20-asis Lietuvos mokinių fizikos čempionatas
2008 m. gruodžio 6 d., Kaunas, Klaipėda, Panevėžys, Šiauliai, Vilnius

UŽDUOTYS IR JŲ AIŠKINAMIEJI SPRENDIMAI

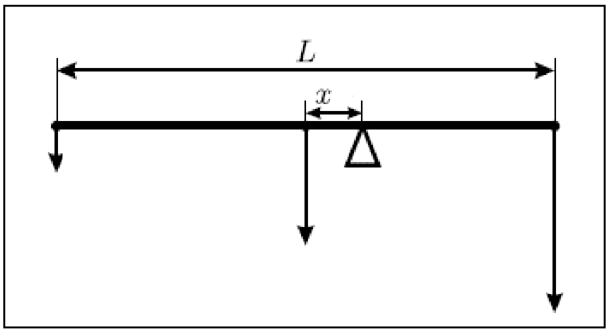
1. Kūnas pradeda laisvai kristi be pradinio greičio. Palyginkite vidutinius judėjimo greičius antrojoje ir pirmojoje kelio pusėje.
Sprendimas
Pagal apibrėžimą vidutinis greitis – tai kelias, padalintas iš laiko, sugaišto įveikiant šį kelią. Taigi, jei kūnas krinta iš aukščio h, tai

$v_{\text{vid1}} = \dfrac{h}{2t_1}$, $v_{\text{vid2}} = \dfrac{h}{2t_2}$, čia t_1 ir t_2 – laikas, per kurį kūnas nukrinta atitinkamai pirmąją ir antrąją aukščio dalis. Iš tolygiai greitėjančio judėjimo lygties $\dfrac{h}{2} = \dfrac{gt_1^2}{2} \rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{h}{g}}$. Visas kritimo laikas $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, todėl $t_2 = t - t_1 = \left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{\dfrac{h}{g}}$. Tuo būdu $\dfrac{v_{\text{vid2}}}{v_{\text{vid1}}} = \dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$

Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė Šiaulių universiteto dėstytojai.

2. Kūnas, kurio masė nežinoma, pakabintas ant L ilgio sunkaus sverto. Kitame sverto gale pakabintas M = 18 kg svarstis. Pusiausvyra šiuo atveju pasiekiama, kai atramos taškas yra pastumtas per atstumą $x = \frac{1}{4}L$ nuo sverto vidurio į svarsčio pusę. Kai kūnas yra nuimtas, sistema svertas – svarstis yra pusiausvira tada, kai sverto atramos taškas yra pastumtas atstumu $y = \frac{1}{3}L$ nuo sverto vidurio į svarsčio pusę. Tarus, kad svertas yra vienalytis, apskaičiuokite kūno masę m.

Sprendimas:



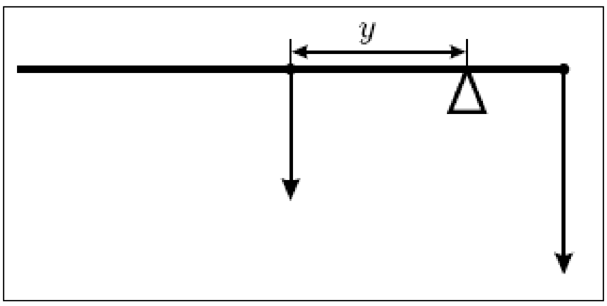
Kai kūnas pakabintas, sverto pusiausvyros sąlyga yra:

$$mg\left(\frac{L}{2} + x\right) + m_{\text{s}}gx = Mg\left(\frac{L}{2} - x\right).$$

Pažymėję $a = \dfrac{x}{L}$ gauname

$$m = \frac{M(1 - 2a) - 2m_{\text{s}}a}{1 + 2a}, \qquad (1)$$

čia m_{s} yra sverto masė.



