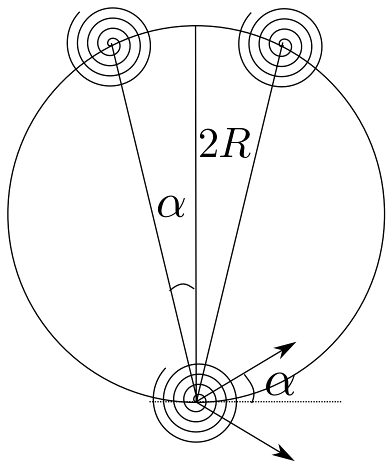
$$v = \frac{g\Delta t}{2}. \tag{3}$$

Vadinasi,

$$E_k = \frac{mg^2\Delta t^2}{8}. \tag{4}$$

Taigi sprogimo metu išsiskyrusi energija yra:

$$\boxed{W = \frac{mg^2\Delta t^2}{8} + E + mc\Delta T} \tag{5}$$



1 pav.: Trys sūkuriai

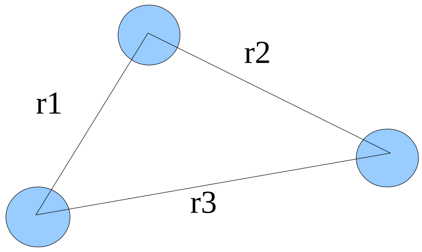
1. **Viesulai**. N vienodų oro sūkurių išsidėstę vienodais atstumais spindulio R apskritime. Kokiu kampiniu greičiu sukasi sūkuriai ratu, jei vienas sūkurys priverčia orą aplink jį suktis $v = \kappa/r$ greičiu (r – atstumas iki sūkurio centro), o patys sūkuriai yra nešami atstojamojo kitų sūkurių sukurto vėjo.

   Kadangi sūkuriai išsidėstę simetriškai visada rasime kitą tokį sūkurį, kurio vėjas prisidės taip, kad suminis greitis būtų tangentinis apskritimui (arba tai atvejis, kai sūkurys yra kitapus apskritimo). Taigi kiekvienas sūkurys prideda

   $$v_{\parallel} = \frac{\kappa}{2R\cos\alpha}\cos\alpha = \frac{\kappa}{2R},$$

   taigi suminis kampinis greitis bus $(N-1)\,\frac{\kappa}{2R^2}$

7. Trijų kūnų problema



Rekia taikyti energijos tvermės dėsnį. Pradinė sistemos energija yra:
$E = V(t = 0) = -Gm^2 * (1/a1 + 1/a2 + 1/a3)$.

Kiekvienu metu energija lygi kinetinės ir potencinės sumai:
$E = K(t) + V(t)$.

Kinetinė energija visuomet didesnė už nulį, todėl:
$E >= V(t)$

Tarkime, kad kažkuris is rutulių nutolsta į begalybę nuo kitų dviejų. Tuomet potencinė energija yra:
$V(t) = -Gm^2 * (1/r(t))^2$, kur $r(t)$ yra atstumas tarp kitų dviejų rutulių.

Vadinasi, $Gm^2 * (1/r(t)) <= Gm^2 * (1/a1 + 1/a2 + 1/a3)$.

$r(t) <= 1/(1/a1 + 1/a2 + 1/a3)$. Tačiau rutuliai turi baigtinį spindulį: t.y. $r(t) >= 2*R$, taigi, vienas iš rutulių gali pabėgti tik jei abi sąlygos gali būti tenkinamos, t.y. jei $2*R <= 1/(1/a1 + 1/a2 + 1/a3)$.

1. **Plentas**. Sniego valytuvas, važiuodamas $v = 40$ km/h greičiu, nuvalo $l = 20$ km kelio atkarpą sunaudodamas V tūrį degalų, jei sniego danga visur yra $h = 5$ cm. Kiek bus sunaudota degalų, jei dar ir nuolat snigs 50 mm/h greičiu. Degalų savitoji degimo šiluma q, valytuvo naudingumo koeficientas η (pastovus), sniego dangos pasipriešinimo jėga proporcinga jos storiui, o valytuvas, aišku, turi nuvalyti abi kelio puses per tą patį laiką.

   Valytuvas nuvažiuoja ir grįžta (skirtingomis kelio pusėmis), taigi visas atstumas lygus 40 km. Valytuvas važiuoja ir sninga pastoviu greičiu, todėl valytuvo valomo sniego dangos storis auga tiesiškai $h + ut$. Pasipriešinimo jėga yra $F = \alpha\,(h + ut) = \alpha\left(h + u\frac{x}{v}\right)$. Atliktas darbas lygus grafiko plotui. Nesunku įsitikinti, kad visas atliktas darbas yra pusantro karto didesnis, nei nesningant, todėl esant kitiems parametrams pastoviems, bus sunaudota pusantro karto daugiau degalų. Taip yra todėl, kad valytuvas kelyje užtrunka vieną valandą ir per tą laiką prisninga dar penkis centimetrus sniego, kurio pusė yra nuvaloma.

