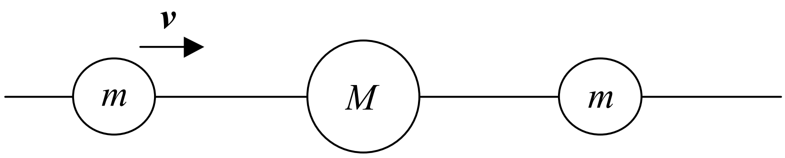
# Lietuvos mokinių 58-oji fizikos olimpiada, III-iasis ratas
# 2010 04 01-03, Vilnius

## XI klasės užduotys ir sprendimai

### Teorinės užduotys ir spendimai (50 taškų)

**1. Trys karoliukai, kurių masės lygios $m$, $M$ ir $m$, gali be trinties judėti išilgai tiesios vielos atkarpos. Pradiniu laiko momentu kairysis karoliukas juda link kitų greičiu *v*, o likusieji du nejuda. Apskaičiuokite, kokį greitį *u* įgis dešinysis karoliukas kairiajam karoliukui tampriai susidūrus su viduriniu, ir šiam savo ruožtu tampriai susidūrus su dešiniuoju.**




**Sprendimas**

Užrašome impulso ir energijos tvermės dėsnius tampriam judančio kūno (masė $m_1$, greitis $v$) susiūrimui su nejudančiu (masė $m_2$)

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2;$$
$$\tfrac{1}{2} m_1 v^2 = \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2.$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, randame, kad antrasis kūnas po smūgio įgyja greitį $u_2 = \dfrac{2}{1+k} v$, kur $k = m_2 / m_1$. Taigi, uždavinio sąlygomis dviejų smūgių metu perduotas greitis bus lygus

$$u = \frac{2}{1 + M/m} \cdot \frac{2}{1 + m/M} v . \text{ Taigi, } \boxed{u = \frac{4Mm}{(M+m)^2} v}$$

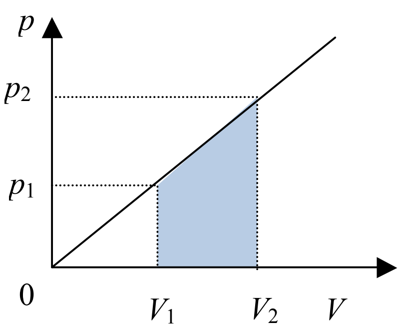
**2. Idealiųjų dujų, kurių masė *m*, temperatūra nuo slėgio *p* priklauso kaip $T = \alpha p^2$, čia $\alpha$ - konstanta. Kokį darbą *A* atlieka dujos, kai jų slėgis padidėja nuo $p_1$ iki $p_2$? Dujų molinė masė $\mu$.**

**Sprendimas**

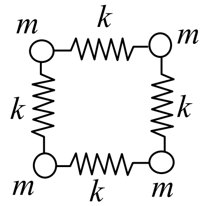
Idealioms dujoms $pV = \dfrac{m}{\mu} RT$. Tada $pV = \dfrac{m}{\mu} R\alpha p^2$ arba $p = \dfrac{\mu}{mR\alpha} V$. Grafinė priklausomybė *p-V* koordinatėse parodyta pav. Darbas šiose koordinatėse lygus patamsintos figūros plotui. Tai trapecija, t.y.

$A = \dfrac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1)$. Bet $V = \dfrac{m}{\mu} R\alpha p$, todėl

$V_1 = \dfrac{m}{\mu} R\alpha p_1$ $V_2 = \dfrac{m}{\mu} R\alpha p_2$. Tada $\boxed{A = \dfrac{m}{2\mu} \alpha R (p_2^2 - p_1^2)}$.

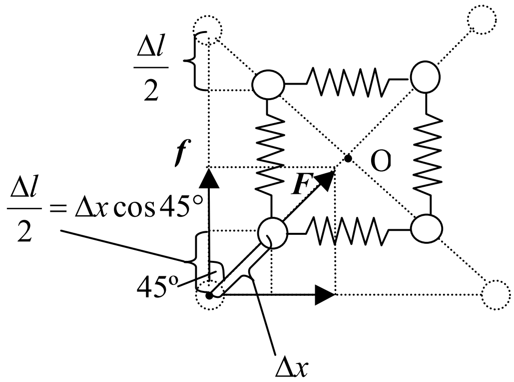


**3. Keturi vienodi masės $m$ rutuliukai sujungti keturiomis vienodomis standumo $k$ spyruoklėmis, sudaro kvadratą. Rutuliukai simetriškai ištempiami kvadrato įstrižainių kryptimi ir vienu metu paleidžiami. Koks sistemos svyravimų periodas $T$?**



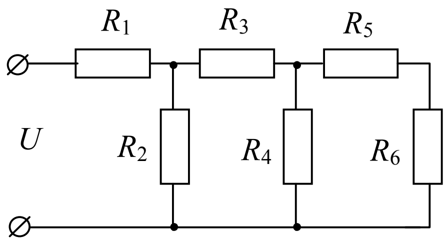

**Sprendimas**

Sistemai svyruojant, jos masių centro O padėtis nesikeičia, todėl galime nagrinėti vieno iš rutuliukų judėjimą, apskaičiuodami jėgą $F$, kuri jį grąžina į pusiausvyros padėtį, jam pasislinkus kvadrato įstrižainės kryptimi, pvz., dydžiu $\Delta x$. Tada kvadrato kraštinė (taigi, ir kiekviena spyruoklė) pailgėja dydžiu $\Delta l = 2\Delta x \cos 45°$, o tai reiškia, kad kiekvienas rutuliukas kvadrato kraštinės kryptimi veikiamas jėga $f = -k\Delta l$ (čia minusas reiškia, kad jėga grąžina rutuliuką į pusiausvyros padėtį). Tuomet kiekvieną rutuliuką centro O kryptimi veikia jėga $F = 2f\cos 45° = -4k\Delta x \cos^2 45° = -2k\Delta x$ .




