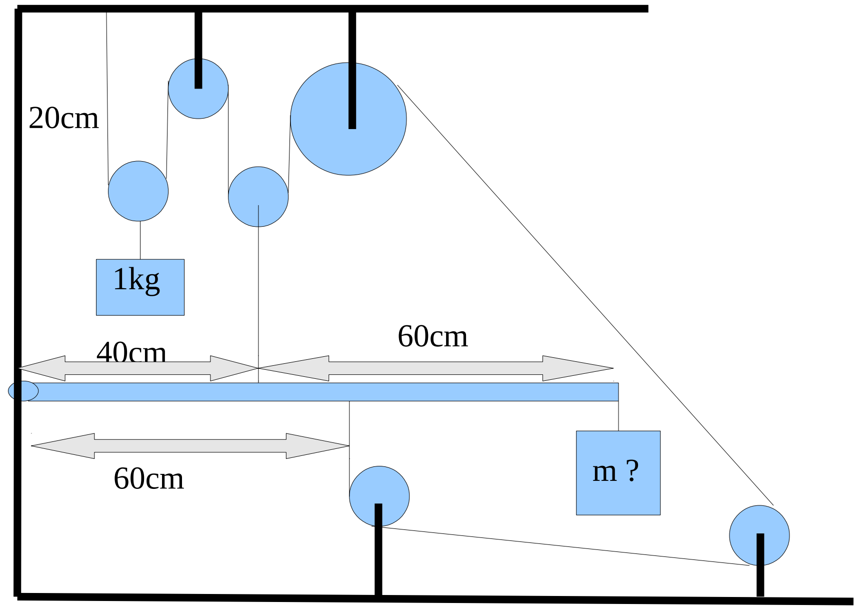
1. Komandinės tradicinis



Sprendimas: virvės įtempimo jėga yra T ir ji tolygiai pasiskirsčiusi kiekviename virvės taške (nes visi taškai pusiausvyroje nejuda). Kūno pusiausvyros lygtis teigia, kad:

$2\mathrm{T}=m_0 g$, kur $m_0=1\mathrm{kg}$. Svertą veikiančių momentų suma turi būti lygi nuliui:

$Mgx_0=2\mathrm{T}\mathrm{x}_1-Tx_2=T(2\mathrm{x}_1-x_2)$, kur $x_1=0.4\mathrm{m}, x_2=0.6\mathrm{m}, x_0=1\mathrm{m}$.

Į šią lygtį įsistačius T gauname:

$Mgx_0=\frac{1}{2}m_0 g(2\mathrm{x}_1-x_2)$ ir galiausiai $M=\frac{1}{2}m_0\frac{(2\mathrm{x}_1-x_2)}{x_0}$.

Įsistatę skaičius gauname: $M=\frac{1}{2}1\mathrm{kg}\frac{(2\cdot 0.4\mathrm{m}-0.6\mathrm{m})}{1\mathrm{m}}=0.1\mathrm{kg}$

1 Marso teraformavimas

Norint Marso klimatą padaryti panašų į Žemės, pirmiausia Marse reikia suformuoti ir sušildyti atmosferą. Dabartinės CO_2 atmosferos slėgis Marso paviršiuje yra tik 0,6 kPa. Marso regolite gali būti apie 10^{18} kg CO_2. Įvertinkite Marso atmosferos slėgį, jei visą CO_2 sublimuotume. Kaip pasikeis atmosferos temperatūra?

1.1 Sprendimas

Slėgis Marso paviršiuje bus senas slėgis plius išgaravusio CO_2 sukeltas slėgis. Marso paviršiaus plotas yra $S = 4\pi R_{♂}^2$, atmosfera Marsą veiki jėga $F = mg_{♂}$. Laisvojo kritimo pagreitis Marse yra $GM_{♂}/R_{♂}^2$. Taigi

$$P = P_0 + \frac{F}{S} = P_0 + \frac{mg_{♂}}{4\pi R_{♂}^2} = P_0 + \frac{mGM_{♂}}{4\pi R_{♂}^4}.$$

Įstatę skaičius gauname šiek tiek mažiau nei 30 kPa.

Ši atmosfera būtų gerokai šiltesnė už dabartinę dėl šiltnamio efekto. Padidėjus CO_2 kiekiui atmosferoje infraraudonieji spinduliai bus sulaikomi Marso paviršiuje ir Marsas įšils.

2 Žvaigždė

Parodykite, kad slėgis masės M ir spindulio R žvaigždės centre $P > \frac{GM^2}{8\pi R^4}$. *Pagalba: parodykite, kad* $f(r) = P(r) + \frac{Gm(r)^2}{8\pi r^4}$ *yra mažėjanti funkcija.*

2.1 Sprendimas

Panagrinėkime ploną sferinį žvaigždės sluoksnį (nuo r iki $r + \Delta r$). Žvaigždė yra pusiausvyroje, taigi slėgių skirtumas turi atsverti gravitacinę trauką. Tačiau šis žvaigždės sluoksnis jaučia tik vidinės žvaigždės dalies gravitacinę trauką.

$$-\frac{Gm(r)\Delta m}{r^2} = S\Delta P = 4\pi r^2 \Delta P.$$

Bet

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = \frac{\Delta P}{\Delta m}\frac{\Delta m}{\Delta r} = \frac{Gm(r)}{4\pi r^2}\frac{\Delta m}{\Delta r}.$$

$$f'(r) = P'(r) + \frac{Gm'(r)m(r)}{4\pi r^4} - \frac{Gm(r)^2}{2\pi r^5} = \cancel{-\frac{Gm(r)m'(r)}{4\pi r^4}} + \cancel{\frac{Gm'(r)m(r)}{4\pi r^4}} - \frac{Gm(r)^2}{2\pi r^5} = -\frac{Gm(r)^2}{2\pi r^5} < 0.$$

