

1. **Komandinės tradicinis** (5 t.) Kokia masė turi būti pakabinta (žr. 1 brėžinį), kad sistema būtų pusiausvyra? Strypas prie sienos yra prijungtas lanksčia jungtimi. Strypo ilgis – 1 m. Strypą laiko dvi virvės, pririštos 40 cm ir 60 cm atstumu nuo kairiojo galo.
2. **Marso teraformavimas** (5 t.) Norint Marso klimatą padaryti panašų į Žemės, pirmiausia Marse reikia suformuoti ir sušildyti atmosferą. Dabartinės CO₂ atmosferos slėgis Marso paviršiuje yra tik 0,6 kPa. Marso regolite gali būti apie 10¹⁸ kg CO₂. Įvertinkite Marso atmosferos slėgį, jei visą CO₂ sublimuotume. Kaip pasikeis atmosferos temperatūra?
3. **Žvaigždė** (8 t.) Parodykite, kad slėgis masės M ir spindulio R žvaigždės centre $P > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$. *Pagalba: parodykite, kad $f(r) = P(r) + \frac{Gm(r)^2}{8\pi r^4}$ yra mažėjanti funkcija.*
4. **Alpinistas** (7 t.) 80 kg masės alpinistas kopia aukštin vertikalia uola, prisirišęs virve, kurios 1 m ilgio atkarpos tamprumo koeficientas $k = 4 \cdot 10^4$ N/m. Kopdamas jis perveria virvę per žiedus taškuose C_1, C_2, \dots , o virvės galas nejudamai įtvirtintas taške B (žr. 2 brėžinį, jame alpinistas pažymėtas raide A). Kiekvienas taškas C_i yra aukštyje h_i virš taško B. Saugumo taisyklės reikalauja, kad, jei alpinistas kris, jis arba laisvai kristų ne daugiau kaip 5 m, arba virvė jį sulaikytų jėga, ne daugiau kaip n kartų viršijančia alpinisto svorį. Raskite didžiausias galimas h_1, h_2, h_3, h_4 vertes, kai $n = 10$ ir kai $n = 1,9$.
5. **Kometa** (10 t.) Saulės sistemoje yra labai arti Saulės praskriejančių kometų. Vienos tokios kometos orbitos perihelis yra nutolęs nuo Saulės centro vos per pusantro Saulės spindulio. Įvertinkite minimalų galimą tos kometos branduolio tankį. *Pastaba: kometų branduoliai sudaryti iš dulkių, uolienuų ir ledo gabalėlių mišinio, kurių krūvoje išlaiko tik gravitacija.*
6. **Nepilotuojamas lėktuvas** (7 t.) CŽV naudojamo bepiločio lėktuvo „Reaper“ maksimalus greitis 893 km/h, jis ginkluotas raketomis „Hellfire“, kurios gali nukristi 8 km 1530 km/h greičiu. Teroristas lėktuvą girdi iš 12 km atstumo. Kokiame didžiausiam aukštyje gali skristi „Reaper“, kad teroristas taip ir neišgirstų, kas į jį pataikė? Laikykite, kad raketos skrieja tiesiai, o lėktuvai — tiesiai ir horizontaliai. Garso greitis ore 340 m/s.
7. **Savamokslis elektrikas** (5 t.) Savamokslis elektrikas nustatė, kad įtampa roze-tėje, prie kurios tuo metu prijungtas 1 kW galios elektrinis virdulys yra vos 190 V. Ar saugu gyventi elektriko name, jei jame įrengtas 30 A elektros saugiklis? Namu elektros įvadą laikykite idealiu 220 V įtampos šaltiniu.
8. **Nutrūkusi elektros linija** (7 t.) Per audrą nutrūko 350 kV elektros perdavimo linija, vienas iš laidų įkrito į 1 m skersmens pusrutulio formos balą. Koku atstumu nuo tos balos pavojinga vaikščioti žmonėms? Laikykite, kad žmogui pavojinga didesnė nei 70 V įtampa tarp galūnių, žmogaus žingsnio ilgis 70 cm, o dirvos varža daug didesnė nei vandens.
9. **Monumentali antena** (7 t.) Anupras rašo dailės istorijos kontrolinį, o Juzė sėdi valgykloje (100 m nuo dailės kabineto) ir transliuoja atsakymus siųstuvu, padarytu iš dviejų dipolinių antenų, prijungtų prie 800 MHz įtampos šaltinio 0,5 m laidais. Antenos yra Žemės paviršiu statmeni strypai, spinduliuojantys koncentriškas bangas horizontalioje plokštumoje. Bangos turi dažnį kaip šaltinis ir savybes kaip šviesa. Antenas jungianti tiesė su Juzės kryptimi sudaro 60° kampą. Kokį atstumą tarp antenų turi parinkti Anupras, kad perduotų galingiausią signalą?
10. **Sniego senis** (7 t.) Senis besmegenis padarytas iš trijų rutulių, kurių skersmenys yra 25 cm, 50 cm ir 75 cm. Per kiek laiko jo temperatūra pakiltų 0,5 °C, jei jis šiltų tolygiai dėl Saulės energijos ir nebūtų absorbuotos energijos praradimo? Palydovų užfiksuota Saulės galia yra 1400 W/m², atmosfera sugeria 20% energijos, sniegas atspindi 80% energijos, sniego savitoji šiluma yra 2100 J/(kg · K), tankis 600 kg/m³. Saulė yra prie pat horizonto, temperatūra lauke –10 °C. Į atspindžius nuo sniego neatsižvelgti.
11. **Kubas** (5 t.) Petriukas mažame kalnų ežere labai stačiais ir aukštais šlaitais pasistatė povandeninį kubo formos namą, kurio kraštinė 5 m. Kubo viršus yra 2,5 m gylyje po vandeniu, tvenkinio plotas 1 ha. Tačiau išvykus atostogų namas buvo užpildas vandeniu, ir grįžęs namo Petriukas nusprendė iš namo vandenį išsiurbti elektriniu siurbliu. Kadangi aplinkui kalnai, vanduo turės būti pilamas į tą patį ežerą.
 - a) Kiek jam tai kainuos, darant prielaidą, kad elektrinio siurblio efektyvumas yra 100%? Elektros kaina 50 ct/kWh.
 - b) Kiek Petriukas būtų sutaupęs, jei būtų namą pasistatęs ežere, kurio paviršiaus plotas yra begalinis?
12. **Penkiamatis kubas** (5 t.) Penkiamatėje erdvėje kabo hiperkubas iš visų dešimties pusių prilaikomas $k = 2$ N/m standumo spyruoklėmis. Spyruoklės statmenos kubo sienelėms ir ištemptos iki dvigubo nei pradinis ilgio. Raskite mažų svyravimų periodą statmenai kuriai nors sienelei. Hiperkubo kraštinės ilgis $a = 2$ cm, tankis $\rho = 5$ g/cm⁵
13. **„Curiosity“ skrydis** (10 t.) Marso tyrimų laboratorija „Curiosity“ Žemę paliko 2011 lapkričio 26 d., o Marse nusileido 2012 rugpjūčio 5 d. Kada bus artimiausia proga ką nors pasiųsti į Marsą? Planetų orbitas laikykite apskritiminėmis.
14. **Gitara** (7 t.) Skambanti gitaros styga gali būti aprašyta bendra lygtimi $y = A \sin kx + B \cos kx$, kur A, B konstantos, k — bangos skaičius ($k = 2\pi/\lambda$), x — koordinatė išilgai stygos, y — stygos nuokrypis nuo pusiausvyros.
 - a) Jei stygos, įtvirtintos galuose, ilgis L , kokios nuokrypio reikšmės $y(x = 0)$ ir $y(x = L)$? Raskite B bei galimas k vertes.
 - b) Nubrėžkite tris mažiausio dažnio gitaros stygos modas (sprendinius $y(x)$).