Kai kūnas nuimtas, sverto pusiausvyros sąlyga yra:

$$m_{\text{s}}gy = Mg\left(\frac{L}{2} - y\right);$$

iš čia apskaičiuojama sverto masė

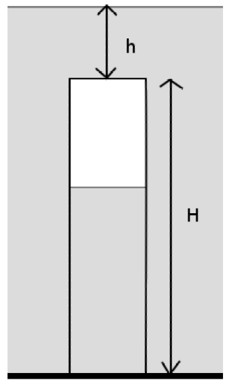
$$m_{\text{s}} = \frac{M(1 - 2b)}{2b}, \text{ kur } b = \frac{y}{L}.$$

Įstačius m_s į (1) lygtį gauname:

$$m = M\frac{b - a}{(1 + 2a)b} = \frac{M}{6} = 3 \text{ kg}.$$

Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė Vytauto Didžiojo universiteto dėstytojai.

3. Stiklinis vamzdelis, kurio vienas galas uždaras, aukštis H = 80 cm, skerspjūvio plotas S = 4 cm^2, o masė m =300 g, apverstas dugnu aukštyn ir panardintas į platų indą su T_1= 10ºC temperatūros vandeniu. Pusę vamzdelio tūrio užima oras, o vandens lygis virš vamzdelio viršaus h =10 cm. Vanduo inde lėtai šildomas. Kokiai jo temperatūrai T_2 esant vamzdelis pakils nuo dugno? Stiklo tankis ρ_s= 3000 kg/m^3, vandens tankis ρ = 1000 kg/m^3, atmosferos slėgis p_0= 100 kPa. Vandens spūdumo ir garavimo nepaisyti.



Sprendimas:
Vamzdelis pradės kilti, kai jį veikianti Archimedo jėga F_{sa} ir orą veikianti Archimedo jėga F_a atsvers vamzdelio sunkį, t.y. $F_{sa} + F_a - mg = 0$.
Pasižymėję oro stulpelio aukštį x galime rasti tas jėgas:

$$F_a = V\rho g = Sx\rho g\ , \qquad F_{sa} = V_s\rho g = mg\frac{\rho}{\rho_s}.$$

Šias išraiškas įrašę į pirmą lygtį randame x:

$$mg = mg\frac{\rho}{\rho_S} + Sx\rho g \quad , \qquad x = \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s}\right).$$

x gaunamas didesnis už pradinį oro stulpelio aukštį, nes orą šildant jis plėsis ir x didės. Vamzdelis pakils, kai temperatūra pasidarys T_2. Pagal dujų būsenos lygtį:

$$\frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_1V_1}{T_1} \quad , \quad T_2 = \frac{p_2V_2T_1}{p_1V_1},$$

čia p_2 ir V_2 – oro slėgis ir tūris pakilimo momentu, o p_1 ir V_1 – pradiniu momentu, o temperatūra kelvino laipsnaiis. Žinodami pradinį oro stulpelio aukštį H/2 ir galutinį x, tuos dydžius lengva rasti:

$$V_1 = \frac{HS}{2}, \qquad V_2 = Sx = m\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s}\right),$$

$$p_1 = p_0 + \rho g\left(h + \frac{H}{2}\right), \qquad p_2 = p_0 + \rho g\left(h + x\right) = p_0 + \rho g\left(h + \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s}\right)\right).$$

Gautas išraiškas įrašome į T_2 išraišką:

$$T_2 = \frac{2mT_1\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s}\right)\left(p_0 + \rho g\left(h + \frac{m}{S}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_s}\right)\right)\right)}{HS\left(p_0 + \rho g\left(h + \frac{H}{2}\right)\right)}.$$

T_2 = 357 K = 84 ºC, $t_2 = T_2 - 273 = 84\ °\mathrm{C}$.

Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė Lukas Krasauskas (Vilniaus universitetas).

4. Indas, kuriame yra m = 200 g t_0 = 20 °C temperatūros vandens, šildomas degikliu. Degiklio naudingumo koeficientas η = 40%. Per laiką τ_0 = 1 min degiklyje sudega m_0 = 2 g etanolio. Kiek bus vandens inde po τ = 30 min? Indo šiluminės talpos nepaisykite. Vandens savitoji šiluma c = 4,2·10^3 J/(kg·°C), vandens savitoji garavimo šiluma L = 2,3·10^6 J/kg, etanolio savitoji degimo šiluma q = 2,9·10^7 J/kg.