Taigi f yra mažėjanti funkcija.

$$f(R) = \cancelto{0}{P(R)} + \frac{GM^2}{8\pi R^4} = \frac{GM^2}{8\pi R^4}.$$

$$f(0) = P(0) + \lim_{r\to 0}\frac{Gm(r)^2}{8\pi r^4} = P(0) + \lim_{r\to 0}\frac{G\left(\rho\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2}{8\pi r^4} = P(0).$$

$$f(0) > f(R) \Rightarrow \boxed{P(0) > \frac{GM^2}{8\pi R^4}.}$$

1 Alpinistas

Kad galėtume spręsti šį uždavinį, mums reikia mokėti apskaičiuoti bet kokio ilgio (pažymėkime jį l) virvės atkarpos tamprumo koeficientą k_l. Pagal tamprumo koeficiento apibrėžimą, $k_l = F/\Delta x$, kur F — virvę veikianti jėga, o Δx — jos deformacija. Pagal sąlygą, 1 m ilgio virvės atkarpos deformacija $\Delta x_1 = F/k$, todėl l ilgio atkarpos deformacija $\Delta x = lF/k$, taigi jos tamprumo koeficientas

$$k_l = k/l \tag{1.1}$$

Atkreipkite dėmesį: šioje išraiškoje k traktuojamas kaip „tamprumo koeficientas metrui“ ir todėl jo vertė yra $k = 4 \cdot 10^4\,\mathrm{N}$.

Tarkime viršutinio žiedo numeris yra j, alpinistas nukrito būdamas aukštyje H virš jo ir, tuo momentu, kai virvės deformacija x buvo didžiausia, buvo veikiamas maksimalios leistinos virvės įtampos jėgos nmg. Visos alpinistą laikančios nedeformuotos virvės ilgis yra $h_j + H$ todėl pagal (1.1) jos tamprumas $k' = k/(H + h_j)$. Viso alpinistas kris atstumą $2H + x$, taigi iš energijos tvermės dėsnio ir virvės įtampos jėgos išraiškos

$$mg\,(2H + x) = \frac{k}{H + h_j}\frac{x^2}{2} \qquad nmg = \frac{kx}{H + h_j} \tag{1.2}$$

Įsistatę antrąją lygtį į pirmąją ir šiek tiek pertvarkę gauname maksimalų aukštį H kurį galima kopti virš viršutiniojo žiedo, kad nukritus virvės įtampa neviršytų nmg

$$H = \frac{h_j\,(n-2)\,nmg}{4k - (n-2)\,nmg} \tag{1.3}$$

Taigi virvės įtampa bus pakankamai maža, jei $h_{j+1} \le h_j + H$. Alpinistas laisvai krenta atstumą $2H$, todėl jis kris ne daugiau nei $5m$ jei $H \le 2{,}5\,\mathrm{m}$. Iš čia galutinis rezultatas

$$h_{j+1} \le h_j + \max\left\{\frac{h_j\,(n-2)\,nmg}{4k - (n-2)\,nmg}, 2{,}5\,\mathrm{m}\right\} \tag{1.4}$$

kur $h_0 = 0$.

Kai n = 10: Remiantis (1.4): $h_1 = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $h_2 = 5\,\mathrm{m}$, $h_3 = 8{,}23\,\mathrm{m}$, $h_4 = 13{,}54\,\mathrm{m}$.

Kai n = 1,9: Formulė (1.3) čia akivaizdžiai netinka, nes duoda neigiamą atsakymą. Nesunku suprasti, kodėl taip yra. Jei įsistatytume $H = 0$ į (1.2), tai eliminavę x gautume $n = 2$. Tai reiškia, kad net jei alpinistas nukrenta būdamas prie pat žiedo, maksimali virvės įtampos jėga bus $2mg$, taigi niekaip neįmanoma įgyvendinti sąlygos $n = 1{,}9$ ir žiedus teks kabinti kas 2,5 m: $h_1 = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $h_2 = 5\,\mathrm{m}$, $h_3 = 7{,}5\,\mathrm{m}$, $h_4 = 10\,\mathrm{m}$. Kadangi formulėje (1.3) H vertė neigiama, (1.4) formaliai teisinga ir šiuo atveju.

Kometa

Labai arti Saulės skriejančią kometą gali suplėšyti potvynio jėgos (tai jėgos, atsirandančios dėl to, kad Saulė stipriau traukia arčiau jos esančią kometos branduolio pusę). Panagrinėkime, kokioms sąlygoms esant taip nutiks.

Tarkime kometos branduolys rutulio formos, jo spindulys r, masė m. Branduolio centras juda orbita aplink Saulę taigi jokių Saulės traukos pasekmių nejaučia (t.y. Saulės trauka atsveria išcenrinę jėgą). Panagrinėkime masės μ uolienos gabalėlį, esantį kometos branduolio paviršiuje į Saulę atgręžtoje kometos pusėje. Jis juda orbita kartu su kometos centru, taigi išcentrinė jėga bus tokia pati, kaip ir branduolyje. Tačiau Saulės traukos jėga, bus didesnė, nes Saulė arčiau. Dėl šio skirtumo atsiras atstojamoji jėga (vadinama potvynio jėga, nes tos pat prigimties jėgos sukelia vandenynų potvynius Žemėje). Ją nesunku paskaičiuoti:

$$F_p = \frac{GM_\odot \mu}{(R-r)^2} - \frac{GM_\odot \mu}{R^2} = \frac{GM_\odot \mu}{R^2 (R-r)^2} \left(2Rr - r^2\right) \approx \frac{2GM_\odot \mu r}{R^3} \tag{1}$$

kur $R = 1{,}5 R_\odot$ yra atstumas tarp Saulės ir kometos centrų perihelyje, o apytikslė lygybė galioja, nes kometa daug mažesnė už Saulę ($r \ll R$). Jėga nukreipta link Saulės. Ši jėga pradės ardyti kometą, jei jos branduolio paviršiuje bus didesnė už kometos traukos jėgą $F_t = Gm\mu/r^2$. Ribiniu atveju

$$F_t = F_p \quad \Rightarrow \quad \frac{2GM_\odot \mu r}{R^3} = \frac{Gm\mu}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{r^3} = \frac{2M_\odot}{R^3} \tag{2}$$

