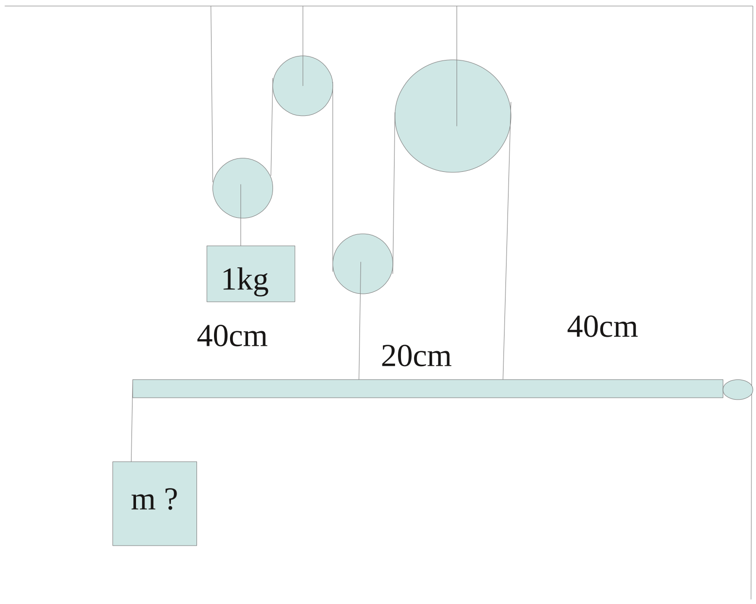
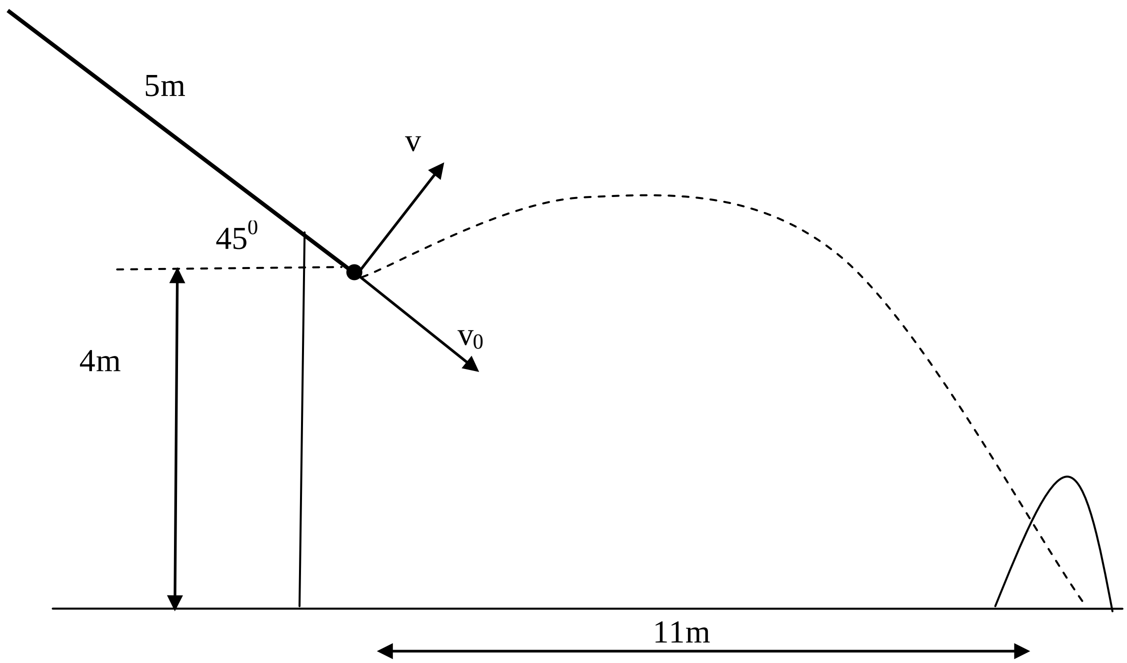
1. Kokia masė turi būti pakabinta, kad sistema būtų pusiausvyra? Strypas prie sienos yra prijungtas lanksčia jungtimi. Strypo ilgis – 1m. Strypą laiko dvi virvės pririštos 40 cm ir 60 cm atstumu nuo dešiniojo galo.



Sprendimas: virvės įtempimo jėga yra T, ir ji tolygiai pasiskirsčiusi keikviename virvės taške (nes visi taškai pusiausvyroje nejuda) . Žinomo kūno pusiausvyros lygtis teigia, kad:
$2\mathrm{T}=m_0 g$, kur $m_0=1\mathrm{kg}$. Svertą veikiančių momentų suma turi būti lygi nuliui:
$Mgx_0=2\mathrm{T}\mathrm{x}_1+Tx_2=T\left(2\mathrm{x}_1+x_2\right)$, kur $x_1=0.6\mathrm{m}\,,x_2=0.4\mathrm{m}$. Į šią lygtį įsistačius T gauname:
$Mgx_0=\frac{1}{2}m_0 g\left(2\mathrm{x}_1+x_2\right)$ ir galiausiai $M=\frac{1}{2}m_0\frac{\left(2\mathrm{x}_1+x_2\right)}{x_0}$. Įsistatę skaičius gauname:
$M=\frac{1}{2}1\mathrm{kg}\frac{\left(2\cdot 0.6\mathrm{m}+0.4\mathrm{m}\right)}{1\mathrm{m}}=0.8\mathrm{kg}$

2. *Kūčių naktį Kalėdų senelis, netyčia paslydęs ant apledėjusio L=5m ilgio stogo, sudarančio α=45^0 kampą su horizontu, pradėjo čiuožti žemyn. Laimei, leisdamasis senis išsilaikė ant kojų, todėl pačiame stogo gale, esančiame h=4m aukštyje, atsispyrė statmenai stogui. Kokiu greičiu jis atsispyrė, jei pataikė į už s=11m nuo stogo krašto esančią pusnį? Ar Kalėdų senis valgė stebuklingų meduolių, kad galėtų taip atsispirti? Trinties bei oro pasipriešinimo nepaisykite.*

Sprendimas:



1) Greitis išilgai stogo atsispyrimo taške:

$$v_0 = \sqrt{2gLsin\alpha} = \sqrt{\sqrt{2}gL}$$

2) Vertikalioji senio padėties virš žemės komponentė:

$$y = h + (vcos\alpha - v_0 sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}$$

3) Horizontalioji komponentė stogo krašto atžvilgiu:

$$x = (v_0 cos\alpha + vsin\alpha)t$$

4) Laikas, po kurio nukrito senis: $t = \frac{s}{v_0 cos\alpha + vsin\alpha}$

5) Statome į vertikaliosios koordinatės išraišką ir prilyginame ją nuliui:

$$0 = h + \frac{s(v cos\alpha - v_0 sin\alpha)}{v_0 cos\alpha + v sin\alpha} - \frac{gs^2}{2(v_0 cos\alpha + v sin\alpha)^2}$$

Kadangi α=45^0, $sin\alpha = cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$h + \frac{s(v - v_0)}{v_0 + v} - \frac{gs^2}{(v_0 + v)^2} = 0$$

$$h(v_0 + v)^2 + s(v - v_0)(v + v_0) - gs^2 = 0$$
$$(s + h)v^2 + 2v_0 hv - (s - h)v_0^2 - gs^2 = 0$$
$$v_{12} = \frac{-v_0 h \pm \sqrt{v_0^2 h^2 + (s + h)[(s - h)v_0^2 + gs^2]}}{s + h}$$

Neigiamą šaknį atmetame ir įstatome v_0 reikšmę:

$$v = \frac{-h\sqrt{\sqrt{2}\mathrm{gL}} + \sqrt{\sqrt{2}gLh^2 + g(s + h)\left[(s - h)\sqrt{2}L + s^2\right]}}{s + h}$$

$$v \approx 8.6\left(\frac{m}{s}\right)$$

Jei senelis atsispiria tokiu greičiu, stovėdamas ant lygios žemės jis pašoktų į aukštį:

$$H = \frac{v^2}{2g}$$
$$H \approx 4(m)$$

Senelio šuolis aiškiai paveiktas skaniųjų stebuklingų meduoliukų;)

3. Greitieji neutrinai. Šiais metais atlikto eksperimento metu išmatuotas neutrinų greitis buvo 7,1 km s^{-1} didesnis nei šviesos greitis. 1987 metais užfiksuoti iš už 168 000 šviesmečių sužibusios supernovos atskrieję neutrinai, o po dviejų valandų Žemę pasiekė ir supernovos šviesa. Tačiau šis laiko skirtumas labiau susijęs su tuo, kad neutrinai pirmi palieka sprogstančią žvaigždę. Koks būtų buvęs laiko skirtumas tarp neutrinų ir šviesos, jei ir šie neutrinai būtų skrieję greičiau už šviesą, kaip kad šiųmetiniam eksperimente?

Sprendimas

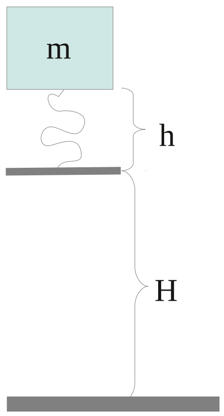
$\Delta v = 7{,}1 \cdot 10^3 \mathrm{m\,s^{-1}}$, $c = 3 \cdot 10^8 \mathrm{m\,s^{-1}}$, $t = 168000\,$šm

Atstumas tarp supernovos ir Žemės yra $S = ct$. Greitieji neutrinai jį įveiktų per

$$\tau = \frac{S}{c + \Delta v} = \frac{c}{c + \Delta v} t = \frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{c}} t \approx \left(1 - \frac{\Delta v}{c}\right) t$$

Neutrinai kelionėje užtruktų $t - \tau \approx \frac{\Delta v}{c} t \approx 4{,}0$ metus trumpiau, nei fotonai. Kadangi, neutrinai pirmesni palieka spogstančią žvaigdžę, tai jie turėjo atvykti į Žemę daug anksčiau nei buvo užfiksuoti. Taigi, ne visi neutrinai yra tokie greiti.

4. Iš aukščio H+h krenta masės m pianinas su idealia tamprumo k spyruokle pritvirtinta prie jo apačios taip, kaip parodyta brėžinyje. Jei spyruoklė smūgio metu būtų suspausta iki 0, galima laikyti laikyti, kad pianinas sudužo, o kitu atveju galima laikyti, kad pianinas nusileido saugiai. Iš kokio didžiausio aukščio gali būti saugiai išmestas pianinas?



Sprendimas:

Reikia panaudoti energijos tvermės dėsnį, ir rasti kritinį aukštį, kada pianinas suduš:

$m(h+H_0)g=\frac{1}{2}kh^2$ $H_0=\frac{1}{2mg}kh^2-h$. Jei pianinas bus išmestas iš žemiau, jis išsilaikys.

$H<H_0=\frac{1}{2mg}kh^2-h$

5. Piratas

Piratas atsidūrė $h = 400$ m aukščio kalno viršūnėje, nes jį vijosi priešų laivas. Piratas turėjo dvi statines: vieną tuščią, o kitą – pripildytą parako. Jis ruošiasi susprogdinti statinę su paraku sudauždamas ją su padegta tuščiąja statine kalno apačioje. Kurią statinę reikia stumtelti pirmiau ir po kiek laiko paleisti antrąją? Piratas žino, kad pilnos greičiu v riedančios statinės kinetinė energija yra $\frac{3}{4}mv^2$, o tuščios – mv^2. Kalno šlaitas sudaro 30° kampą su horizontu. Statinės paleidžiamos riedėti be pradinio greičio, o riedėjimo trintis maža.

Sprendimas

Potencinė statinių energija yra mgh. Kinetinė energija nelygi $\frac{mv^2}{2}$ todėl, kad statinės turi ne tik slenkamąjį judėjimą, bet ir sukamąjį. Pilnaviduriui cilindrui $mgh = \frac{3mv_p^2}{4}$, taigi $v_p = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$. Tuščiaviduriui – $v_t = \sqrt{gh} < v_p$. Taigi tuščiavidurė statinė rieda lėčiau. Vadinasi pirmiausia turi būti paleista tuščioji statinė, o po to – pilnoji.

