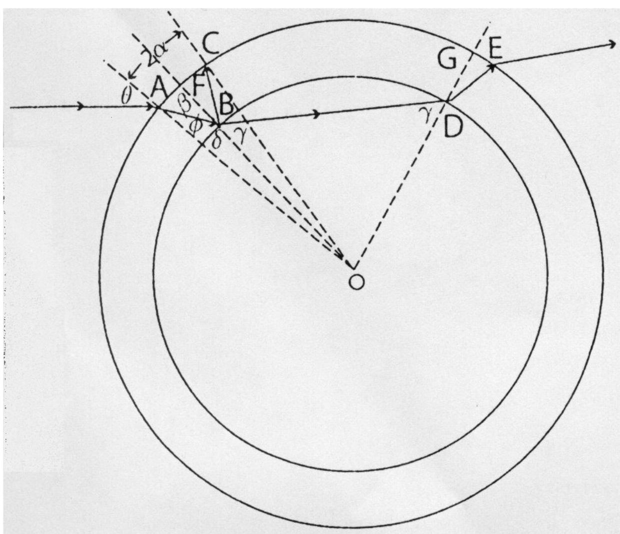
57 –osios LFMO 12 klasės (III-ojo rato) užduotys

Eksperimentinis uždavinys 12 klasei (3-ias turas, 2009 m.)

<u>Priemonės:</u> Stiklinis indas (stiklo lūžio rodiklis n_s=1,52), lazerinė rodyklė, milimetrinio popieriaus juostelė, medinė kaladėlė, medinis krokodilas.

<u>Raskite</u> būdą išmatuoti stiklinio indo sienelės storį. Įvertinkite matavimo paklaidą.



<u>Sprendimas</u>: Tarkime R yra išorinis, o r – vidinis, nagrinėjamos stiklinio indo dalies (žiedo), spinduliai. Lazerio spindulį kampu θ nukreipiame į stiklinio indo paviršių taške A. Taške A dalis lazerio spindulio nuo indo paviršiaus atsispindi, o kita dalis lūžta (pav.1). Lūžęs spindulys sklinda stiklu į tašką B, esantį skiriamojoje riboje stiklas-oras(indo viduje). Taške B atsispindėjęs lazerio spindulys sklinda į tašką C, o lūžęs(oru indo viduje) – į tašką D. Taške D lazerio spindulys skiriamojoje riboje oras-stiklas lūžta ir sklisdamas stiklu pasiekia tašką E, kuriame dar kartą, skiriamojoje riboje stiklas-oras, lūžęs išeina į aplinką.Tokiu būdu, išoriniame stiklinio indo paviršiuje, taškuose A, C ir E stebime tris šviesias dėmeles. Šių dėmelių tarpusavio padėtys leidžia rasti stiklinio indo sienelės storį.

Patogumo dėlei įvedame žymėjimus paveiksle: $OA = R$, $OB = r$, $\angle BAO$ atitinka $\angle\phi$, $\angle ABO$ — $\angle\delta$ ir $\angle AOC$ — $\angle 2\alpha$. Trikampiui ABO pritaikę sinusų dėsnį gauname

$r = R\dfrac{\sin\phi}{\sin\delta}$. Išmatavę išorinį indo spindulį R ir nustatę kampus ϕ ir δ, rasime ieškomą stiklinio indo sienelės storį: $d = R - r = R\left(1 - \dfrac{\sin\phi}{\sin\delta}\right)$.

Nustatysime kampus δ ir ϕ. Iš paveikslo seka, kad $\delta = \pi - \beta$. Lazerio spindulio kritimo taške B parašę lūžio dėsnį $\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \dfrac{1}{n_S}$, randame $\beta = \arcsin\left(\dfrac{\sin\gamma}{n_S}\right)$, kur n_S – stiklo lūžio rodiklis. Iš paveikslo matome, kad $CE = FG$, tuomet $\gamma = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{CE}{R}\right)$. Analogiškai , remdamiesi paveikslu, randame kampą ϕ: $\phi + \delta + \alpha = \pi$; $\phi = \pi - \delta - \alpha = \pi - \pi + \beta - \alpha = \beta - \alpha$, kur $\alpha = \dfrac{AC}{2R}$.