Kometos tankis

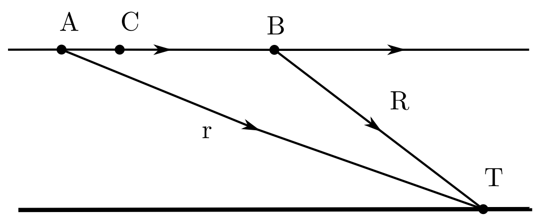
$$\rho = m \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^{-1} = \frac{3}{4\pi}\frac{m}{r^3} \tag{3}$$

Įsistatę čia (2), gauname mažiausią galimą nuo potvynio jėgų nesubyrančios kometos tankį

$$\rho = \frac{3M_\odot}{2\pi R^3} \approx 830\,\mathrm{kg/m^3} \tag{4}$$

Kometų branduolių tankiai iš tiesų būna panašios eilės. Kometos, kurių orbitos nestabilios kartais priartėja labai arti Saulės ir suplėšomos potvynio jėgų. Kartais jos gali sprogti išgaravus branduolyje esančiam ledui.

Nepilotuojamas lėktuvas



Raketa yra viršgarsinė ir skrieja tiesiai link teroristo, taigi pačios raketos, iki jos smūgio, teroristas tikrai neišgirs. Lėktuvą išgirsti jis iš principo gali, nes šis skrenda greičiu, mažesniu už garso greitį. Akivaizdu, jog siekiant, kad teroristas nieko neišgirstų, reikia raketą paleisti iš kiek įmanoma toliau (t.y. iš maksimalaus $R = 8\,\mathrm{km}$ atstumo). Tarkime lėktuvas skrenda aukštyje h. Pažymėkime lėktuvo trajektorijos taškus nutolusius nuo teroristo atitinkamai $r = 12\,\mathrm{km}$ ir $R = 8\,\mathrm{km}$ raidėmis A ir B. Tada A yra tolimiausias taškas, kuriame esančio lėktuvo triukšmą gali girdėti teroristas, o B — raketos paleidimo taškas. Tarkime teroristas prieš raketos smūgį išgirdo triukšmą, kurį lėktuvas skleidė būdamas taške C. Tada jis tikrai jau bus girdėjęs ir triukšmą iš taško A (kadangi garsas iš taško C aplenkia raketą, o lėktuvo greitis ikigarsinis, tai garsas iš taško A raketą aplenktų net sklisdamas iš taško A į tašką C ir tada link teroristo, taigi tikrai aplenkia skrisdamas tiesiai). Vadinasi teroristas spės išgirsti lėktuvą tada ir tik tada, jei jis išgirs taške A skleidžiamą lėktuvo garsą prieš raketos smūgį.

Pažymėkime laiko tarpą tarp momento, kai lėktuvas praskrenda tašką A ir raketos smūgio t_r, o laiko tarpą tarp taško A praskridimo ir momento, kai tame taške skleistas lėktuvo garsas pasiekia tašką, kur yra (arba buvo...) teroristas — t_g. Tada iš brėžinio matome, kad

$$t_g = \frac{r}{v_g} \qquad t_r = \frac{R}{v_r} + \frac{\sqrt{r^2 - h^2} - \sqrt{R^2 - h^2}}{v_l} \tag{1}$$

kur v_g, v_r, v_l yra atitinkamai garso, raketos ir lėktuvo greičiai. Ribiniu atveju (teroristas lėktuvą išgirsta kartu su raketos smūgiu) $t_g = t_r$, iš čia

$$\sqrt{r^2 - h^2} = v_l \left(\frac{r}{v_g} - \frac{R}{v_r} \right) + \sqrt{R^2 - h^2} \tag{2}$$

Pažymėję pirmąjį dėmenį dešinėje lygties pusėje raide η, dukart pakėlę abi puses kvadratu ir pertvarkę gauname

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{\left(r^2 - \eta^2 - R^2\right)^2}{4\eta^2}} \approx 2\,\mathrm{km} \tag{3}$$

Taigi, norint, kad lėktuvas liktų neišgirstas, jis turi skristi ne didesniame nei $2\,\mathrm{km}$ aukštyje.

Savamokslis elektrikas

Virdulio galia $P = U_0^2/R$, kur $U_0 = 220\,\mathrm{V}$ — nominali tinklo įtampa, o R — virdulio varža. Iš čia $R = U_0^2/P$. Kai virdulys įjungtas į rozetę, įtampa joje $U = 190\,\mathrm{V} < U_0$, taigi laidai, jungiantys rozetę su elektros įvadu į namą turi tam tikrą (nelabai mažą) varžą r. Jei virduliu teka srovė I tai

$$IR = U \qquad I(R+r) = U_0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{U_0 R}{U} - R = \frac{U_0^2}{P}\left(\frac{U_0}{U} - 1\right) \tag{0.1}$$

Jei tą pačią rozetę, prie kurios buvo prijungtas virdulys, užtrumpinsime, grandine tekės srovė

$$I_t = \frac{U_0}{r} = \frac{P}{U_0}\left(\frac{U_0}{U} - 1\right)^{-1} = \frac{PU}{U_0\left(U_0 - U\right)} \approx 28{,}8\,\mathrm{A} < 30\,\mathrm{A} \tag{0.2}$$

Taigi šiame name saugiklis neapsaugo nuo trumpo jungimo. Įvykus trumpam jungimui gali būti pažeistas (ir galbūt užsidegti) jį sukėlęs prietaisas, taip pat gali pavojingai perkaisti laidai jungiantys elektros rozetę su įvadu.