Kalno aukštis yra h, todėl šlaito ilgis yra $s = 2h$ (statinio priešais 30° kampą taisyklė, arba $s = \frac{h}{\sin 30°}$).

$s = \frac{a_t t^2}{2} = \frac{a_p(t-\tau)^2}{2}$. Taigi

$$\tau = t - \sqrt{\frac{2s}{a_p}} = 2\sqrt{h}\left(\frac{1}{\sqrt{a_t}} - \frac{1}{\sqrt{a_p}}\right) \tag{1}$$

Taigi mums liko rasti tik riedančių cilindrų pagreičius. Jeigu cilindras tik slystų, jo pagreitis būtų $\frac{g}{2}$ (reikia išskaidyti sunkio jėgą į komponentes, veikiančias išilgai ir statmenai šlaitui, išilgai veikianti komponentė yra $F_{||} = \frac{mg}{2}$). Tačiau mūsų atveju $F_{||}$ turi cilindrui suteikti ne tik slenkamąjį, bet ir sukamąjį judėjimą. Tuščiavidurio cilindro atveju $E_k = mv_t^2 = 2\frac{mv_t^2}{2} = 2E_s$, kur E_s yra slenkamojo judėjimo energija. Taigi tik pusė sunkio jėgos atliekamo darbo pavirs slenkamojo judėjimo energija. Taigi $a_t = \frac{g}{4}$. Panašiai yra ir su pilnaviduriu cilindru. $E_k = \frac{3}{2}\frac{mv_t^2}{2} = \frac{3}{2}E_s$, taigi $\frac{2}{3}$ potencinės energijos pavirsta slenkamojo judėjimo kinetine energija. $a_p = \frac{g}{2}\frac{2}{3} = \frac{g}{3}$. Vadinasi,

$$\tau = 2\sqrt{h}\left(\frac{2}{\sqrt{g}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{g}}\right) = \boxed{2\sqrt{\frac{h}{g}}(2-\sqrt{3}).} \tag{2}$$

$$\tau = 3{,}4\,\mathrm{s}.$$

6. Kirmių pupelės

Coffee Joulies™ – nedideli kavos pupelių formos ir masės $m = 25\,\mathrm{g}$ objektai, įmetami į kavos puodelį optimaliai temperatūrai kuo ilgiau palaikyti. *Joulie* sudaro plonas ir lengvas apsauginis sluoksnis, užpildytas patentuota lengvai fazę keičiančia medžiaga, kurios lydymosi temperatūra kaip tik ir atitinka optimalią kavos temperatūrą, $\tau = 60°\mathrm{C}$.

Į gerai izoliuotą kavos puodelį įmetamos kelios *Joulie* pupelės bei įpilama $M = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ verdančios kavos (savitoji šiluma $c = 4\,200\,\mathrm{J/(kg \cdot K)}$). Esant toms pačioms aplinkos sąlygoms — $T_a = 20°\mathrm{C}$ — viena *Joulie* pupelė palaiko optimalią temperatūrą $t_1 = 120\,\mathrm{min}$. Kita vertus, septynios *Joulie* pupelės tokią temperatūrą palaiko tik $t_7 = 540\,\mathrm{min}$, o šešios – $t_6 = 560\,\mathrm{min}$. Įtariama, kad patentuota fazinį būvį keičianti medžiaga gali būti vienas iš parafinų, kurių savitoji šiluma svyruoja intervale $c = 2\,140 \ldots 2\,900\,\mathrm{J/(kg \cdot K)}$, o lydymosi šiluma – $\lambda = 2{,}0 \ldots 2{,}2 \times 10^5\,\mathrm{J/kg}$. Patikrinkite, ar fazinį būvį lengvai keičianti medžiaga gali būti parafinas. Kiekvienas kirmis nori išlaikyti kavą tinkamos temperatūros kuo ilgiau. Koks optimalus *Coffee Joulies* kiekis palaiko kavos temperatūrą tinkamą ilgiausiai?

Sprendimas

Indas izoliuotas gerai, todėl pusiausvyra jame nusistovi per daug trumpesnį laiką, nei charakteringas vėsimo laikas. Optimalios temperatūros kava aplinkai šilumą atiduoda pastovia sparta, vienoda visais atvejais. $t_6 > t_1$, vadinasi vandens šilumos kiekio $Q = c_\mathrm{v} M \Delta\tau$ pakanaka sušildyti ir ištirpinti vieną pupelę. Bet $6t_1 > t_6$, todėl šešios pupelės ištirpsta nepilnai. Iš sistemos

$$\begin{cases} Q = 6cm\Delta T + \lambda m \dfrac{t_6}{t_1}; \\ Q = 7cm\Delta T + \lambda m \dfrac{t_7}{t_1}, \end{cases} \tag{1}$$

kur ΔT yra aplinkos ir optimalios kavos temperatūrų skirtumas,

$$c = \frac{Q(t_6 - t_7)}{m\Delta T(7t_6 - 6t_7)} \approx 2471\ \mathrm{J/(kg \cdot K)}, \tag{2}$$

ir

$$\lambda = \frac{Qt_1}{m(7t_6 - 6t_7)} \approx 592941\,\mathrm{J/kg}. \tag{3}$$

Optimaliam pupelių kiekiui n galioja

$$Q = ncm\Delta T + n\lambda m. \tag{4}$$

$n = 4{,}8$, bet pupelės nedalomos. Patikrinus penkias pupeles galima įsitikinti, kad ištirpusi masė beveik nesiskiria nuo $4{,}8m > 4m$. Vadinasi, reikia penkių pupelių.