- c) Stygos skersinių bangų greitis priklauso nuo stygos įtempimo T bei ilginio tankio ρ . Panaudokite dimensinę analizę, kad surastumėte šią priklausomybę.
- d) Suraskite mažiausią dažnį, kuriuo skamba styga.
15. **Burbulas** (10 t.) Skystis nesvarioje aplinkoje turi spindulio r_0 burbulą, pradinis slėgis skystyje p_0 .
- a) Raskite slėgį burbulo viduje (papildomas slėgis burbuliuke dėl paviršiaus tempimo $2\sigma/r$, kur σ — tempimo koeficientas, r — burbulo spindulys).
- b) Slėgis skystyje izotermiškai pakeičiamas į p . Parodykite, kad $pr^3 + 2\sigma r^2 = C$, bei raskite konstantos C reikšmę ir dimensijas. Ką šis dėsnis galėtų reikšti?
- c) Tarkite, kad naujas burbuliuko spindulys $r = r_0 + a$, kur $a \ll r_0$. Naudodami aproksimaciją $(1+x)^n \approx 1+nx$, raskite burbuliuko spindulį, kai slėgis skystyje p .
- d) Laikydami, kad $p \ll \sigma/r_0$, nubrėžkite a priklausomybę nuo p .
16. **Šaltas namas** (7 t.) Kai lauke temperatūra -10°C , neapšiltintame name, kuris turi viengubą plytų sieną, užkūrus pečių temperatūra pakyla iki -5°C . Visa šiluma prarandama pro sienas pagal Niutono šilumos laidumo dėsnį $P = \kappa S \Delta T / d$, kur P — šilumos kiekis per laiko vienetą (galia), κ — šiluminis laidumo koeficientas, ΔT — temperatūrų skirtumas, d — sienos storis, S — sienos plotas.
- a) Paašškinkite Niutono šilumos laidumo dėsnio fizikinę prasmę.
- b) Kokia temperatūra būtų name, jei jis turėtų dvigubą plytų sieną?
- c) Kokia temperatūra bus name, jei tarp dvigubos plytų sienos bus dar ir tokio paties storio apšiltinamoji medžiaga, kurios šilumos laidumo koeficientas κ yra 4 kartus mažesnis nei plytų?
17. **GPS palydovas** (8 t.)