Nutrūkusi elektros linija

Kadangi vandens varža žymiai mažesnė nei dirvos, visoje baloje potencialas bus vienodas ir lygus $U_0 = 350\,\mathrm{kV}$ (potencialą skaičiuojame toli nuo balos nutolusio dirvos taško atžvilgiu). Srovė tekės iš balos į dirvą visomis kryptimis. Iš simetrijos matyti, kad srovė visur nukreipta išilgai tiesės, einančios per balos centrą. Tada pagal krūvio tvermės dėsnį bendra srovė, pratekanti per įsivaizduojamą r spindulio pussferę ($r > 0.5\,\mathrm{m}$), kurios centras sutampa su balos centru, turi būti vienoda visoms tokioms pussferėms (t.y. nepriklauso nuo r). Bet pussferės plotas $S = 2\pi r^2$, taigi srovės tankis j atstumu r nuo balos centro atvirkščiai proporcingas atstumo nuo balos kvadratui: $j \propto r^{-2}$. Pagal Omo dėsnį ištisinei aplinkai elektrinio lauko stipris dirvoje $\vec{E} = \rho\vec{j}$ [1] . Kadangi dirvos savitoji varža ρ visur vienoda, gauname $E \propto r^{-2}$. Bet tai ta pati priklausomybė, kaip taškinio krūvio kuriamo elektrinio lauko! Tada ir elektrinio potencialo pasiskirstymas aplink balą turi būti toks pat, kaip taškinio krūvio atveju: $\varphi \propto r^{-1}$, kitaip tariant $\varphi = C/r$, kur C — konstanta [2] . Bet mes žinome, kad balos dugne ($r = R_b = 0.5\,\mathrm{m}$) potencialas yra $\varphi = U_0$, taigi gauname $U_0 = C/R_b$ iš čia įvertiname C ir turime

$$\varphi = \frac{U_0 R_b}{r} \tag{1}$$

Kai žmogus žengia $d = 70\,\mathrm{cm}$ ilgio žingsnį, jo kojos liečiasi su dirvos taškais, kurie gali būti skirtingai nutolę nuo balos centro, taigi turėti skirtingus potencialus. Blogiausiu atveju (kai žmogus žengia tiesiai link balos ar tiesiai nuo jos), o viena jo koja nutolusi atstumu r nuo balos centro potencialų skirtumas (įtampa) tarp jo kojų bus

$$U = \frac{U_0 R_b}{r} - \frac{U_0 R_b}{r+d} = \frac{U_0 R_b d}{(r+d)\,r} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_0 R_b d}{U} = (r+d)\,r \tag{2}$$

Prilyginę žingsnio įtampą minimaliai pavojingai įtampai ($U = 70\,\mathrm{V}$) išsprendžiame (2) gautą lygtį ir randame, kad prie balos pavojinga prieiti arčiau nei per

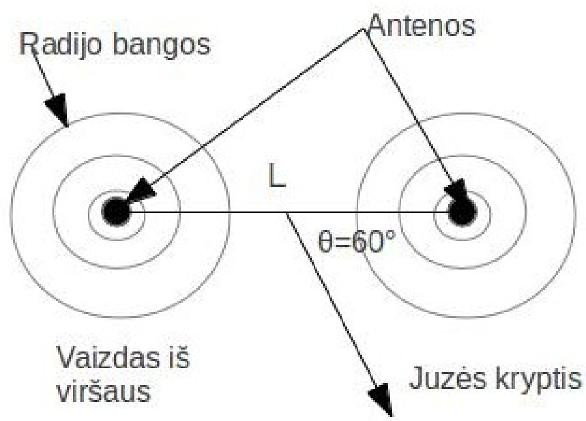
$$r \approx 41\,\mathrm{m} \tag{3}$$

$350\,\mathrm{kV}$ elektros linijomis paprastai teka kintama srovė, bet mūsų skaičiavimams tas neturi įtakos, nes kintamos srovės stiprio (taigi ir įtampos) pasiskirstymas dirvoje bus tas pats, kaip kad prie balos „prijungus“ nuolatinės srovės šaltinį.

[1] Jei neteko matyti šitaip suformuluoto Omo dėsnio, jį nesunku išsivesti. Tereikia prisiminti, kad ilgio l ir skerspjūvio ploto S laido varža yra $R = \rho l/S$ ir įsistatyti tai į įprastą Omo dėsnio išraišką $U = IR$. Gauname $U = I\rho l/S$. Padalinus abi šios išraiškos puses iš laido ilgio l ir prisimenant, kad kai E ir j pastovūs $E = U/l$, $j = I/S$, turime $E = \rho j$.

[2] Jei mokate integruoti ir nemėgstate tokių analogijų, ši rezultatą galite gauti tiesiog suintegravę E pagal r, nes $E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$

9. Monumentali antena



Radijo bangos kaip ir šviesa yra elektromagnetinės bangos, todėl joms taip pat difraguoja ir interferuoja. Pastebime, kad antenos plokštumoje spinduliugas analogiškai šviesai, praeinančiai pro du plyšius. Valgykla nuo dailės kabinto yra žymiai toliau nei maksimalus atstumas tarp antenų (1m<<100m), todėl galime taikyti Fraunhoferio formulę. Šaltiniai prijungti prie to paties šaltinio, todėl spinduliuoja koherentines bangas. Maksimumo sąlyga:

$\lambda m = kL\, cos\theta,\ m \in \mathbb{N}$

L - maksimalus atstumas tarp antenų, k - koeficientas nuo 0 iki 1, parodantis, kokiose ribose gali kisti atstumas tarp antenų, o "standartinis kampas" šiuo atveju $90^\circ - \theta$.

