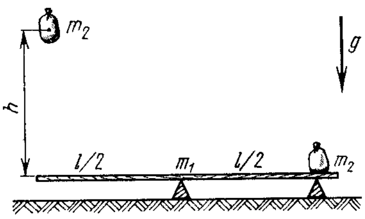
„Fizikos Olimpo“ 2008/2009 m.m. rudens sesijos mechanikos kontrolinis darbas II kurso moksleiviams
Paruošė Donatas Majus, VU FF M1 studentas
2008-09-27

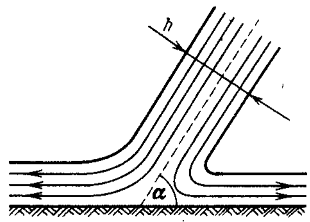
1. Ant lentos galo iš aukščio h krenta smėlio maišas, kurio masė m_2. Ant kito lentos galo padėtas toks pat maišas. Į kokį didžiausią aukštį pakils antrasis maišas, jei lentos ilgis l, o masė m_1?



Sprendimas

Kai pirmasis maišas atsitrenkia į lentą (smūgis netamprus – galime laikyti jis toliau juda kartu su lenta), visa sistema (du maišai ir lenta) pradeda suktis kampiniu greičiu ω. Užrašoma judesio kiekio tvermės dėsnį. Suradę, kokį greitį įgis antrasis maišas, galime surasti jo maksimalų pakilimo aukštį (pagal energijos tvermės dėsnį).	$I_1 \dfrac{v}{l/2} = (I_1 + I_2 + I_1)\omega$ $m_2\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \dfrac{v}{l/2} = \left(2m_2\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{12}m_1 l^2\right)\omega$ $\omega = \dfrac{m_2 v \dfrac{l}{2}}{\dfrac{1}{2}m_2 l^2 + \dfrac{1}{12}m_1 l^2} = \dfrac{6m_2 v}{6m_2 l + m_1 l}$ Antrasis maišas įgis greitį: $v' = \omega \dfrac{l}{2} = \dfrac{3m_2}{6m_2 + m_1} v$ Maksimalus pakilimo aukštis: $h' = \dfrac{v'^2}{2g} = \dfrac{v^2}{2g}\left(\dfrac{3m_2}{6m_2 + m_1}\right)^2 = h\left(\dfrac{3m_2}{6m_2 + m_1}\right)^2$

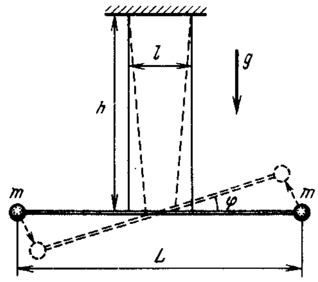
2. Neklampaus skysčio srovė teka ir ties grindimis išsiskiria į dvi dalis. Prie pat grindų srovės plotis h (nagrinėkime dvimatį atvejį). Skysčio tekėjimo kryptis sudaro kampą α su grindimis. Į kokias dvi dalis išsiskiria srovė? Tekėjimas laminarus.



Sprendimas

Remkimės analogija tarp skysčio elemento ir kieto kūno. Jei kūne vidinės jėgos darbo neatlieka, tai kūnas skils į dvi dalis, judančias tuo pačiu pradiniu greičiu (dėl energijos tvermės dėsnio). Skysčio atveju abi atšakos judės tuo pačiu greičiu v. Remiantis impulso tvermės dėsniu (horizontalia kryptimi):	$m_0 v\cos\alpha = m_1 v - m_2 v,$ $m_0 \cos\alpha = m_1 - m_2,$ $h\cos\alpha = h_1 - h_2.$ Iš skysčio tolydumo lygties: $h = h_1 + h_2,$ Iš pastarųjų lygčių: $h_1 = \dfrac{1}{2}h(1+\cos\alpha),\ h_2 = \dfrac{1}{2}h(1-\cos\alpha).$

3. Ant dviejų netamprių siūlų simetriškai pakabintas strypelis. Atstumas tarp siūlų l, strypelio ilgis L, siūlų ilgis h ($l \ll h$, $l \ll L$). Strypelio galuose yra maži m masės rutuliukai. Jei strypelis pasukamas kampu mažu $\varphi \ll 1$ apie savo vertikalią simetrijos ašį, jis pradeda svyruoti. Parodykite, kad gražinantis į pusiausvyros padėtį jėgų momentas tiesiškai priklauso nuo φ, o strypelio potencinė energija nuo φ^2. Koks sistemos mažų svyravimų periodas?



Sprendimas

Siūlai netamprūs, todėl jų ilgis nekinta. Jei strypelis pasisuka jis ir pakyla. Jei strypelis pasisuka kampu ϕ, tai siūlo tvirtinimo prie jo taško nuokrypis

$$x = \frac{l}{2}\phi$$

Siūlo kampas su vertikale (arba pradine siūlo padėtimi):

$$\alpha = \frac{x}{h} = \frac{l}{2h}\phi$$

Siūlams nukrypus nuo vertikalės, strypelis pakyla per

$$\Delta h = h - h\cos\alpha = h\left(1-\cos\alpha\right) \approx h\left(1-1+\frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{l^2}{8h}\phi^2$$

Strypelio potencinės energijos pokytis:

$$U = 2mg\Delta h = \frac{mgl^2}{4h}\phi^2.$$

Strypelį veikia siūlų tempimo jėgos ir sunkio. Kadangi α daug mažesnis už $\phi \ll 1$ tai galime sakyti, kad siūlo tempimo jėga $T \approx mg$, o horizontalioji T dedamoji sukuria sukimo momentą, grąžinantį strypelį į pusiausvyros padėtį.

$$I\varepsilon = M$$

$$I\ddot{\phi} = -2T\sin\alpha\frac{l}{2}$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{mgl^2}{2hI}\phi$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{gl^2}{hL^2}\phi$$

Iš šios svyravimų lygtis randame kampinį svyravimų dažnį:

$$\omega = \frac{l}{L}\sqrt{\frac{g}{h}}$$