7 Girlianda

Pasižymime lempučių galias $P_1 = 5$ W, $P_2 = 4$ W, $P_3 = 9$ W, tinklo įtampa $U = 220$ V, nominali lemputės įtampa $U_L = 20$ V. Tada iš Omo dėsnio ir įtampos apibrėžimo, jei per lemputę teka srovė I, $P_i = U_L I$, $U_L = IR_i$ todėl lempučių varžos $R_i = U_L^2/P_i$, kur $i = 1, 2, 3$. Visos girliados galia turėtų būti

$$P_0 = \frac{U^2}{12R_1} = \frac{U^2}{U_L^2}\frac{P_1}{12} \approx 50 \text{ W}$$

Kuo daugiau perdegusių lempučių pakeisime 9 W galios lemputėmis, tuo mažesnė bus girliandos varža, taigi tuo didesnė galia. Jei norime įsukti visas 5 9 W lemputes, reikia įsitikinti ar neperdegs 5 W lemputės (lemputėje išsiskirianti galia $P_l = R_i I^2 = U_L^2 I^2/P_i$, o srovė I vienoda visoms lemputėms, taigi jei neperdegs 5 W lemputės, neperdegs ir 9 W lemputės, kurių nominali galia didesnė, o reali mažesnė nei penkiavatinių). Todėl turi būti $I^2 R_1/P_1 < 1.2$.

$$I = \frac{U}{7R_1 + 5R_3} = \frac{U}{U_L^2}\left(\frac{7}{P_1} + \frac{5}{P_3}\right)^{-1} \qquad \frac{I^2 R_1}{P_1} = \frac{U^2}{U_L^2}\left(7 + \frac{5P_1}{P_3}\right)^{-2} \approx 1.27 > 1.2$$

Taigi reiks panaudoti bent vieną 4 W lemputę. Remiantis ankstesniais samprotavimais, dabar užtenka patikrinti, ar neperdegs 4 W lemputė(s). Tarkime jų panaudojome m, o srovė grandinėje I_m. Tada turi būti $I_m^2 R_2/P_2 < 1.2$.

$$I_m = \frac{U}{7R_1 + mR_2 + (5-m)R_3} = \frac{U}{U_L^2}\left(\frac{7}{P_1} + \frac{m}{P_2} + \frac{5-m}{P_3}\right)^{-1}$$

$$\frac{I_m^2 R_2}{P_2} = \frac{U^2}{U_L^2}\left(\frac{7P_2}{P_1} + m + \frac{P_2}{P_3}(5-m)\right)^{-2} < 1.2 \quad \Rightarrow \quad m \geq 4$$

Vadinasi reikia įsukti vieną 9 W ir keturias 4 W lemputes.

8. Hawking'o spinduliavimas

Pagal prof. S. Hawking juodoji skylė spinduliuoja lyg turėtų temperatūrą $T = \frac{\alpha}{m}$, kur $\alpha = \hbar c^3/(8\pi G k_B) \approx 1{,}22 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg\,K}$. Temperatūros T kūno spinduliuojama galia yra $P = \sigma T^4 S$, kur $\sigma = \pi^2 k_B^4/(60\hbar^3 c^2) \approx 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-2}\,K^{-4}}$ yra Stefano-Boltzmano konstanta, o S yra kūno paviršiaus plotas. Iš reliatyvumo teorijos seka, kad energija yra $E = mc^2$, o juodosios skylės spindulys $R = \frac{2Gm}{c^2}$. Raskite, kokiu greičiu masės $m = 6 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ juodoji skylė praranda masę dėl Hawking'o spinduliavimo, t.y. raskite $\frac{\Delta m}{\Delta t}$.

Sprendimas

Juodosios skylės spinduliavimo galia yra P, taigi per mažą laiko tarpą Δt ji netenka $P\Delta t$ energijos. Taigi $\Delta E = -P\Delta t$. Iš masės ir energijos sąryšio gauname, kad $\Delta E = \Delta m c^2$. Vadinasi

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{P}{c^2} \tag{1}$$

$P = \sigma T^4 S = \frac{\sigma\alpha^4}{m^4} S$. Sferos paviršiaus plotas yra $S = 4\pi R^2$. Įstatome $R = \frac{2Gm}{c^2}$. Tada $S = \frac{16\pi G^2 m^2}{c^4}$, $P = \frac{\sigma\alpha^4}{m^4}\frac{16\pi G^2 m^2}{c^4}$. Vadinasi

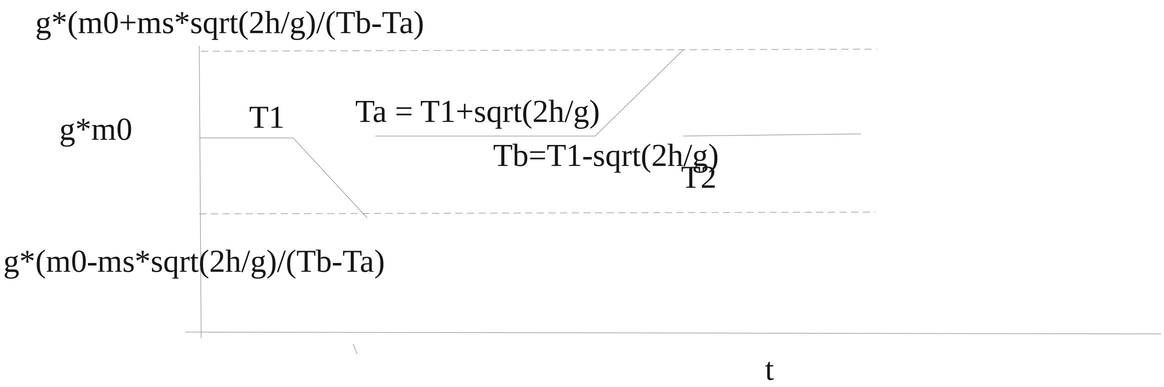
$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{16\pi\sigma\alpha^4 G^2}{m^2 c^6} = \boxed{-\frac{\hbar c^4}{15360\pi G^2 m^2}.} \tag{2}$$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m^2} = -1{,}10 \cdot 10^{-46}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}, \tag{3}$$

kur $\beta = 3{,}97 \cdot 10^{15}\,\mathrm{kg^3 s^{-1}}$.

9. Smėlio laikrodis apverčiamas, ir padedamas ant svarstyklių. Iš pradžių visas smėlis yra viršutinėje dalyje, tačiau, užstrigus smiltelei ties siauriausia vieta, nebyra žemyn. Visgi ties laiku T_1 smiltele išsprūsta ir smėlis pradeda byrėti pastovia srove (t.y. Ta pati smėlio masė per laiko vienetą) ir ties laiku T_2 visas smėlis jau yra subyrėjęs į apatinę dalį. . Bendra smėlio laikrodžio masė (įskaitant smėlį) yra m_0 , jame esančio smėlio masė yra m_s . Laikykime, kad smėlio kiekis nėra didelis: t.y.visos smiltelės nuo kaklelio iki laikrodžio dugno krenta atstumą h. Nubrėžkite svartykių parodymus priklausomai nuo laiko.