$\lambda = c/f$, f - dažnis

$m_{max} = \frac{f\ L\ cos\theta}{c}$

$m_{max} = 1.33$

$m = 1$

$kL{=}\frac{c\ m}{f\ cos\theta}$

$kL = 0.75m$

10. Sniego senis

Šilumos balanso lygtis:

$V\rho c\Delta T = (1-\eta_{atm})(1-\eta_{atsp})PSt$

$\eta_{atm} = 0.2$

$\eta_{atsp} = 0.8$

Tokie naudingumo koeficientai, nes atmosfera sugeria 20%, todėl 80% pasiekia paviršių; sniegas atspindi 80%, todėl tik 20% šildo besmegenį.

$V = \frac{4}{3}\pi\frac{1}{8}\left(d_1^3 + d_2^3 + d_3^3\right)$

$S = \frac{\pi}{4}\left(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2\right)$ Nes Saulė "mato" tik sniego rutulių skerspjūvius.

Nors Saulė šildo ilgai ir nuobodžiai ir per tą laiką pakyla mažu (nes žiema) kampu virš horizonto, plotas apytiksliai išlieka tas pats.

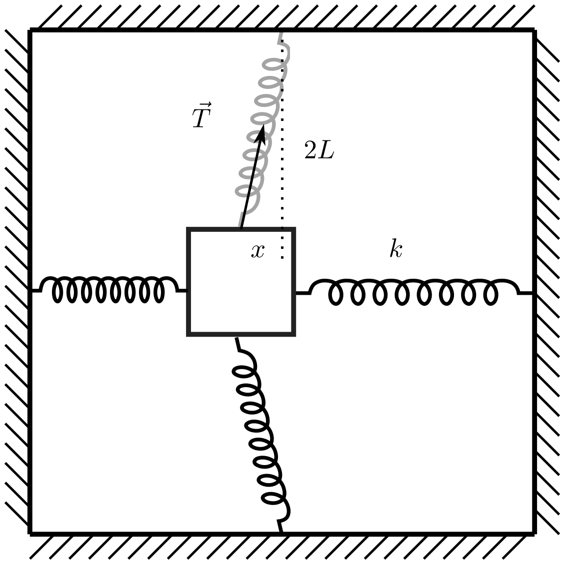
$t = \frac{\rho c\Delta T\frac{4}{3}\pi\frac{1}{8}\left(d_1^3+d_2^3+d_3^3\right)}{(1-\eta_{atm})(1-\eta_{atsp})P\frac{\pi}{4}\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)}$

$t = \frac{\rho c\Delta T\frac{2}{3}\left(d_1^3+d_2^3+d_3^3\right)}{(1-\eta_{atm})(1-\eta_{atsp})P\left(d_1^2+d_2^2+d_3^2\right)}$

$t = 1200s = 20min$

11 Kubas

Abiem atvejais reikia paskaičiuoti, kiek pakils vandens masės centras. Vandens tūris name: $V = 125\mathrm{m}^3$. Atstumas nuo masės centro Petriuko name iki paviršiaus yra $h_0 = 5\mathrm{m}$. Jei ežero plotas A, vandens lygis ežere pakils $\delta h = V / A = 0.0125\mathrm{m}$. Galime interpretuoti, kad išsiurbtas vanduo ir atsiras paviršiuje, o jo masės centras bus $h_0/2$ aukštyje virš buvusio vandens lygio. Vadinasi, visas darbas , kurį reikia atlikti, norint išsiurbti vandenį, yra
$E = (\rho V\, g)(h_0 + \delta h/2) = (1250000\, kg\, m/s^2)(5\mathrm{m} + 0.0125\mathrm{m}/2) = 6.33 * 10^6\, J$
Vadinasi, elektra kainuos $E = (6/33 * 10^6\, J) * 0.5\mathrm{Lt}/(3600000\mathrm{J}) = 0.88$ Lt
Jei ežero plotas būtų begalinis, $\delta h = 0$ ir būtų sutaupyta
$\delta E = (\rho V\, g)(\delta h/2) = (1250000\, kg\, m/s^2)(0.0125\mathrm{m}/2) = 7812.5\, J$ energijos ir kišenėje liktų
$\delta E = (\rho V\, g)(\delta h/2) = (1250000\, kg\, m/s^2)(0.0125\mathrm{m}/2) = 0.001\mathrm{lt}$ daugiau.



1 pav.: Dvimatis kubo skerspjūvis

Penkiamatis kubas

Penkiamatėje erdvėje kabo hiperkubas iš visų dešimties pusių prilaikomas $k = 2\,\mathrm{N/m}$ standumo spyruoklėmis. Spyruoklės statmenos kubo sienelėms ir ištemptos iki dvigubo nei pradinis ilgio. Raskite mažų svyravimų periodą statmenai kuriai nors sienelei. Hiperkubo kraštinės ilgis $a = 2\,\mathrm{cm}$, tankis $\rho = 5\,\mathrm{g/cm^5}$

Sprendimas. Visos spyruoklės statmenos svyravimų tiesiai kubą veikia vienodomis jėgomis, todėl užtenka nusipiešti dvimatį atvejį (žr. brėžinį) ir padauginti vienos spyruoklių poros poveikį iš keturių (1 t.). Taigi antras Niutono dėsnis kubui

$$m\ddot{x} = -2kx - 4(2T\sin\alpha) \quad (1 \text{ t.})$$

Jei spyruoklės pradinis ilgis L, tai $\sin\alpha = x/2L$ (α spyruoklių nuokrypis nuo pradinės padėties), o $T \approx kL$, (nekreipiame dėmesio į jėgos pokytį, dėl papildomo išsitempimo, nes įtempimo jėga dauginama iš kampo α, kuris yra mažas, o mums rūpi tik pirmos eilės lygties nariai), taigi

$$m\ddot{x} = -6kx$$

Kubo masė $m = \rho a^5$ (1 t.), taigi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho a^5}{6k}} \approx 0{,}73\,\mathrm{s} \quad (1{+}1) \text{ t.}$$

„Curiosity“ skrydis

Marso tyrimų laboratorija „Curiosity“ Žemę paliko 2011 lapkričio 26 d., o Marse nusileido 2012 rugpjūčio 5 d. Kada bus artimiausia proga ką nors vėl pasiųsti į Marsą? Planetų orbitas laikykite apskritiminėmis.

