Fizikos Olimpo 2008/2009 m.m. žiemos sesijos mechanikos kontrolinis darbas I kurso moksleiviams

Paruošė Donatas Majus, VU FF magistrantas 2009-01-16

1. Kalno papėdėje pirmakursis (-ė) meta akmenį link kalno viršūnės greičiu v. Kokiu kampu su horizontu reikia mesti akmenį, kad šis nukristų toliausiai? Kalno šlaito kampas α.

Sprendimas:

<table>
<tr>
<td>Tegul x ašis būna išilgai kalno šlaito, o y ašis statmena jam. Akmuo metamas kampu φ su kalno šlaitu. Laisvo kritimo pagreitis išskaidomas į gx ir gy komponentes. Užrašius akmens judėjimo lygtis rasime akmens skridimo laiką bei nuotolį nuo metimo taško.</td>
<td>

$$\begin{cases} x = v_x t + \frac{1}{2} g_x t^2 \\ y = v_y t + \frac{1}{2} g_y t^2 \end{cases}$$

$$g_x = -g \sin \alpha, g_y = -g \cos \alpha$$

$$v_x = v \cos \varphi, v_y = v \sin \varphi$$

$$\begin{cases} l = vt \cos \varphi - \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha \\ 0 = vt \sin \varphi - \frac{1}{2} gt^2 \cos \alpha \rightarrow t = \frac{2v \sin \varphi}{g \cos \alpha} \end{cases}$$

$$l = \frac{2v^2}{g \cos^2 \alpha} \left(\sin \varphi \cos \varphi \cos \alpha - \sin^2 \varphi \sin \alpha \right)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow \mathrm{tg} 2\varphi = \mathrm{ctg} \alpha,$$

$$\mathrm{tg} 2\varphi = \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$$

</td>
</tr>
</table>

2. Lapė pamato zuikį, tupintį atstumu L_0 nuo jos. Zuikis irgi pastebi lapę ir pradeda greičiu v šuoliuoti kryptimi, statmena pradinei tiesei , jungusiai lapę ir zuikį. Lapė gali bėgti didžiausiu greičiu v ir bėga visąlaik tiesiai į zuikį. Ar pagaus lapė zuikį? Kokiu atstumu lapė prisiartins prie zuikio?

Sprendimas

<table>
<tr>
<td>Suraskime kaip greitai kinta atstumas tarp lapės ir zuikio išilgai x ir y ašių. Priklausomybė gana sudėtinga, nes einant laikui kinta ir kampas ф.</td>
<td>

$$dx = -v \cos \varphi \cdot dt$$

$$dy = vdt - v \sin \varphi \cdot dt$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Pabandykime panagrinėti kaip kinta atstumas nuo zuikio iki lapės t.y. atsižvelkime, kad atstumas kinta atstumo L dydis ir “kryptis”. Perėję į zuikio atskaitos sistemą, gausime tokius sąryšius:</td>
<td>

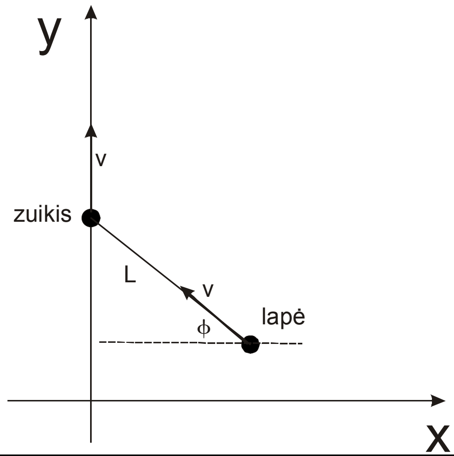
$$dL_{\parallel} = -vdt + v \cos(90^o - \varphi) \cdot dt = -vdt + v \sin \varphi dt,$$

$$dL_{\perp} = v \sin(90^o - \varphi) \cdot dt = v \cos \varphi \cdot dt$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Priklausomybė ne ką paprastesnė, tačiau galime pastebėti , kad:</td>
<td>

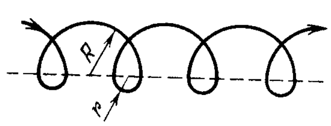
$$dy = -dL_{\parallel}$$

</td>
</tr>
</table>

Jei lapė zuikio nepagaus, tai po gana ilgo laiko, abu judės išilgai y ašies ir atstumas tarp jų nusistovės L_1  	$\int_0^{L_1} dy = \int_{L_0}^{L_1} -dL_{\parallel}$ $L_1 = -(L_1 - L_0)$ $L_1 = L_0 / 2$

3. Kūnas juda pastovaus modulio greičiu trajektorija, sudaryta ir spindulio R ir r pusapskritimių. Koks vidutinis greitis ašimi, pavaizduota brūkšnine linija?

Sprendimas:

Kūno judėjimo trajektoriją galime suskaidyti į lygias dalis, kurių viena atitiktų R spindulio pusapskritimio apėjimą ir r spindulio pusapskritimio apėjimą. Vidutinį greitį išilgai pavaizduotos ašies rasime poslinkį padalinę ir nurodytos trajektorijos dalies apėjimo laiko.  	Poslinkis: $\Delta x = x_1 - x_2 = 2R - 2r = 2\left(R - r\right)$ Kelias: $s = \pi R + \pi r = \pi\left(R + r\right)$ Apėjimo laikas: $t = \frac{s}{v} = \frac{\pi\left(R + r\right)}{v}$ Vidutinis greitis išilgai ašies: $v_x = \frac{\Delta x}{t} = \frac{2v\left(R - r\right)}{\pi\left(R + r\right)}$