Sprendimas:



10. Reaktyvinis lėktuvas skrenda greičiu v oro atžvilgiu, oro tankis yra ρ, reaktyvinio variklio turbinos skerspjūvio plotas yra S. Reaktyvinis variklis (turbofan) sukuria traukos jėga savo turbina siurbdamas orą iš variklio priekio (kuris variklio atžvilgiu juda greičių v) ir pagreitinęs iki greičio $v+\Delta v$ variklio atžvilgiu išmesdamas orą gale. Galima daryti prielaidą, kad variklis susiurbia tik tą orą, kuris lėktuvui skrendant kerta turbinos skerpjūvio plotą.

1) Jei lėktuvas skrenda duotu greičiu, kokį tūrį oro variklis susiurbia per sekundę
2) Koks turi būti Δv norint, kad variklis išvystytų traukos jėgą F? Iš kur atsiranda traukos jėga?
3) Kokia turi būtų reaktyvinio variklio galia norint išvystyti traukos jėgą F skrendant greičiu v? Kaip galia priklauso nuo variklio skrespjūvio ploto?
4) Boeing 737-800 skrenda 820 km/h greičių 12 km aukštyje. Oro tankis tokiame auštyje yra $\rho=0.31\mathrm{kg}/m^3$. Kiekvienas iš abiejų lėktuvo variklių išvysto $F=24\mathrm{kN}$ jėgą. Lėktuvo variklio turbinos diametras yra $d=1.5\mathrm{m}$. Įvertinkite išmetamo oro greitį ir kiekvieno lėktuvo variklio išvystomą galią.

Sprendimas:

1) $S v$
2) $F=\rho S v \Delta v$ (impulso tvermės dėsnis: per laiko vienetą įsiurbiama masė oro yra $\rho S v$ ir lėktuvo ažvilgiu tai masei oro suteikiamas papildomas greitis $F=\Delta v$
3) $\Delta v=\frac{F}{\rho S v}$. Įsiurbiamo oro energija (per laiko vienetą) lėktuvo atžvilgiu yra $(\rho S v)v^2=\rho S v^3$. Išmetamo oro energija lėktuvo atžvilgiu yra $\rho S v(v+\Delta v)^2=\rho S v(v^2+2\mathrm{v}\Delta v+\Delta v^2)$. Įšmetamo oro ir įsiurbiamo oro energijų skirtumas per laiko vienetą yra lygus lėktuvo variklio galiai: $P=\rho S v \Delta v(2\mathrm{v}+\Delta v)$. Įsistatome išraišką $P=\rho S v \frac{F}{\rho S v}(2\mathrm{v}+\frac{F}{\rho S v})=F(2\mathrm{v}+\frac{F}{\rho S v})$.
4) $\Delta v=\frac{F}{\rho \pi r^2 v}=\frac{24000\mathrm{N}}{0.31\frac{kg}{m^3}\pi(0.75\mathrm{m})^2(\frac{227\mathrm{m}}{s})}=193\frac{m}{s}$

$$P=F(2\mathrm{v}+\Delta v)=24000\mathrm{N}(2\cdot 227\frac{m}{s}+193\, m\, s)=1.55\cdot 10^7 W=15.5 MW=20000\ AJ$$

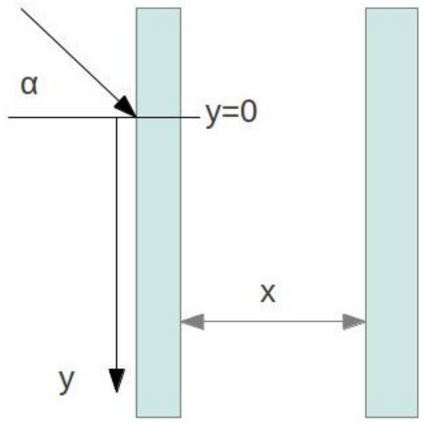


Figure 1:

11. Pabėgusi šviesa

Aplinkoje, kurios lūžio rodiklis $\frac{n_0}{1-A}$ (n_0 yra teigiama konstanta, o $A = 0.2$), yra įterpi du plonasieniai vertikalūs stačiakampiai mėgintuvėliai su skysčiu, kurio lūžio rodiklis $\frac{n_0}{1-y/R}$, $R = 65cm$, $x = 15cm$ bei x yra žymiai didesnis už mėgintuvėlių plotį (žr. brėžinyje). Šviesos spindulys krenta į pirmąjį mėgintuvėlį ir sudaro kampą α, kaip parodyta brėžinyje. Nagrinėdami du atvejus: $\alpha = 30^\circ$ ir $\alpha = 45^\circ$, raskite spindulio kryptį, kai jis palieka sistemą.

Sprendimas Spindulio kryptis pasikečia tik jam esant kitoje aplinkoje arba atsispindėjus, todėl, kai spindulys palieka sistemą, jo kryptis bus α arba $-\alpha$ priklausomai nuo to, ar buvo visiškas vidaus atspindys nuo vieno iš mėgintuvėlių. Mėgintuvėlių sienelės plonos, todėl šviesa jose nukeliauja labai mažą vertikalų atstumą, kurio galima nepaisyti. Apskaičiuojame kritinius lūžio rodiklius abiejose aplinka - skystis ribose.

$n_1 = \frac{n_0}{1-A}$

$n_2 = n_0$

$n_3 = \frac{n_0}{1-y/R}$

$y = x \cdot tan\alpha$

$\alpha_{K1} = arcsin(1-A)$

$\alpha_{K1} = arcsin\frac{n_2}{n_1}$

$\alpha_{K2} = arcsin\frac{n_3}{n_1}$

$\alpha_{K2} = arcsin\frac{1-A}{1-\frac{x}{R}tan\alpha}$

$\alpha_{K1} = 53^\circ$, todėl abiem atvejams nėra visiškojo vidaus atspindžio nuo pirmojo mėgintuvėlio.