9 uždavinio sprendimas

a) Naudinga energija, kurią gauna puodas: Q=tP$\boldsymbol{\eta}$

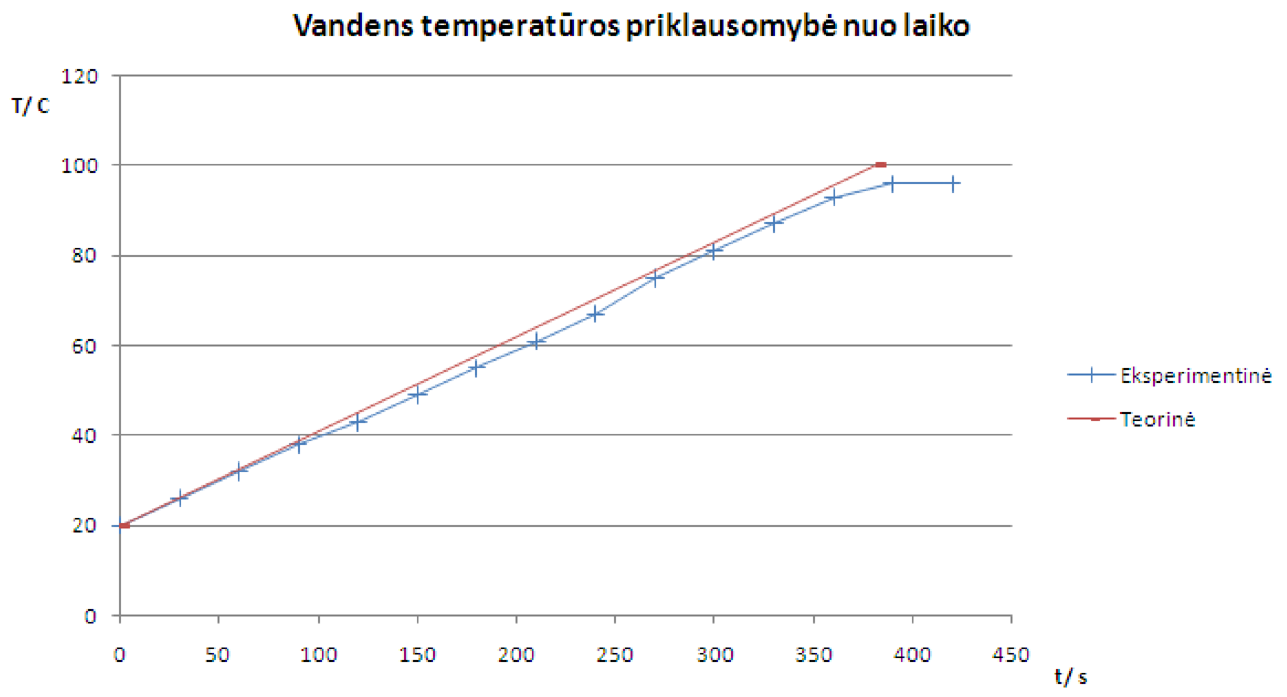
Šį šilumos kiekį gauna puodas ir vanduo: $Q=V\rho c_1(T_{100}-T_{20})+mc_2(T_{100}-T_{20})$

T_{100} - vandens virimo temperatūra

$V\rho c_1(T_{100}-T_{20})+mc_2(T_{100}-T_{20})=tP\eta$ $\quad t=\dfrac{(V\rho c_1+mc_2)(T_{100}-T_{20})}{P\eta}$ $\quad t=380\text{s}$

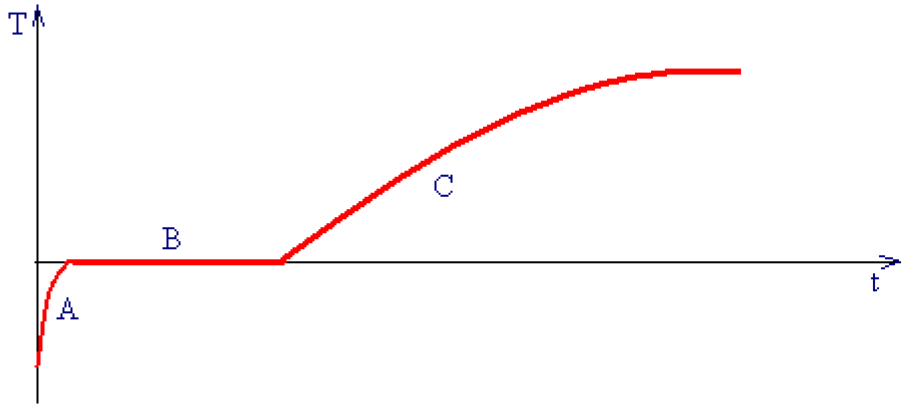
b)

i) Iš grafiko matome, kad temperatūra įsisotina ir vanduo neužvirs, nes nepasieks 100℃.