Sprendimas (*pakoreguotas, lyginant su skelbtais iš karto po Čempionato***)**
Šilumos kiekis, kurį išskiria degiklis per laiką τ = 30 min,

$$Q_1 = qm^*\tau = q\frac{m_0}{\tau_0}\tau, \qquad (1)$$

čia $m^* = \frac{m_0}{\tau_0}$ - per 1 s sudegusio etanolio masė.

Vandeniui kaitinti sunaudotas šilumos kiekis Q_2:

$$Q_2 = \eta Q_1; \qquad \underline{Q_2 = 0{,}696 \cdot 10^6\ \text{J.}}$$

Šilumos kiekis, reikalingas vandeniui pašildyti nuo pradinės temperatūros iki virimo temperatūros, Q_3:

$$Q_3 = cm(t_v - t_0), \qquad \text{čia } t_v = 100\ °\text{C}.$$

$$\underline{Q_3 = 0{,}672 \cdot 10^5\ \text{J.}}$$

Kadangi $Q_2 > Q_3$, tai vanduo pradės garuoti. Tegul išgaruoja m_x vandens.
Pagal energijos tvermės dėsnį

$$Q_2 = Q_3 + Q_4,$$

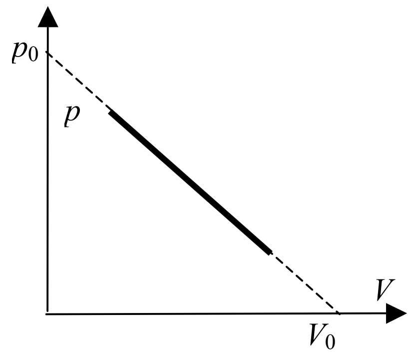
čia $Q_4 = Lm_x$ – šilumos kiekis, reikalingas išgarinti m_x masės vandenį.

$$\eta q\frac{m_0}{\tau_0}\tau = cm(t_v - t_0) + Lm_x. \text{ Iš čia } m_x = \frac{\eta q\frac{m_0}{\tau_0}\tau - cm(t_v - t_0)}{L} = 273\text{g}.$$

Matome, kad energijos kiekis pakankamas, kad būtų išgarinta 273 g vandens, o tai daugiau už buvusio inde vandens kiekį 200 g. Vadinasi, inde vandens nelieka.

Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė Šiaulių universiteto dėstytojai.

5. Vienas molis idealių vienatomių dujų plečiasi pagal dėsnį, kurį apibūdina pavaizduota grafike tiesi linija. Raskite didžiausią dujų temperatūrą. Esant kokiam tūriui dujos gauna šilumos, o kokiam – ją praranda?



Sprendimas

Pagal dujų būvio dėsnį $T = \frac{pV}{R}$. Čia R – universali dujų konstanta.

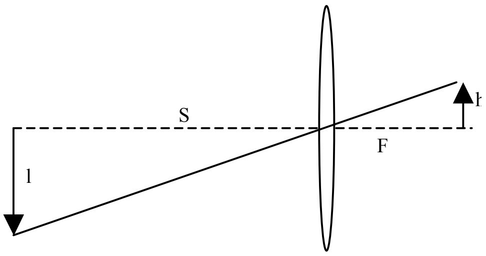
Iš duotos tiesinės priklausomybės $p = p_0\left(1 - \frac{V}{V_0}\right)$. Iš čia $T = \frac{p_0}{R}\left(V - \frac{V^2}{V_0}\right)$. Nesunku įsitikinti, kad temperatūra bus didžiausia, kai $V_1 = \frac{V_0}{2}$. Vadinasi, didžiausia temperatūra $T_{\max} = \frac{p_0 V_0}{4R}$.

Šilumos kiekis, kurį gauna dujos, $dQ = p \cdot dV + \frac{3}{2}R \cdot dT$. Iš dujų būvio lygties $dT = \frac{1}{R}(p \cdot dV + V \cdot dp)$, o iš tiesinės priklausomybės $dp = -\frac{p_0}{V_0}dV$. Tada gauname $dQ = 4p_0\left(\frac{5}{8} - \frac{V}{V_0}\right)dV$. Matome, kad $dQ > 0$, kai $V < \frac{5}{8}V_0$. Vadinasi, kol dujos išsiplečia iki $V_2 = \frac{5}{8}V_0$, jos šilumos gauna (nežiūrint į tai, kad tūriui viršijus $V_1 = \frac{V_0}{2}$ dujų temperatūra pradeda mažėti), o tūriui viršijus nurodytą tūrį V_2 dujos šilumą atiduoda.

Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė prof. habil. dr. Pavlas Bogdanovičius (Vilniaus pedagoginis universitetas).

6. Kino kamera, kurios filmavimo greitis 24 kadrai per sekundę, filmuojama matematinė švytuoklė. Koks atstumas nuo švytuoklės iki kameros objektyvo, jei vienas švytuoklės svyravimas trunka 48 kadrus, švytuoklės atvaizdo ilgis kadre 10mm, kameros objektyvo lęšio židinio nuotolis 7cm, kadrų plokštuma kameroje sutampa su objektyvo lęšio židinio plokštuma?

Sprendimas



Švytuoklės vieno svyravimo trukmė $T = 48/24 = 2s$. Matematinės švytuoklės periodas $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Tada filmuojamos kamera švytuoklės ilgis $l = (T/2\pi)^2\, g = 1m$. Kadangi atvaizdas daug mažesnis už švytuoklės ilgį, tai švytuoklė yra toli nuo kameros, todėl galima laikyti, kad atvaizdo plokštuma sutampa su objektyvo lęšio židinio plokštuma. Jei pažymėsim atstumą nuo kameros objektyvo lęšio iki švytuoklės *d*, lęšio židinio nuotolį *F* ir švytuoklės atvaizdo ilgį *h*, tai esant atvaizdui židinio plokštumoje turėsim: $l/s = h/F$. Iš šios lygties randame atstumą nuo kameros iki švytuoklės $s = Fl/h = 7m$.

Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė Vytauto Didžiojo universiteto dėstytojai.

7. Sportininkas visur keliauja su masės *m* = 16 kg svarsčiu. Skrisdamas iš Ekvadoro į varžybas į Balio salą palei pusiaują jis pasvėrė svarstį elektroninėmis svarstyklėmis, kurios veikia kaip ir spyruoklinės. Grįždamas atgal tokiu pat lėktuvu jis vėl pasvėrė svarstį ir pamatė, kad svarsčio svoris sumažėjo dydžiu *f* = 1,19 N. „Matyt, nusidėvėjo per treniruotes" – pagalvojo sportininkas. O Tu, jaunasis fizike, apskaičiuok lėktuvo greitį *v*. Ar gali lėktuvas skristi tokiu greičiu?

Sprendimas

Skrisdamas greičiu *v* Žemės atžvilgiu lėktuvas dalyvauja ir Žemės sukimesi, kurios paviršiaus linijinį greitį pažymėsime *u*. Skrisdamas į Balio salą, lėktuvas juda prieš Žemės sukimąsi, jo greitis išorinio stebėtojo inercinėje koordinačių sistemoje $v_- = u - v$, o skrendant atgal $v_+ = u + v$. Greitis $u = \dfrac{2\pi R}{T}$, čia *R* – Žemės spindulys, o *T* – Žemės sukimosi aplink jos ašį periodas. Būtent dėl greičių v_- ir v_+ dydžių skirtumo ir atsiranda pastebėtas svorių skirtumas, nes dalis Žemės traukos jėgos sunaudojama suteikti lėktuvui įcentrinį pagreitį, t.y. $f = \left(P_0 - \dfrac{mv_-^2}{R}\right) - \left(P_0 - \dfrac{mv_+^2}{R}\right)$, čia P_0 žymi svarsčio svorį nesisukančioje Žemėje. $f = \dfrac{mv_+^2}{R} - \dfrac{mv_-^2}{R}$, $f = \dfrac{m(u+v)^2}{R} - \dfrac{m(u-v)^2}{R}$,

$f = 4\dfrac{muv}{R}$, $f = 8\pi\dfrac{mv}{T}$.