Riboje su antruoju mėgintuvėliu visiškas vidaus atspindys bus tuo atveju, jei

$A < \frac{x}{R}tan\alpha$

$\alpha > arctan(\frac{AR}{x})$
$\alpha > 41^{\circ}$

Kai $\alpha = 30^{\circ}$, nėra visiškoje atspindžio nei vienoje iš ribų, todėl spindulys palieka sistemą kampu $\alpha = 30^{\circ}$.

Kai $\alpha = 45^{\circ}$, įvyksta visiškasis vidaus atspindys riboje tarp aplinkos ir antrojo mėgintuvėlio, todėl spindulys grįžta link pirmojo mėgintuvėlio, lūžta jame kaip ir pradžioje bei palieka sistemą kampu $\alpha = -45^{\circ}$.

12 Nutrūkusi svyruoklė

Pirmiausia randame $s(\theta)$ išraišką. Iš brėžinio sąlygoje, rutuliuko koordinatės paleidimo momentu $(x_0, y_0) = (L\sin\theta, H - L\cos\theta)$. Pagal energijos tvermę, kadangi svyruoklė sustoja, kai $\theta = 90°$, rutuliuko greitis paleidimo momentu v_0 tenkina $mv_0^2/2 = mgL\cos\theta$, kur m - rutuliuko masė. Kadangi $\vec{v}_0$ statmenas siūlui, $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (\sqrt{2gL}\cos^{3/2}\theta, \sqrt{2gL}\sin\theta\cos^{1/2}\theta)$. Jei t yra laikas nuo paleidimo momento, o (x, y) rutuliuko koordinatės

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t = L\sin\theta + t\sqrt{2gL}\cos^{\frac{3}{2}}\theta$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = H - L\cos\theta + t\sqrt{2gL}\sin\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta - \frac{gt^2}{2}$$

Patogumo dėlei pasižymėkime $z(t) = x(t) - L\sin\theta$, tada $t = z/(\sqrt{2gL}\cos^{3/2}\theta)$

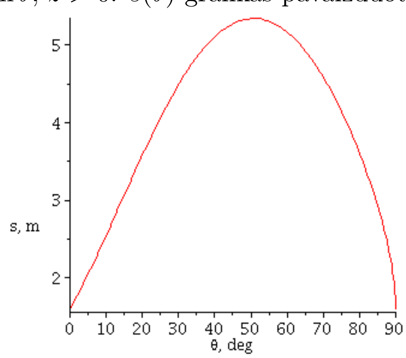
$$y = H - L\cos\theta + z\tan\theta - \frac{z^2}{4L\cos^3\theta}$$

Rutuliukas nukris kai $y = 0$. Įsistatome $y = 0$ į paskutiniąją lygtį, randame z

$$z = 2L\cos^3\theta\left(\tan\theta + \sqrt{\tan^2\theta + \frac{H - L\cos\theta}{L\cos\theta}}\right)$$

$$s(\theta) = x = z + L\sin\theta = L\left(\sin\theta + 2\cos\theta\left(\sin\theta + \sqrt{\frac{H}{L\cos\theta} - \cos^2\theta}\right)\right)$$

Pasirinkome teigiamą kvadratinės lygties šaknį, nes $v_{0x} > 0$, todėl nukritimo momentu $x > x_0 = L\sin\theta$, $z > 0$. $s(\theta)$ grafikas pavaizduotas 2 pav.



2 pav.

Grafiką galima gauti apskaičiavus, pavyzdžiui, $s(\theta_i)$ $(i = 0, 2, ..., n)$, kur $\theta_i = 90i/n$, o $n \geq 5$ (kuo didesnis n, tuo gražesnis grafikas) . Dabar mums reikia 1°tikslumu rasti θ vertę θ_m, ties kuria $s(\theta)$ pasiekia maksimumą. Iš gauto grafiko ir $s(\theta)$ išraiškos matome, kad tas maksimumas tėra vienas, todėl jį rasti galima, pavyzdžiui, taikant šį paprastą algoritmą:

1. Iš turimų $s(\theta_i)$ verčių pasirenkame dvi didžiausias, tarkime $s(\theta_j)$ ir $s(\theta_k)$ $(\theta_j < \theta_k)$. Tada $\theta_m \in (\theta_j, \theta_k)$.
2. Jei $\theta_k - \theta_j < 2°$, tai tikrai $\theta_m - (\theta_k + \theta_j)/2 < 1°$, taigi turime atsakymą. Kitu atveju renkamės dvi didžiausias vertes iš $s(\theta_j)$, $s(\theta_k)$ ir $s((\theta_k + \theta_j)/2)$, kartojame procesą.

Po kiekvieno žingsnio $\theta_k - \theta_j$ sumažėja dvigubai, taigi po vos keleto žingsnių tikrai gausime atsakymą. Jis yra $\theta_m \approx 51°$.

13. Karoliukai

Turime daug virbalų ir karoliukų, galinčių slysti virbalais be trinties. Pradiniu momentu visi karoliukai yra taške A ir nejuda. Jie paleidžiami slysti virbalais. Raskite kreivę, kurią sudaro karoliukai po laiko t. Aprašykite, kaip ši kreivė keisis laikui bėgant. Trumpai pakomentuokite be skaičiavimų, kaip pasikeis rezultatas, jei tarp karoliukų ir virbalų būtų trintis?

Sprendimas

Pirmiausia pasirinkime polinę koordinačių sistemą, kurioje α yra kampas tarp virbalo ir horizonto, o $r(t)$ – atstumas iki taško A.