Sprendimas. Laikome, kad MSL skriejo skriejo Hohmann orbita – tai yra elipsinė orbita liečiančią planetų apskritimines orbitas (žr. brėžinį). MSL skriejo 253 dienas (2012–ieji keliamieji metai). Tai lygu pusės tokios orbitos periodui (2 t.). Pagal trečią keplerio dėsnį šiaip orbitai

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\check{Z}}^2}{a_{\check{Z}}^3}, \quad (1\text{ t.})$$

kur $T_{\check{Z}} = 365{,}25\,\text{d}$ yra Žemės apsisukimo periodas, o $a_{\check{Z}}$ – didysis pusašis (šiuo atveju ir apskritimo spindulys. Kita vertus, iš brėžinio matome, kad

$$a = \frac{1}{2}(a_{\check{Z}} + a_{\mathrm{M}}) \quad (2\text{ t.})$$

Todėl galime rasti Marso orbitos periodą

$$T_{\mathrm{M}} = T_{\check{Z}}\left(2\left(\frac{T}{T_{\check{Z}}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \quad (1\text{ t.})$$

Žemė ir Marsas vėl išsirikiuos tokio pat padėtyje (laikome, kad planetos aplink Saulę sukasi pastovių greičiu) po

$$T' = \frac{T_{\check{Z}}T_{\mathrm{M}}}{T_{\mathrm{M}} - T_{\check{Z}}} = \frac{T_{\check{Z}}\left(2\left(\frac{T}{T_{\check{Z}}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(2\left(\frac{T}{T_{\check{Z}}}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - 1} \approx 816\,\text{d} \quad (2{+}1\text{ t.})$$

Taigi, kita tokia proga bus 2014 vasario 19 d. (1 t.) (tikroji T' vertė yra labiau 780 dienos. Jei 2011 palankiausias periodas buvo spalis–gruodis, tai kita proga bus 2013 lapkritis–2014 sausis) Žr. Robotic Mars Exploration Strategy 2007–2016.

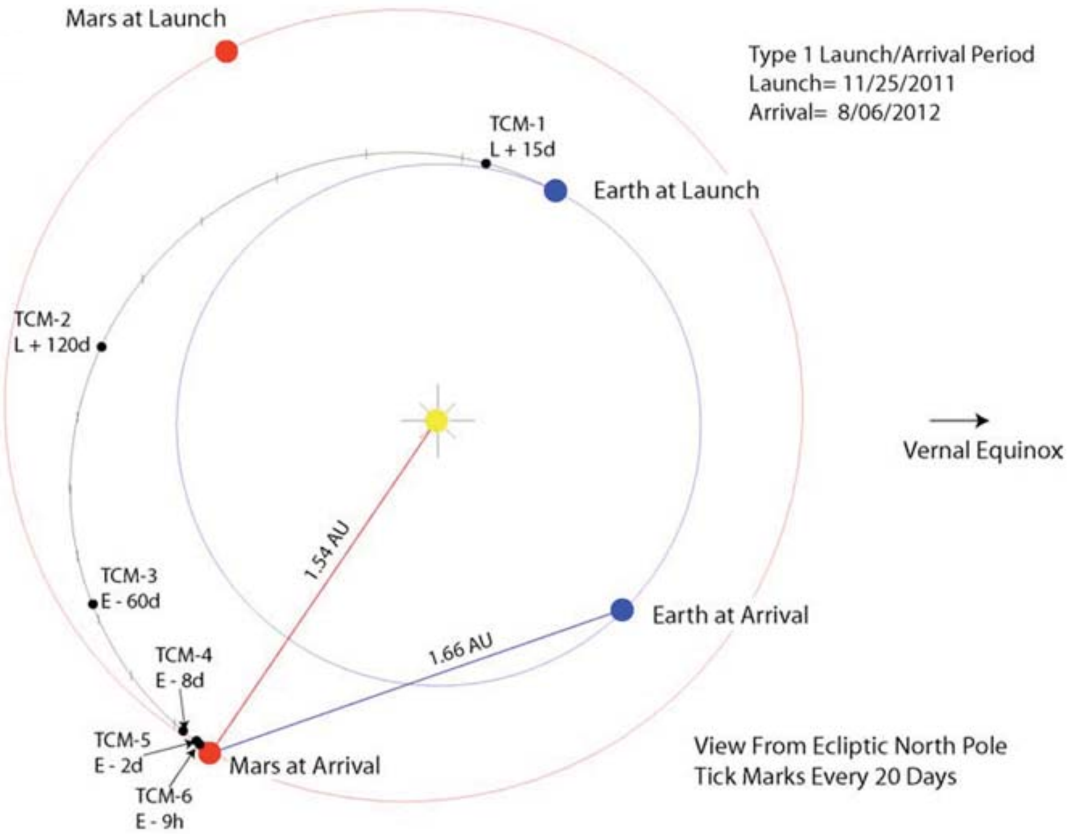


Figure 13. Interplanetary Trajectory for Open of Type 1 Launch Period (Nov 25, 2011)

2 pav.: 2011 Mars Science Laboratory Mission Design Overview

Gitara

Skambanti gitaros styga gali būti aprašyta bendra lygtimi $y = Asinkx + Bcoskx$, kur A, B konstantos, k-bangos skaičius $k = 2\pi/\lambda$, x-koordinatė išilgai stygos, y-stygos nuokrypis nuo pusiausvyros:

1. Jei stygos, įtvirtintos galuose, ilgis L, kokios nuokrypio reikšmės y(x=0) ir y(x=L)? Raskite B bei galimas k vertes.
2. Nubrėžkite tris mažiausio dažnio gitaros stygos modas (sprendinius y(x)).
3. Stygos skersinių bangų greitis priklauso nuo stygos įtempimo T bei ilginio tankio ρ. Panaudokite dimensinę analizę, kad surastumėte šią priklausomybę.
4. Suraskite mažiausią dažnį, kuriuo skamba styga.