- a) Vienas atominis laikrodis paliktas Žemėje, o kitas yra GPS palydove, skriejančiame spindulio αR apskritimine orbita, kur R yra Žemės spindulys, o $1 < \alpha < \infty$. Dėl bendrosios reliatyvumo teorijos efektų, laikrodžiai eina šiek tiek skirtingais greičiais.

Laiko sutrumpėjimas dėl specialiosios reliatyvumo teorijos. Sakykime, kad turime nejudantį stebėtoją ir greičiu v erdvėlaivyje skriejantį astronautą. Jei astronauto laikrodis išmatavo laiko intervalą $\Delta\tau$, tai nejudantis stebėtojas išmatuos laiko intervalą $\gamma\Delta\tau$, kur

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Antras efektas yra *laiko sulėtėjimas gravitaciniame lauke*. Turime du nejudančius stebėtojus, vienas iš jų yra ant Žemės paviršiaus, o kitas — toli begalybėje.

Toli esantis stebėtojas matuoja laiko intervalą Δt , o Žemėje likęs stebėtojas — $\Delta\tau$. Tuomet

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} \Delta t,$$

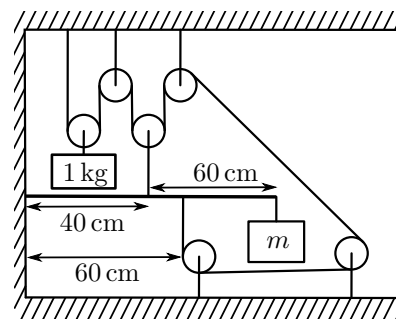
kur M yra Žemės masė.

Silpnuose gravitaciniuose laukuose šie efektai yra nepriklausomi vienas nuo kito. Kuris iš laikrodžių eina lėčiau? Į Žemės sukimąsi nekreipkite dėmesio.

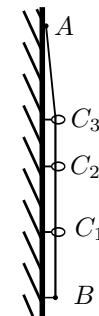
- b) Kiek skirsis laikrodžių parodymai po vienerių metų, jei GPS palydovai skrieja 20 Mm aukštyje virš Žemės paviršiaus?

Konstanta	Žymėjimas	Reikšmė	Vienetai
Šviesos greitis vakuume	c	$3 \cdot 10^8$	m/s
Gravitacijos konstanta	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3/(\text{kg s}^2)$
Laisvo kritimo pagreitis	g	9,81	m/s^2
Marso masė	M_{M}	$6,41 \cdot 10^{23}$	kg
Marso spindulys	R_{M}	3386	km
Saulės masė	M_{S}	$1,99 \cdot 10^{30}$	kg
Saulės spindulys	R_{S}	$6,96 \cdot 10^5$	km
Žemės masė	$M_{\text{Ž}}$	$5,97 \cdot 10^{24}$	kg
Žemės spindulys	$R_{\text{Ž}}$	6370	km

Dimensijų analizės algoritmas. Nežinom formulės dydžiui A . a) Logiškai išmąstom, kad A priklauso nuo a, b, c ; b) užrašom $A = a^m b^n c^k$ ir randam tokius m, n, k , kad abiejose lygties pusėse būtų ta pati dimensija; c) dar kartą pamąstom, kokios tokios formulės taikymo ribos; ar formulė nesipyksta su logika ir fizika. Pastaba: toks metodas yra *rizikingas*. Net kai jis veikia, atsakymas nuo tikrojo gali skirtis bedimensiniu daugikliu.



1 pav. Skridiniai



2 pav. Alpinistas