ii) Neatitikimo priežastis: šilumos nuostoliai tiesiškai priklauso nuo temperatūrų skirtumo tarp oro ir puodo temperatūros. Kuo didesnis skirtumas, tuo puodas intensyviau atiduoda energiją.

iii)



A - priklausomybė praktiškai tiesinė, mažas „pilvukas“ į viršų, nes dabar aplinka šildo puodą papildomai. „Teorinė“ kreivė būtų statesnė nei C dalyje, nes ledo savitoji šiluma mažesnė už vandens.

B – ledas lydosi, todėl temperatūra pastovi.

C – lygiai ta pati kreivė kaip (i) dalyje, tik paslinkta laiko ašyje, bet ne temperatūros. Intervale nuo 0 iki kambario temperatūros dar nežymesnis pilvukas (grafike praktiškai tiesė), nes aplinka itin mažai šildo vandenį.

iv) Praktika rodo, kad fizikas suvalgytų visus koldūnus, kiek jų išsivirtų. Paklaidos gali atsirasti, jei kaimynas neužbaigė savo porcijos arba tiesiog pamiršo įpilti druskos.

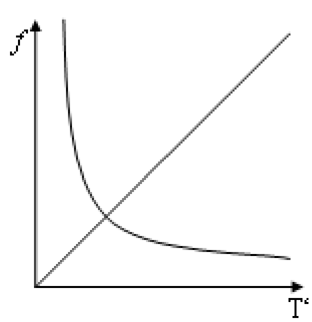
10. Šiluminis variklis

Kadangi variklis netiesiogiai paima šilumą iš T_1 temperatūros indo, suteikiamas energijos kiekis yra ribojamas sienelės šiluminio laidumo. Sistemą galime įsivaizduoti kaip variklį, kuris paima šilumą iš T’ temperatūros indo, ir atiduoda į T_2 temperatūros indą. T‘ ir T_1 temperatūros indai sujungti sienele.

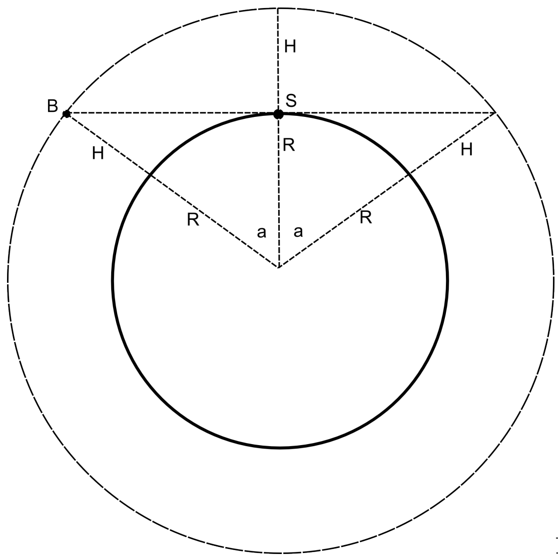
Žinome, jog maksimalų naudingumo koeficientą šiluminis variklis pasiekia atlikdamas Karno ciklą, taigi: $\eta = \frac{T'-T_2}{T'}$. Šilumos kiekis, praeinantis pro sienelę per vienetinį laiko tarpą, yra $Q = k(T_1 - T')$. Taigi naudingas darbas $A = \eta Q = \frac{T'-T_2}{T'} k(T_1 - T')$. Temperatūrą T‘, ties kuria atliekamas maksimalus naudingas darbas, surandame paskaičiavę darbo funkcijos išvestinę pagal T‘ ir prilyginę ją nuliui. $T'_{\max} = \sqrt{T_1 T_2}$. Sustatome į darbo formulę ir gauname maksimalią variklio galią: $A_{\max} = k\left(1 - \frac{T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}\right)\left(T_1 - \sqrt{T_1 T_2}\right)$.