Sprendimas.

1. $y(0) = y(L) = 0$. $y(0) = Bcos(0) \Rightarrow B = 0$. $AsinkL = 0 \Rightarrow k = n\pi/L$, kur n sveikasis skaičius.
2. Paprasti $sinx$, $sin2x$, $sin3x$ grafikai nuo 0 iki π.
3. $v = T^a\rho^b$. $[v] = m/s$, $[T] = kgms^{-2}$, $[\rho] = kgm^{-1}$. Galime parašyti lygtį: $m^1s^{-1} = kg^{a+b}m^{a-b}s^{-2a}$, kur s ir m laipsniai duoda $a = 1/2$, $b = -1/2 \Rightarrow v = \sqrt{T/\rho}$.
4. Mažiausias dažnis, kai n=1. Bangos ilgis yra dvigubas stygos ilgis $\lambda = 2L$. Dažnis: $f = 1/2L\sqrt{T/\rho}$.

Burbulas

Skystis nesvarioje aplinkoje turi spindulio r_0 burbulą, pradinis slėgis skystyje p_0:

1. Raskite slėgį burbulo viduje (papildomas slėgis burbuliuke dėl paviršiaus tempimo $2\sigma/r$, kur σ-tempimo koef., r-burbulo spindulys).
2. Slėgis skystyje izotermiškai pakeičiamas į p. Parodykite, kad $pr^3 + 2\sigma r^2 = C$, bei raskite konstantos C reikšmę ir dimensijas. Ką šis dėsnis galėtų reikšti?
3. Tarkite, kad naujas burbuliuko spindulys $r = r_0 + a$, kur $a \ll r_0$. Naudodami aproksimaciją $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, raskite burbuliuko spindulį, kai slėgis skystyje p.
4. Laikydami, kad $p \ll \sigma/r_0$, nubrėžkite a priklausomybę nuo p.

Sprendimas

1. Slėgis burbuliuke $p = p_0 + 2\sigma/r$.
2. Boilio-Marioto dėsnis: $(p_0 + \frac{2\sigma}{r_0})\frac{4}{3}\pi r_0^3 = (p + \frac{2\sigma}{r})\frac{4}{3}\pi r^3$, iš kurio gauname, kad $pr^3 + 2\sigma r^2 = p_0r_0^3 + 2\sigma r_0^2$, todėl konstanta $C = p_0r_0^3 + 2\sigma r_0^2$. C dimensijos yra džauliai, todėl šis dėsnis galėtų reikšti energijos tvermę arba energijos perdavimą.
3. $r^3 = (r_0 + a)^3 = r_0(1 + a/r_0)^3 \approx r_0^3 + 3ar_0^2$, panašiai $r^2 \approx r_0^2 + 2ar_0$ Statome į lygtį: $p(r_0^3 + 3ar_0^2) + 2\sigma(r_0^2 + 2ar_0) = p_0r_0^3 + 2\sigma r_0^2 \Rightarrow a = \frac{r_0^2(p_0-p)}{3pr_0+4\sigma}$
4. Taikydami aproksimaciją, galime nekreipti dėmesio į pirmąjį narį vardiklyje: $a = \frac{r_0^2(p_0-p)}{4\sigma}$. Priklausomybė tiesinė, todėl lengvai galime pabraižyti.

Šaltas namas

Kai lauke temperatūra $T_0 = -10^0C$, neapšiltintame name, kuris turi viengubą plytų sieną, užkūrus pečių temperatūra pakyla iki $T_1 = -5^0C$. Visa šiluma prarandama pro sienas pagal Niutono šilumos laidumo dėsnį $P = \kappa S \Delta T / d$, kur P-šilumos kiekis per laiko vienetą (galia), κ-šiluminis laidumo koeficientas, ΔT- temperatūrų skirtumas, d - sienos storis, S - sienos plotas.

1. Paaiškinkite Niutono šilumos laidumo dėsnio fizikinę prasmę.
2. Kokia temperatūra bus name, jei jis turėtų dvigubą plytų sieną?
3. Kokia temperatūra bus name, jei tarp dvigubos plytų sienos bus dar ir tokio paties storio apšildinamoji medžiaga, kurios š. l. koef. κ yra 4 kartus mažesnis nei plytų?

Sprendimas. Dalykai, kuriuos pastebėjus uždavinys išsisprendžia gana greitai: pečiaus šildymo galia nepasikeičia; šilumos atidavimas proporcingas temperatūrų skirtumui tarp lauko ir vidaus; pro kiekvieną sluoksnį praleidžiamas šilumos kiekis yra tas pats.

1. Šilumos laidumo koeficientas apibūdina medžiagos savybę praleisti šilumą t.y. atomų virpesius. Atiduotas šilumos kiekis yra tiesiogiai proporcingas paviršiaus plotui: padidiname plotą - atiduodame daugiau šilumos. Išsvaistyta šiluma atvirkščiai proporcinga medžiagos storiui: storesnė medžiaga - daugiau atomų turi būti aktyvuoti. Kuo giliau į medžiagą, tuo atomų virpesiai labiau nuslopę ir tuo mažiau šilumos praleidžiama pro medž. sluoksnį. Kuo didesnis temperatūrų gradientas tarp lauko ir išorės, tuo daugiau šilumos atiduodama aplinkai. Labai intuityvu!
2. Temperatūrų skirtumas tarp vidaus ir išorės: $\Delta T = \frac{P}{S} \sum \frac{d_i}{\kappa_i}$ Kadangi $P = \frac{\kappa S (T_1 - T_0)}{d}$, $\Delta T = (T_1 - T_0)(1 + 1) = 10^0C$. Temperatūra name $T_2 = 0^0C$
3. Analogiškai: $\Delta T = (T_1 - T_0)(1 + 1 + \frac{1}{0.25}) = 30^0C$, temperatūra name $+20^0C$.