Traukos jėga verčia karoliuką judėt su pagreičiu išilgai virbalo. Užrašome antrąjį Niutono dėsnį (projektuojame išilgai ir statmenai virbalui):

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha, \\ 0 &= N - mg\cos\alpha, \end{aligned}$$

kur N yra reakcijos jėga. Karoliukai iš pradžių nejuda, todėl $r(t) = \frac{at^2}{2} = \frac{g\sin(\alpha)t^2}{2}$. Grįžkime į dekarto koordinačių sistemą $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ir $\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{gt^2}{2}$$

Padauginame abi lygties puses iš $\sqrt{x^2+y^2}$ ir išskiriame pilną kvadratą.

$$x^2 + \left(y - \frac{gt^2}{4}\right)^2 = \left(\frac{gt^2}{4}\right)^2$$

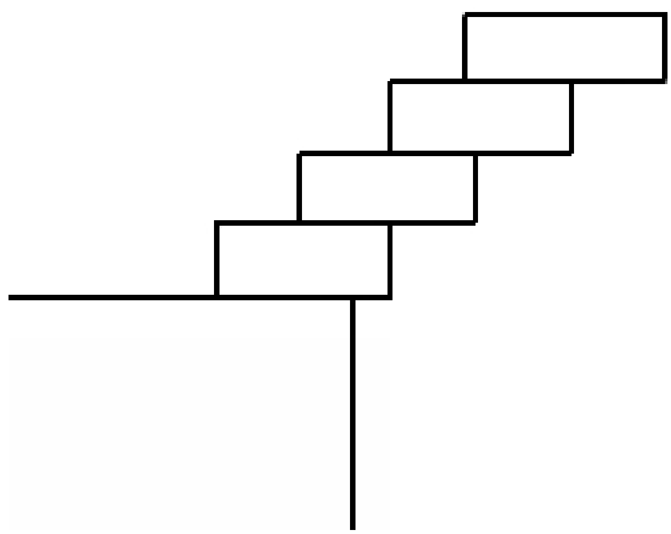
Taigi praėjus laikui t karoliukai sudarys spindulio $\frac{gt^2}{4}$ apskritimą, kurio centras yra taške $\left(0, \frac{gt^2}{4}\right)$.

Dabar trumpai panagrinėkime, kas atsitinka pridėjus trintį. Neatlikinėdami jokių skaičiavimų, iš karto galime pasakyti, kad kreivės bus simetriškos y ašies atžvilgiu. Ant virbalų esantys karoliukai judės pagreičiu $a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, kai α yra didesnis už kritinį kampą. Palyginkime šią pagreičio išraišką su senesniąja $a = g\sin\alpha$. Vertikaliai žemyn krentantis karoliukas, kaip ir reikėjo tikėtis, juda taip pat, kaip ir ankstesniuoju atveju. Jei virbalas sudaro labai mažą kampą su horizontu, sunkio jėgos nepakaks pajudinti ant to strypo esantį karoliuką (kampas su horizontu turi būtų ne mažesnis nei $\arctan\mu$). Taigi prie pat taško A kreivė sudarys kampą $\arctan\mu$ su horizontu. Taigi aukščiausiame kreivės taške mes turėsime „aštrų kampą“, t.y. mūsų kreivė negali būti elipsė. Karoliukus sudaranti kreivė turėtų būti panaši į dviejų apskritimų sankirtą.

14. **Plytos**. Keturios vienodos, tolygaus tankio ir ilgio $2l$ plytos suguldytos viena ant kitos ant plataus stalo krašto. Radę pusiausvyrą galite netirti, ar ji stabili, ar ne:

a) Ar galima keturias plytas suguldyti taip, kad viršutinės projekcija į stalo paviršiaus plokštumą būtų išlindusi už krašto?

b) Jei turime neribotą plytų skaičių, koks yra teoriškai didžiausias atstumas tarp viršutinės plytos projekcijos stalo plokštumoje ir stalo krašto?



Sprendimas.

a) Nagrinėjame nestabilią pusiausvyrą, kai plytų sistemos masės centras guli ant stalo krašto. Skaičiuojant nuo viršaus, pirma plyta išlindusi kaip galima toliau, tad jos masės centras guli ant antros plytos krašto. Pirmos ir antros masės centras guli ant trečios krašto, tad antrosios išsikišimą a randame pagal momentų sumą:

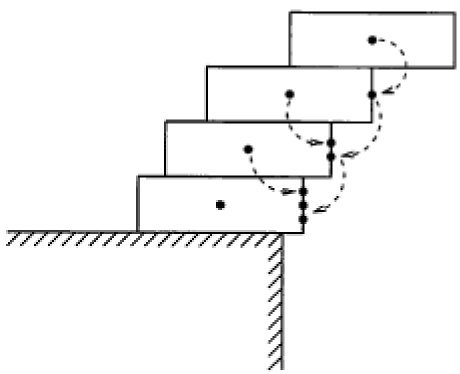
$$-mg(l-a) + mga = 0 \tag{1}$$

$$a = \frac{l}{2} \tag{2}$$

Laikydami trijų plytų sistemos masės centrą ant apatinės krašto, gauname, kad trečioji išlindusi $\frac{l}{3}$, nes dabar masės centro padėtis dalija atstumą l į santykį $2:1$, kadangi pagal sverto principą ieškomas balansas tarp masių m ir $2m$. Lygiai taip pat ketvirtoji plyta išlindusi už stalo krašto atstumu $\frac{l}{4}$, nes dabar balansuojamos masės m ir $3m$. Ketvirtosios plytos tolimasis galas išlindo:

$$l + \frac{l}{2} + \frac{l}{3} + \frac{l}{4} = \frac{25l}{12} > 2l \tag{3}$$

Taigi, ketvirtos plytos projekcija yra už stalo krašto.



b) Tas pats sprendimas gali būti išblėstas iki dideliam plytų skaičiui. Skaičiuojant nuo viršaus, pirmųjų $k-1$ plytų sistemos masės centro padėtis dalija l (atstumą tarp k-tosios plytos masės centro ir jos krašto) santykiu $(k-1):1$, kadangi balansuojamos masės m ir km ant krašto. Taigi, k-toji plyta gali būti išlindusi iš už kitos krašto per ne daugiau nei $\frac{l}{k}$. Sudėjus visų n plytų išlindimus, gauname atstumą tarp pirmosios plytos projekcijos galo ir stalo krašto:

$$l\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{k} + ... + \frac{1}{n}\right) \tag{4}$$

Kai n artėja į begalybę, ši išraiška taip pat artėja į begalybę, todėl teoriškai viršutinė plyta gali būti nustumta be galo toli nuo stalo krašto.