Remiantis aukščiau išnagrinėta uždavinio sprendimo eiga, sudarome formulių seką ieškomiems kampams bei stiklinio indo sienelės storiui rasti:

1. $\gamma = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{CE}{R}\right)$**;**

2. $\beta = \arcsin\left(\dfrac{\sin\gamma}{n_s}\right)$**;**

3. $\delta = \pi - \beta$ **;**

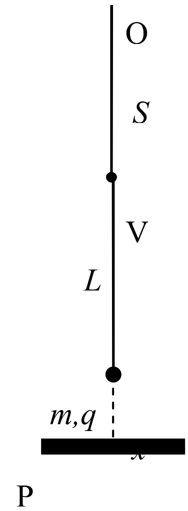
4. $\alpha = \dfrac{AC}{2R}$**;**

5. $\phi = \beta - \alpha$ **;**

6. $d = R - r = R\left(1 - \dfrac{\sin\phi}{\sin\delta}\right)$**.**

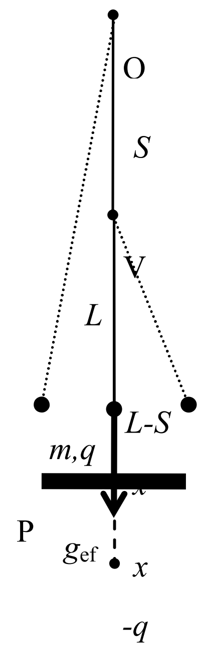
1 uždavinys (*10 t.*)

Masės m ir krūvio q rutuliukas pakabintas ant ilgio netąsaus L siūlo, pritvirtinto taške O. Vertikaliai žemyn atstumu S nuo taško O yra vinis V, trukdanti visam siūlui atsilenkti į dešinę. Žemiau rutuliuko atstumu x yra horizontali laidi įžeminta plokštuma P. Kam lygus rutuliuko mažų svyravimų periodas T? Į atstumo x pokyčius galima neatsižvelgti.



Sprendimas

Dėl vinies pilnas svyravimų periodas yra lygus dviejų pusperiodžių, atitinkančių skirtingus matematinių svyruoklių ilgius L ir L-S, sumai



$$T = \pi\left(\sqrt{\frac{L}{g_{\text{ef}}}} + \sqrt{\frac{L-S}{g_{\text{ef}}}}\right).$$

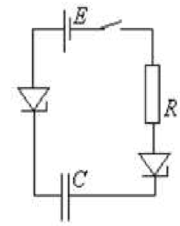
Čia g_{ef} žymi pagreitį atsirandantį dėl Žemės traukos ir elektrostatinės sąveikos su indukuotu krūviu $g_{\text{ef}} = g + \frac{F_q}{m}$. g – laisvojo kritimo pagreitis. Elektrostatinės sąveikos su indukuotu krūviu jėga F_{q} yra lygi kuloninės sąveikos su kito ženklo krūviu, esančiu atstumu x kitapus laidžios plokštumos, jėgai:

$$F_q = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2x)^2}.$$

$$T = \pi\left(\sqrt{\frac{L}{g + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2 m}}} + \sqrt{\frac{L-S}{g + \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 x^2 m}}}\right).$$

Atsakymas: $\boxed{T = \pi\left(\sqrt{\frac{16\pi\varepsilon_0 x^2 mL}{16\pi\varepsilon_0 x^2 mg + q^2}} + \sqrt{\frac{16\pi\varepsilon_0 x^2 m(L-S)}{16\pi\varepsilon_0 x^2 mg + q^2}}\right)}$.