Iš čia gauname galutinę išraišką:

$$v = \frac{Tf}{8\pi m}.$$

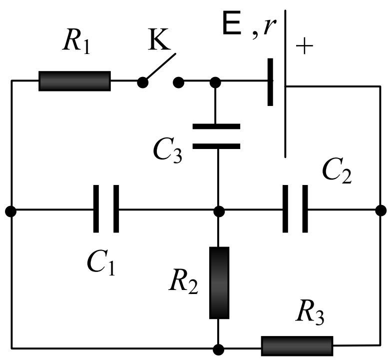
Žemės sukimosi periodas yra gerai žinomas: $T = 24\ \text{h} = 84600\ \text{s}$.

$$v = \frac{84600 \cdot 1{,}19}{8 \cdot 3{,}14 \cdot 16} \approx 250\ (\text{m/s}) \approx 900\ \text{km/h}.$$

Lėktuvas tokiu greičiu skristi gali. Tai normalus didelio keleivinio lėktuvo greitis.

Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė prof. habil. dr. Pavlas Bogdanovičius (Vilniaus pedagoginis universitetas).

8. Apskaičiuoti kondensatorių C_1, C_2 ir C_3 įtampas dviem atvejais: a) jungiklis K atjungtas; b) jungiklis K sujungtas. Šaltinio elektrovara $\mathcal{E}$, vidaus varža *r*, rezistorių varžos R_1, R_2 ir R_3, o kondensatorių talpos C_1, C_2 ir C_3.



Sprendimas

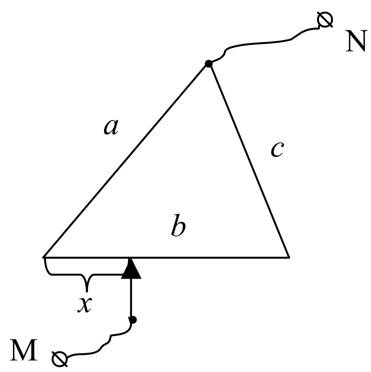
Jungiklis K atjungtas. Šiuo atveju srovė grandine neteka, todėl visų rezistorių įtampos (taip pat ir tenkanti vidaus varžai) lygios 0. Tada ir kondensatorių C_1 ir C_2 įtampos lygios 0. Visa elektrovaros įtampa tenka kondensatoriui C_3, t.y. $U_{C_3} = \mathcal{E}$.

Jungiklis K sujungtas. Dabar srovė teka rezistoriais R_1 ir R_3, o rezistoriumi R_2 srovė neteka. Pastarasis rezistorius jungia kondensatoriaus C_1 galus, todėl ir jo įtampa lygi 0. Kondensatorius C_3 turės tokią įtampą, kokia tenka rezistoriui R_1, o kondensatorius C_2 tokią, kokia tenka rezistoriui R_3.

Tuo būdu $U_{C_1} = 0$, $U_{C_2} = U_{R_3} = \dfrac{\mathcal{E} R_3}{R_1 + R_3 + r}$, $U_{C_3} = U_{R_1} = \dfrac{\mathcal{E} R_1}{R_1 + R_3 + r}$.

Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė prof. habil. dr. Edmundas Kuokštis (Vilniaus universitetas).

9. Iš vielos, kurios viso ilgio varža lygi *R*, išlankstėme trikampį, kurio kraštinių ilgiai lygūs *a*, *b* ir *c*. Vienas išorinės grandinės kontaktas prijungiamas prie trikampio viršūnės, esančios tarp kraštinių *a* ir *c*, o kitas gali slankioti išilgai kraštinės *b*. Apskaičiuokite ir grafiškai pavaizduokite varžos tarp gnybtų M ir N priklausomybę nuo slankiojo kontakto koordinatės *x*.



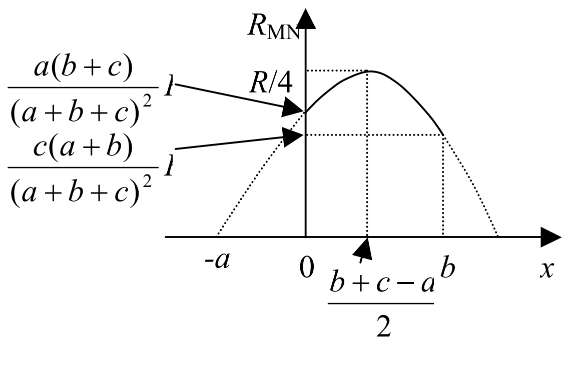
Sprendimas

Trikampio kraštinių varžos tiesiog proporcingos jų ilgiams, todėl kraštinių *a, b* ir *c* varžos atitinkamai lygios $\dfrac{R}{a+b+c}a$, $\dfrac{R}{a+b+c}b$ ir $\dfrac{R}{a+b+c}c$.