Alternatyvus metodas surasti $T'_{\max}$, nenaudojant išvestinių:

Mes norime surasti funkcijos $A = \frac{T'-T_2}{T'} k(T_1 - T') = k\left(T_1 + T_2 - T' - \frac{T_2 T_1}{T'}\right)$ maksimumą. Kadangi T_1 ir T_2 yra konstantos, akivaizdu, jog tai yra tas pats, kas surasti funkcijos $T' + \frac{T_2 T_1}{T'}$ minimumą. Nusibrėžiame kiekvieną iš dėmenų atskirai: $f(T') = T'$ ir $f(T') = \frac{T_2 T_1}{T'}$. Matome, jog pagal simetriją abu grafikai susikerta statmenai, o taip pat žinome, jog $f(T') = T'$ grafikas kyla 45° kampu. Taigi, tiek į kairę, tiek į dešinę pusę nuo susikirtimo taško didėjanti funkcija kyla sparčiau nei mažėjanti leidžiasi, todėl jų sumos minimumas yra ties susikirtimo tašku. Taigi gauname lygtį: $T' = \frac{T_2 T_1}{T'}$, ir galiausiai $T'_{\max} = \sqrt{T_1 T_2}$.



Palydovas



1 pav.

Pirmiausia randame palydovo kampinį greitį ω. Palydovui įcentrinį pagreitį suteikia Žemės traukos jėga, todėl jei palydovo masė m

$$m\omega^2 (R+H) = \frac{GMm}{(R+H)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{GM}{(R+H)^3}}$$

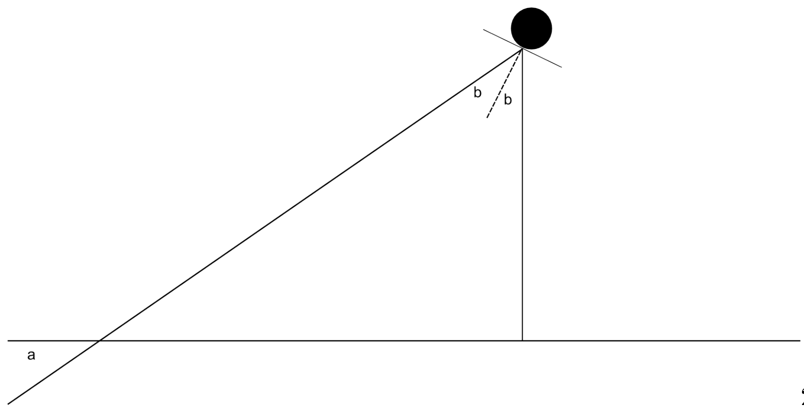
1 pav. stebėtojas stovi taške S. Iš brėžinio matyti, kad palydovas dings už horizonto, kai bus taške B (neprarandant bendrumo galime tarti, kad jis sukasi prieš laikrodžio rodyklę). Todėl nuo jo praskriejimo virš stebėtojo iki dingimo praeis laikotarpis τ, kur

$$\tau = \frac{\alpha}{\omega} = \arccos\left(\frac{R}{R+H}\right) \cdot \sqrt{\frac{(R+H)^3}{GM}} \qquad \Rightarrow \qquad \tau \approx 440\,\mathrm{s} = 7\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s}$$

Taigi palydovas dings už horizonto 23:07:20.

Mes neatsižvelgėme į Žemės sukimąsi, tačiau per laiką τ Žemė pasisuks vos 1.8°, todėl "besileidžiantis" palydovas bus pasislinkęs 1.8° statmena savo judėjimo krypčiai kryptimi. Jo nusileidimo laiko pokytis dėl to bus labai mažas ir jo galima nepaisyti.

“Iridium” žybsnis



2 pav.

Kampą tarp antenos plokštumos statmens ir tiesės einančios, per palydovą ir stebėtoją, pažymime β. Tada iš 2 pav., pasinaudodami atspindžio dėsniu, matome, kad $\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Veidrodyje matysime dalį Saulės atvaizdo. Kadangi atstumas nuo stebėtojo iki palydovo daug mažesnis už atstumą nuo palydovo iki Saulės, tai visas atvaizdas būtų toks pats ryškus, kaip Saulė. Todėl jei Saulės spindesys[1] S_s, palydovo S_p, ir stebėtojas juos mato atitinkamai erdviniais kampais Ω_s, Ω_p tai

$$\frac{S_p}{S_s} = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \approx \frac{S\cos\beta}{H^2} \cdot \frac{1}{\pi}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-2} = 4.1 \cdot 10^{-8}$$

Jei žvaigždės spindesys S_z, o atstumas iki jos L, tai

$$\frac{S_z}{S_s} = 100 \cdot \frac{R^2}{L^2} = 100 \cdot \frac{R^2}{c^2\tau^2} = 2.8 \cdot 10^{-9}$$

Kur τ - treji metai. Taigi $S_z < S_p$, palydovas ryškesnis.

[1] Spindesys - tai spinduolio sukuriama apšvieta stebėjimo vietoje, statmenoje spinduliams plokštumoje.