2 uždavinys (*10 t.*)



Nuosekliai į grandinę sujungti E elektrovaros šaltinis, du vienodos pramušimo įtampos U_{pr} stabilitronai, talpos C kondensatorius ir varžos R rezistorius. Koks krūvis q susikaups ant kondensatoriaus plokštelės įjungus jungiklį? Koks šilumos kiekis Q išsiskiria rezistoriuje iki visiško kondensatoriaus įelektrinimo? Stabilitronas yra tam tikra puslaidininkinių diodų rūšis. Įjungtas laidumo kryptimi jis gerai praleidžia srovę, o užtvarine kryptimi - jis praleis srovę jei įtampa bus didesnė už jo pramušimo įtampą. Stabilitronus laikyti idealiais, jų varžos arba nulinės arba begalinės.

Sprendimas

Galimi du atvejai:

1) kai elektrovara E yra mažesnė už U_{pr}. Tuomet vienas iš stabilitronų srovės nepraleis ir q=0 ir Q=0.

2) kai elektrovara E yra didesnė už U_{pr}. Prieš įjungiant jungiklį kondensatorius yra visiškai išsikrovęs, tad jo įtampa ir krūvis lygūs nuliui. Įjungus jungiklį visas įtampos kritimas kris ant stabilitrono. Kadangi $E > U_{\mathrm{pr}}$ stabilitronas praleis srovę ir kondensatoriuje kaupsis krūvis. Kai kondensatoriuje susikaups pakankamai didelis krūvis ir įtampa jame pasidarys $U_{\mathrm{C}} = E - U_{\mathrm{pr}}$, stabilitronas uždarys grandinę ir procesas sustos. Tuo metu kondensatoriaus plokštelės krūvis $q = CU_{\mathrm{C}} = C(E - U_{\mathrm{pr}})$.

Šaltinio elektrovaros darbas atliekamas kondensatoriui įkrauti ir rezistoriui šildyti:

$$Eq = \frac{q^2}{2C} + Q.$$

Tuomet varžoje išsiskirręs šilumos kiekis

$$Q = \frac{2CEq - q^2}{2C}.$$

Pasinaudojame q išraiška ir sutvarkę gauname $Q = \dfrac{C(E^2 - U_{\mathrm{pr}}^2)}{2}$.

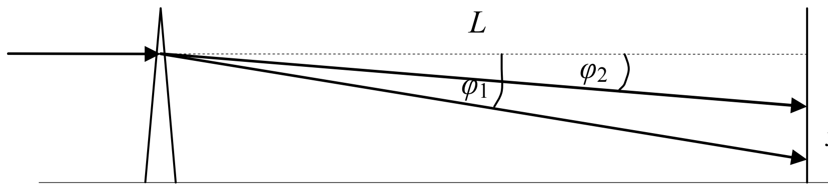
Atsakymas: $\boxed{q = C(E - U_{\mathrm{pr}})}$, $\boxed{Q = \dfrac{C(E^2 - U_{\mathrm{pr}}^2)}{2}}$

3 uždavinys (*10 t.*)

Lygiašonė prizmė, kurios viršūnės kampas $\gamma = 6^\circ$, stovi vertikaliai. Prizmės medžiagos lūžio rodiklis priklauso nuo šviesos bangos ilgio pagal dėsnį $n = n_0 - A\lambda$, čia $A = 1{,}00 \cdot 10^5\ \mathrm{m^{-1}}$. Į prizmę krenta siauras horizontalus šviesos spindulys, kuriame yra dviejų energijų šviesos kvantai: $\varepsilon_1 = 3{,}40\ \mathrm{eV}$ ir $\varepsilon_2 = 1{,}64\ \mathrm{eV}$. Raskite atstumą x tarp raudonos ir violetinės dėmelių, matomų vertikaliame ekrane, stovinčiame atstumu $L = 10\ \mathrm{m}$ nuo prizmės. Šviesos greitis vakuume $c = 3{,}00 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$, elektrono krūvis $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{K}$, Planko konstanta $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$.