1 GPS palydovas

a) Vienas atominis laikrodis paliktas Žemėje, o kitas yra GPS palydove, skriejančiame spindulio αR apskritimine orbita, kur R yra Žemės spindulys, o $1 < \alpha < \infty$. Dėl bendrosios reliatyvumo teorijos efektų, laikrodžiai eina šiek tiek skirtingais greičiais.

Laiko sutrumpėjimas dėl specialiosios reliatyvumo teorijos. Sakykime, kad turime nejudantį stebėtoją ir greičiu v erdvėlaivyje skriejantį astronautą. Jei astronauto laikrodis išmatavo laiko intervalą $\Delta\tau$, tai nejudantis stebėtojas išmatuos laiko intervalą $\gamma\Delta\tau$, kur

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Antras efektas yra *laiko sulėtėjimas gravitaciniame lauke.* Turime du nejudančius stebėtojus, vienas iš jų yra ant Žemės paviršiaus, o kitas — toli begalybėje. Toli esantis stebėtojas matuoja laiko intervalą Δt, o Žemėje likęs stebėtojas — $\Delta\tau$. Tuomet

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}\Delta t,$$

kur M yra Žemės masė.

Silpnuose gravitaciniuose laukuose šie efektai yra nepriklausomi vienas nuo kito. Kuris iš laikrodžių eina lėčiau? Į Žemės sukimąsi nekreipkite dėmesio.

b) Kiek skirsis laikrodžių parodymai po vienerių metų, jei GPS palydovai skrieja 20 Mm aukštyje virš Žemės paviršiaus?

1.1 Sprendimas

Sąlygoje duota, jog Žemėje prabėgęs laiko intervalas $\Delta\tau_{\text{Ž}}$ yra

$$\Delta\tau_{\text{Ž}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}\Delta t.$$

Dabar panagrinėkime, kas darosi su GPS palydovu, kuris skrieja apie Žemę. Ten galioja abu efektai, nes palydovas ir juda, ir yra gravitaciniame lauke. Jei palydovas nejudėtų, tai turėtume

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{\alpha Rc^2}}\Delta t.$$

Daugiklis α atsiranda todėl, kad palydovas yra atstumu αR nuo Žemės centro, o ne R. Tačiau palydovas juda, todėl pagal sąlygoje paminėtą pirmąjį efektą, begalybėje esantis stebėtojas matuoja $\gamma\Delta\tau$, vietoj $\Delta\tau$. Todėl

$$\gamma\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{\alpha Rc^2}}\Delta t.$$

Todėl

$$\gamma\Delta\tau_{\text{GPS}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{\alpha Rc^2}}\Delta t.$$

Žemėje laikrodis eina lėčiau, jei $\Delta\tau_{\text{Ž}} < \Delta\tau_{\text{GPS}}$. Vadinasi,

$$\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} < \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{2GM}{\alpha Rc^2}}.$$

Pakeliame kvadratu

$$1 - \frac{2GM}{Rc^2} < \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{2GM}{\alpha Rc^2}\right). \tag{1}$$

Palydovas skrieja apskritimine orbita aplink Žemę, todėl įcentrinė jėga lygi Žemės traukos jėgai:

$$\frac{mv^2}{\alpha R} = \frac{GMm}{(\alpha R)^2},$$

$$v^2 = \frac{GM}{\alpha R}.$$

Įstatome į (1) lygtį:

$$1 - \frac{2GM}{Rc^2} < \left(1 - \frac{GM}{\alpha Rc^2}\right)\left(1 - \frac{2GM}{\alpha Rc^2}\right).$$

$$1 - \frac{2GM}{Rc^2} < 1 - \frac{GM}{\alpha Rc^2} - \frac{2GM}{\alpha Rc^2} + \cancelto{\text{mažas dydis}}{\frac{2G^2M^2}{\alpha^2R^2c^4}}.$$

Išprastiname likusius narius:

$$2 > \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha}$$

$$\boxed{\alpha > \frac{3}{2}.}$$

$H = 20\,000\,\mathrm{km}$ aukštis virš Žemės paviršiaus atitinka $\alpha = \frac{H+R}{R} = 4{,}14$.

$$\frac{\Delta\tau_{\mathrm{GPS}}}{\Delta\tau_{\check{\mathrm{Z}}}} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{2GM}{\alpha Rc^2}\right)}{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}} \approx \sqrt{\frac{1 - \frac{GM}{\alpha Rc^2} - \frac{2GM}{\alpha Rc^2}}{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}} \approx \sqrt{1 - \frac{3GM}{\alpha Rc^2} + \frac{2GM}{Rc^2}} \approx 1 + \frac{GM}{Rc^2}\left(1 - \frac{3}{2\alpha}\right)$$

Todėl

$$\frac{\Delta\tau_{\mathrm{GPS}} - \Delta\tau_{\check{\mathrm{Z}}}}{\Delta\tau_{\check{\mathrm{Z}}}} \approx \frac{GM}{Rc^2}\left(1 - \frac{3R}{2(H+R)}\right)$$

Per metus susidaro 14 ms skirtumas. Jei į šį efektą nebūtų atsižvelgta, GPS vietos nustatymo paklaida po metų būtų daugiau nei 4000 km.