15. Gaudyklė

Trys klasikinės kuloninės dalelės, įkrautos vienodu krūviu Q, laikomos harmoninėje gaudyklėje. Gaudyklė – tai tam tikra dvimatės erdvės sritis, kurioje potencinės dalelės energijos priklausomybė nuo jos koordinačių yra $U(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_0^2\,(x^2+\alpha^2y^2)$. Čia m yra vienos dalelės masė, ω_0 – charakteringas svyravimų tokioje potencinėje duobėje dažnis. α yra gaudyklės anizotropijos parametras, jo vertė $\alpha = 1$ atitinka apskritiminės simetrijos gaudyklę.
Tinkamai parinkus fizikinių dydžių matavimo vienetus, pilna trijų dalelių sistemos gaudyklėje potencinė energija gali būti užrašyta kaip $U = \frac{1}{2}\big(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\alpha^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\big)+\frac{1}{r_{12}}+\frac{1}{r_{13}}+\frac{1}{r_{23}}$. Kokie energijos bei ilgio matavimo vienetai čia pasirinkti?
Izotropinėje gaudyklėje su $\alpha = 1$ dalelės sudaro simetrišką struktūrą, išsidėstydamos ant spindulio R apskritimo. Kokia yra R vertė?
Didinant anizotropijos parametro vertę $\alpha > 1$, pažeidžiama simetrija bei indukuojami sistemos struktūros pokyčiai. Pasiekus kritinę parametro vertę $\alpha = \alpha_c$, įvyksta dimensinis virsmas – dvimatė trijų dalelių struktūra transformuojama į vienmatę linijinę konfigūraciją. Kokia stabilios vienmatės sistemos po dimensinio virsmo potencinė energija U_{1D}? Kokia kritinio parametro α_c vertė?

Sprendimas

Tegul u_0 ir r_0 yra nauji matavimo vienetai. Tada

$$u_0U = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}m\omega_0^2r_0^2\left(x^2+\alpha^2y^2\right)+\sum_{i>j}^{3}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0r_0r_{ij}}. \tag{1}$$

Išraiška supaprastėja, kai $m\omega_0^2r_0^2/u_0 = 1$ ir $Q^2/(4\pi\varepsilon_0r_0u_0) = 1$. Tada

$$r_0 = \left(\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0m\omega_0^2}\right)^{1/3}. \tag{2}$$

ir $u_0 = Q^2/4\pi\varepsilon_0r_0$. Trijų krūvių ant R spindulio apskritimo energija

$$U = \frac{3}{2}R^2+\frac{\sqrt{3}}{R}. \tag{3}$$

Minimizavus, t.y. išsprendus $\partial U/\partial R = 0$, $R^3 = \sqrt{3}/3$. Analogiškai trijų krūvių ant vienos tiesės energija

$$U_{\mathrm{1D}} = 2\frac{1}{2}\rho^2+\frac{2}{\rho}+\frac{1}{2\rho} = \rho^2+\frac{5}{2\rho}. \tag{4}$$

Čia ρ yra mažiausias atstumas tarp dviejų krūvių and x ašies. Kita pusiausvyra konfigūracija nestabili. $\partial U_{\mathrm{1D}}/\partial\rho = 0$, todėl $\rho^3 = 5/4$ ir $U_{\mathrm{1D}} = 3/2 \cdot (25/2)^{1/3}$.
Prieš pat dimensinį virsmą krūviai išsidėsto ant stripiriai suploto trikampio viršūnių. Vienmatės konfigūracijos šoninius krūvius pastūmus atstumu δy, o vidurinį, išlaikant masės centrą gaudyklės centre, per $2\delta y$ priešinga y ašies kryptimi, perturbuotos sistemos energija

$$U_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\left((2\alpha\delta y)^2 + 2\alpha^2\delta y^2 + 2\rho^2\right) + \frac{1}{2\rho} + \frac{2}{\sqrt{(3\delta y)^2 + \rho^2}}, \tag{5}$$

arba, mažiems δy

$$U_{\mathrm{p}} \approx U_{\mathrm{1D}} + 3\alpha^2\delta y^2 - \frac{9\delta y^2}{\rho^3}. \tag{6}$$

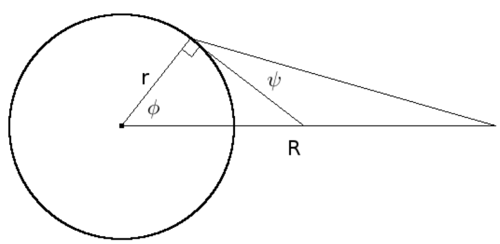
Iš čia kritinis parametras stacionariai vienmatei konfigūracijai $\alpha_c = \sqrt{12/5}$.

16 Palydovinė TV

Geostacionarus palydovas turi suktis apie Žemę $T = 24\,\mathrm{h}$ periodu, todėl jo kampinis greitis $\omega = 2\pi/T$. Kad Žemės trauka suteiktų įcentrinį pagreitį

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2}$$

kur M - Žemės masė, R - orbitos spindulys, G - gravitacijos konstanta. Iš čia randame $R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Bet kokios orbitos plokštuma turi eiti per Žemės centrą, o palydovas kabės virš vieno Žemės paviršiaus taško (tarkime, taško A) tik jei jo orbitos plokštuma statmena Žemės ašiai (kitaip tariant, palydovo vektorinis kampinis greitis $\vec{\omega}$ sutampa su Žemės vektoriniu kampiniu greičiu). Taigi taškas A turi būti ant pusiaujo. Aukščiausiai Vilniaus danguje bus palydovas, esantis arčiausiai Vilniaus (nes visi geostacionarūs palydovai vienodame aukštyje), t.y. palydovas kabantis virš taško 0°N 25°E. Pažymėkime Žemės spindulį r, Vilniaus geografinę platumą $\phi = 54°$, ieškomą palydovo aukštį virš horizonto ψ.



1 pav.

Tada iš 1 pav., sinusų ir kosinusų teoremų

$$\frac{\sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\phi}}{\sin\phi} = \frac{R}{\sin(90° + \psi)} = \frac{R}{\cos\psi} \Rightarrow$$

$$\psi = \arccos\left(\frac{\sin\phi}{\sqrt{1 + r^2\left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{-2/3} - 2r\cos\phi\left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{-1/3}}}\right) \approx 28°$$

(Neigiamą sprendinį atmetame patikrinę, kad $r/\cos\phi < R$). Tokia antena būtų nukreipta į pietus (link 0°N 25°E).