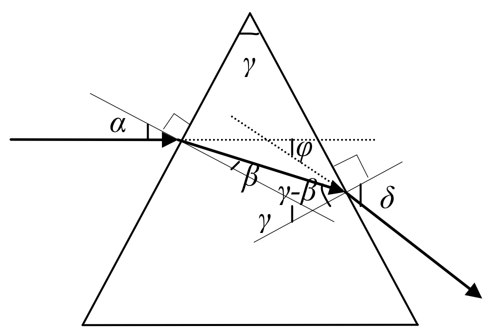
Sprendimas.

Šviesos spindulio nuokrypio kampą nuo pradinės krypties pažymėsime φ (1 pav.).



1 pav.

Tada ieškomas atstumas $x = L(\mathrm{tg}\varphi_1 - \mathrm{tg}\varphi_2)$. Reikia rasti φ išraišką. Iš brėžinio (2 pav.) pirmas kritimo kampas α, lūžimo kampas β, antras kritimo kampas γ-β, jo lūžimo kampas δ. Tada $\varphi = (\alpha - \beta) + (\delta - (\gamma - \beta)) = \alpha + \delta - \gamma$. Pagal lūžio dėsnį $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Kadangi pradinis spindulys yra horizontalus, $\alpha = \gamma/2$. Kampas γ yra mažas, tada sinusą galima pakeisti pačiu kampu ir $\beta = \dfrac{\gamma}{2n}$. Išeinančiam spinduliui $\dfrac{\sin(\gamma - \beta)}{\sin\delta} = \dfrac{1}{n}$. Pasinaudoję kampų mažumu gauname $\delta = n\gamma - \alpha$. Iš čia $\varphi = \gamma(n-1)$.



2 pav.

Turime $\varphi_1 = \gamma(n_1 - 1)$ ir $\varphi_2 = \gamma(n_2 - 1)$. Reikia sužinoti šviesos lūžio rodiklį kiekvienos energijos fotonams. Fotono energija $E = \dfrac{hc}{\lambda}$, $n = n_0 - A\dfrac{hc}{E}$. Dabar galima užrašyti x išraišką. Kadangi kampai φ yra maži: $x = L(\varphi_1 - \varphi_2) = L\gamma(n_1 - n_2) = L\gamma A(\lambda_2 - \lambda_1)$. Atsižvelgę į tai, kad fotonų energijos duotos eV $(E = e\varepsilon)$, o kampas laipsniais, gauname

$$\boxed{x = L\frac{\pi\gamma}{180^\circ}A\frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)}.$$

$$x = 10\frac{3{,}1416 \cdot 6}{180}10^5 \cdot 6{,}626 \cdot 10^{-34}\frac{3 \cdot 10^8}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\left(\frac{1}{1{,}64} - \frac{1}{3{,}40}\right) = 0{,}041014\ (\mathrm{m}). \quad \boxed{x = 41\ \mathrm{mm.}}$$

VARDAS PAVARDĖ

4 uždavinys (20 *t.*)

Uždavinio atsakymus reikia surašyti į langelius po kiekvienu klausimu (analizines formules kairėje, o skaitines vertes dešinėje). Rašant atsakymo formules galima laikyti, kad fizikiniai dydžiai, rasti atsakant į ankstesnius klausimus, yra duoti. ***Neužmirškite viršuje užrašyti savo vardo ir pavardės.***

Sferiniame tūrio $V = 4{,}00 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$ balione yra deguonies ir vandenilio molekulių mišinys, kurio temperatūra $T_0 = 273\ ^\circ\mathrm{C}$ ir slėgis $p_0 = 851\ \mathrm{kPa}$. Mišinyje yra vienodas kiekis deguonies ir vandenilio molekulių. Universalioji dujų konstanta $R = 8{,}31\ \mathrm{J/K \cdot mol}$; vandenilio savitoji degimo šiluma $q = 122\ \mathrm{MJ/kg}$; vandens sočiųjų garų slėgis, esant $0\ ^\circ\mathrm{C}$ temperatūrai, $p_{s.g.} = 613\ \mathrm{Pa}$; baliono medžiagos tempimo stiprumo riba $\sigma = 2 \cdot 10^8\ \mathrm{N/m^2}$. Dujas laikykite idealiomiS**.** Balionas yra vakuume.