Pastebėję, kad turime reikalą su lygiagrečiuoju dviejų varžų jungimu, randame varžą tarp M ir N gnybtų:

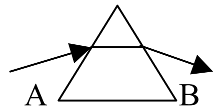
$$R_{\mathrm{MN}} = \frac{(a+x)(b+c-x)}{(a+x)+(b+c-x)}\frac{R}{a+b+c} = \frac{-x^2 + x(b+c-a) + a(b+c)}{(a+b+c)^2}R.$$

Akivaizdu, kad priklausomybės grafikas yra apversta parabolė. Belieka ištirti šią priklausomybę ir nubrėžti grafiką. *x*-ašį parabolė kerta taškuose, kuriuos nusako lygtis $R_{\mathrm{MN}} = 0$, t.y. $-x^2 + x(b+c-a) + a(b+c) = 0$. Šios kvadratinės lygties sprendiniai $x_1 = -a$, $x_2 = b + c$. Akivaizdu, kad parabolė, būdama simetriška viršūnės atžvilgiu, maksimumą pasiekia, kai $x_1 = \dfrac{a+b+c}{2} - a = \dfrac{b+c-a}{2}$. Taigi grafikas su charakteringais taškai atrodo taip:



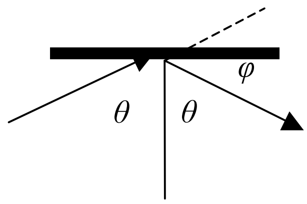
Pastebėsime, kad x intervale 0-b visada bus maksimumas. Tai išplaukia iš to, kad bet kurių dviejų trikampio kraštinių ilgių suma didesnė už trečiąją kraštinę.

Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė doc. dr. Egidijus Anisimovas (Vilniaus universitetas).



10. Šviesos spindulys krenta į lygiakraštę prizmę ir nukrypsta nuo pradinės krypties kampu $\varphi = 40^\circ$. Pakeitus prizmę veidrodžiu, lygiagrečiu prizmės pagrindui AB, spindulys nukrypsta tokiu pačiu kampu. Raskite prizmės medžiagos lūžio rodiklį.

Sprendimas

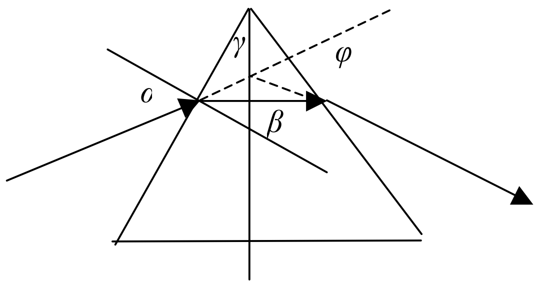


Iš lūžio dėsnio $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. Iš sąlygos, kad veidrodis, lygiagretus prizmės pagrindui, atlenkia spindulį tokiu pačiu kampu kaip ir prizmei, išplaukia, kad ir prizmės atveju spindulys sklinda simetriškai prizmės ašies atžvilgiu. Tokiu atveju spindulys prizmės viduje yra statmenas jos simetrijos ašiai ir galioja tokie kampų sąryšiai:

$\beta = \gamma / 2, \quad \alpha = 90 - (\gamma - \varphi / 2)$. Tada

$$n = \frac{\sin(\pi/2 - \gamma + \varphi/2)}{\sin(\gamma/2)}.$$

$$n = \frac{\sin(90^\circ - 60^\circ + 20^\circ)}{\sin 30^\circ} \approx 1{,}53.$$



Užduotį ir jos aiškinamąjį sprendimą parengė prof. habil. dr. Pavlas Bogdanovičius (Vilniaus pedagoginis universitetas).