1) Kam lygi deguonies, esančio balione, masė m_d?

$m_d =$ *1,5 t.*	$m_d =$ *0,4 t.*

2) Kam lygi vandenilio, esančio balione, masė m_v?

$m_v =$ *1,0 t.*	$m_v =$ *0,4 t.*

3) Kam lygi dujų vidinė energija U?

$U =$ *1,5 t.*	$U =$ *0,4 t.*

4) Kokios dujos (deguonis ar vandenilis) ir kokia jų masė m_x liko balione po to, kai mišinys susprogo?

Dujos - $m_x =$ *1,0 t.*	$m_x =$ *0,4 t.*

5) Kiek energijos W išsiskyrė sprogimo metu?

$W =$ *1,0 t.*	$W =$ *0,4 t.*

6) Kam lygi vandens garų masė m_g?

$m_g =$ *0,5 t.*	$m_g =$ *0,4 t.*

Tarkime, kad baliono sienelės iškart po sprogimo nespėjo sušilti, o baliono tūris nepasikeitė.

7) Kam lygus naujas dujų slėgis p?

$p =$ 3,0 t.	$p =$ 0,4 t.

8) Kam lygi nauja dujų temperatūra T?

$T =$ 1,5 t.	$T =$ 0,4 t.

9) Kokio mažiausio storio x turi būti baliono sienelės, kad atlaikytų naująjį slėgį p?

$x =$ 1,5 t.	$x =$ 0,4 t.

10) Dėl sprogimo baliono sienelėje susidarė mažas plyšys. Koks yra santykis η tarp išeinančių vandens garų ir kitų dujų molekulių skaičių pradiniu momentu? Molekulių matmenys tam santykiui įtakos neturi.

$\eta =$ 1,5 t.	$\eta =$ 0,4 t.

11) Kam lygus slėgis p_1 po to, kai dujos atvėso iki pradinės temperatūros? Dujų nuostolių dėl plyšio nepaisyti.

$p_1 =$ 1,6 t.	$p_1 =$ 0,4 t.

Sprendimas.

Molinės masės: vandenilio $M_v = 2\text{ g/mol}$, deguonies $M_d = 32\text{ g/mol}$, vandens garų $M_g = 18\text{ g/mol}$.

1) $p_0 = p_{0v} + p_{0d}$, $\quad p_0 V = \left(\frac{m_v}{M_v} + \frac{m_d}{M_d}\right) RT$, $\quad p_{0d} V = \frac{m_d}{M_d} RT$, $\quad \frac{m_v}{M_v} = \frac{m_d}{M_d}$,

$p_{0v} = p_{0d} = \frac{1}{2} p_0$,

$\boxed{m_d = \frac{p_0 V M_d}{2RT}}$, $\boxed{m_d = 24\text{ g}}$.

2) $\boxed{m_v = m_d \frac{M_v}{M_d}}$, $\boxed{m_v = 1{,}5\text{ g}}$.

3) Ir deguonies, ir vandenilio dujų molekulės yra dviatomės ir turi 5 laisvės laipsnius. Vadinasi

$\boxed{U = \frac{5}{2}\left(\frac{m_d}{M_d} + \frac{m_v}{M_v}\right) RT}$, $\boxed{U = 8{,}51\text{ kJ}}$.

4) $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. Sudegė visas vandenilis, liko pusė deguonies molekulių.

$\boxed{\text{Deguonis}}$, $\boxed{m_x = \frac{1}{2} m_d}$, $\boxed{m_x = 12 \text{ g}}$.

5) $\boxed{W = q m_v}$, $\boxed{W = 183 \text{ kJ}}$.

6) $\boxed{m_g = m_v + 0{,}5 m_d}$, $\boxed{m_g = 13{,}5 \text{ g}}$.

7) $pV = \left(\frac{m_g}{M_g} + \frac{m_x}{M_d} \right) RT$, $pV = \left(\frac{M_d m_g + M_g m_x}{M_g M_d} \right) RT$.

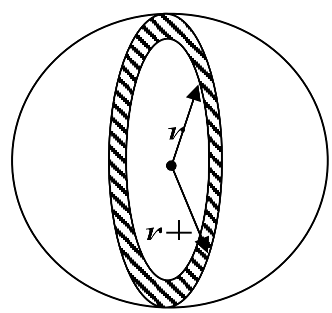
Vandens molekulės turi 6 laisvės laipsnius. Pilna vidinė energija iškart po sprogimo

$$U + W = \left(\frac{6}{2} \frac{m_g}{M_g} + \frac{5}{2} \frac{m_x}{M_d} \right) RT, \quad U + W = \left(\frac{6 M_d m_g + 5 M_g m_x}{2 M_g M_d} \right) RT.$$

$$\frac{pV}{U + W} = \frac{2(M_d m_g + M_g m_x)}{6 M_d m_g + 5 M_g m_x}, \quad \boxed{p = \frac{2(M_d m_g + M_g m_x)(U + W)}{(6 M_d m_g + 5 M_g m_x) V}}, \quad \boxed{p = 16{,}9 \text{ MPa}}.$$

8) $\boxed{T = \frac{pV}{R} \frac{M_g M_d}{M_d m_g + M_g m_x}}$, $\boxed{T = 7230 \text{ K}}$.

9) Vidinis baliono spindulys $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Plėšianti balioną jėga $F_p = \pi r^2 p$, baliono atsparumo jėga $F_\sigma = S\sigma = \pi\left((r + x)^2 - r^2\right)\sigma$. Ribiniu atveju $F_p = F_\sigma$,



$$(r + x)^2 - r^2 = r^2 \frac{p}{\sigma}, \quad x = r\left(\sqrt{1 + \frac{p}{\sigma}} - 1 \right),$$

$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \left(\sqrt{1 + \frac{p}{\sigma}} - 1 \right)}$, $\sigma = 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2 = 200 \text{ MPa}$, $\boxed{x \approx 4 \text{ mm}}$.

10) Iš baliono į vakuumą išeis vandens garų ir deguonio molekulės: $\eta = \frac{\Delta N_g}{\Delta N_d}$.

Abejų dujų išeinančių molekulių skaičius ΔN proporcingas jų koncentracijai n ir vidutiniam šiluminiam greičiui v: $\Delta N \sim nv$. $n = \frac{N_A m}{MV}$, N_A – Avogadro skaičius.

Vadinasi $\frac{n_g}{n_d} = \frac{m_g M_d}{m_d M_g}$.

Kadangi dujos turi tą pačią temperatūrą, jų molekulių vidutinės slenkamojo judėjimo kinetinės energijos $\frac{M v^2}{2N_A} = \frac{3}{2}kT$ yra lygios, čia k – Bolcmano konstanta. Vadinasi $\frac{M_g v_g^2}{2N_A} = \frac{M_d v_d^2}{2N_A}$ ir molekulių greičių santykis $\frac{v_g}{v_d} = \sqrt{\frac{M_d}{M_g}}$.

$\boxed{\eta = \frac{m_g M_d^{3/2}}{m_x M_g^{3/2}}}$, $\boxed{\eta \approx 2{,}67}$.

11) $p_1 = p_d + p_g$, , $p_g = \frac{m_g}{M_g}\frac{RT_0}{V} \approx 4{,}2 \cdot 10^5$ Pa $>> p_{s.g.}$.

Garai susikondensuos, vadinasi $p_g = p_{s.g.}$. Susikondensavęs vanduo užima dalį baliono tūrio ir sumažina deguonies užimamą baliono tūrį dydžiu $\Delta V = m_g / \rho_{vandens}$ (į tai, kad garai susikondensavo nepilnai, galima neatsižvelgti). Likusio deguonies sukeliamas slėgis

$$p_d = p_o \frac{m_x V}{2m_d\left(V - m_g \rho_{vandens}\right)}, \qquad \rho_{vandens} = 10^3 \text{ kg/m}^3 .$$

$\boxed{p_1 = \frac{m_x p_0 V}{2m_d\left(V - m_g \rho_{vandens}\right)} + p_{s.g.}}$, $\boxed{p_1 = 214 \text{ kPa}}$.

Atsakymų lapas

1) Kam lygi deguonies, esančio balione, masė m_d ?

$m_d = \frac{p_0 V M_d}{2RT}$ *1,5 t.*	$m_d = 24$ g *0,4 t.*

2) Kam lygi vandenilio, esančio balione, masė m_v ?

$m_v = m_d \frac{M_v}{M_d}$ *1,0 t.*	$m_v = 1{,}5$ g *0,4 t.*

3) Kam lygi dujų vidinė energija U?

$U = \frac{5}{2}\left(\frac{m_d}{M_d} + \frac{m_v}{M_v}\right)RT$ *1,5 t.*	$U = 8{,}51$ kJ *0,4 t.*

4) Kokios dujos (deguonis ar vandenilis) ir kokia jų masė m_x liko balione po to, kai mišinys susprogo?

Dujos – deguonis, $m_x = 0{,}5 m_d$ *1,0 t.*	$m_x = 12$ g *0,4 t.*

5) Kiek energijos W išsiskyrė sprogimo metu?

$W = q m_v$ *1,0 t.*	$W = 183$ kJ *0,4 t.*

6) Kam lygi vandens garų masė m_g?

$m_g = m_v + 0{,}5 m_d$ *0,5 t.*	$m_g = 13{,}5$ g *0,4 t.*

7) Kam lygus naujas dujų slėgis p?

$p = \frac{2(M_d m_g + M_g m_x)(U + W)}{(6 M_d m_g + 5 M_g m_x)V}$ 3,*0 t.*	$p = 16{,}9$ MPa *0,4 t.*

8) Kam lygi nauja dujų temperatūra T?

$T = \frac{pV}{R} \frac{M_g M_d}{M_d m_g + M_g m_x}$ *1,5 t.*	$T = 7230$ K *0,4 t.*

9) Kokio mažiausio storio x turi būti baliono sienelės, kad atlaikytų naująjį slėgį p?

$x=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}\left(\sqrt{1+\frac{p}{\sigma}}-1\right)}$ *1,5 t.*	$x \approx 4$ mm *0,4 t.*

10) Dėl sprogimo baliono sienelėje susidarė mažas plyšys. Koks yra santykis η tarp išeinančių vandens garų ir kitų dujų molekulių skaičių pradiniu momentu? Molekulių matmenys tam santykiui įtakos neturi.

$\eta=\frac{m_g M_d^{3/2}}{m_x M_g^{3/2}}$ *1,5 t.*	$\eta \approx 2{,}67$ *0,4 t.*

11) Kam lygus slėgis p_1 po to, kai dujos atvėso iki pradinės temperatūros? Dujų nuostolių dėl plyšio nepaisyti.

$p_1=\frac{m_x p_0 V}{2m_d\left(V-m_g\rho_{vandens}\right)}+p_{s.g.}$ *1,6 t.*	$p_1 = 214$ kPa *0,4 t.*