Pažymėtina, kad spyruoklei, kurios standumas $k'$, galioja Huko dėsnis $F = -k'\Delta x$. Masės $m$ kūno, pritvirtinto prie šios spyruoklės, svyravimo periodas $T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}}$. Taigi, keturių rutuliukų atveju nagrinėjant vieno iš jų svyravimus $k' = 2k$, todėl $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$.

**4. Šeši vienodi rezistoriai prijungti prie šaltinio pagal pateiktą schemą. Kiek kartų elektros srovė pirmajame rezistoriuje stipresnė nei šeštajame?**




**Sprendimas**

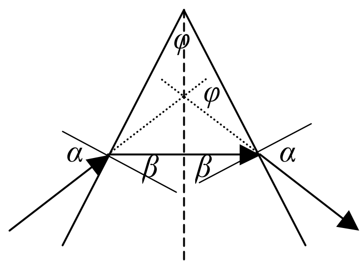
Rezistoriai vienodi, t.y. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = R$.
Pagal Omo dėsnį $U_{56} = I_6(R_5 + R_6) = 2I_6R$. Čia $U_{56}$ – 5-ojo ir 6-ojo rezistorių įtampa, $I_6$ – srovės, tekančios 6-uoju rezistoriumi, stipris. Toliau žymėdami atitinkamus srovių stiprius ir įtampas galime užrašyti:

$$I_4 = \frac{U_{56}}{R_4} = \frac{2I_6R}{R} = 2I_6\ ;\ I_3 = I_4 + I_6 = 3I_6;\ U_{34} = U_3 + U_{56} = I_3R + 2I_6R = 5I_6R;$$

$I_2 = \frac{U_{34}}{R_2} = \frac{5I_6R}{R} = 5I_6$; $I_1 = I_2 + I_3 = 5I_6 + 3I_6 = 8I_6$. Taigi, ieškomas srovių, tekančių pirmuoju ir šeštuoju rezistoriais, stiprių santykis $\boxed{\frac{I_1}{I_6} = 8}$.

**5. Stiklinį diską supjaustė į $N = 7$ vienodų sektorių. Juos išvertė smailais kampais į išorę taip, kad susidarė taisyklinga žvaigždutė. Pasirodė, kad galima taip paleisti šviesą žvaigždutėje, jog spindulys sudarytų uždarą simetrinį daugiakampį su centru žvaigždutės centre. 1) Raskite stiklo lūžio rodiklį. 2) Ar galima panašią žvaigždutę padaryti iš deimanto $(n_{\text{deim}} \approx 2{,}4)$? 3) Ar galima padaryti ją iš gintaro $(n_{\text{gint}} = 1{,}5 \pm 0{,}1)$?**

**Sprendimas.**




1) [5 balai] Sektoriai veikia kaip prizmės su viršūnės kampu $\varphi = \dfrac{2\pi}{N}$.

Tam, kad spindulys sudarytų uždarą liniją, kiekviena prizmė turi pasukti jį kampu $\varphi$, o kiekvienoje prizmėje spindulys turi sklisti simetriškai, t. y. statmenai jos simetrijos ašiai. Pasinaudojame lūžio dėsniu $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ (žiūr. brėž.). Iš brėžinio $\varphi = 2(\alpha - \beta)$ ($\varphi$ - išorinis trikampio kampas, t.y. prizmės viršūnės kampas), o $\beta = \varphi/2$ (kaip kampai su atitinkamai statmenomis kraštinėmis). Iš dviejų paskutiniųjų lygybių matome, kad $\alpha = \varphi$. Tuo būdu

$n = \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\varphi/2)}$, $n = \dfrac{2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$, čia pasinaudojome trigonometriniu sąryšiu $\sin\varphi = 2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2)$. Taigi, $n = 2\cos(\varphi/2)$. Pasinaudojame jau surasta $\varphi$ išraiška:

$$n = 2\cos\frac{\pi}{N}, \quad \boxed{n \approx 1{,}8.}$$

2) [2 balai] Kadangi $n_{\text{deim}} > 2$, tai žvaigždutės padaryti negalima, nes visada $\cos\varphi \le 1$.

$\boxed{\text{Iš deimanto padaryti negalima.}}$

3) [3 balai] Kai sektorių skaičius $N = 5$, lūžio rodiklis turi būti $n \approx 1{,}62$. Tokio gintaro nerasime. Kai sektorių skaičius $N = 4$, lūžio rodiklis turi būti $n \approx 1{,}41$. Matome, kad galima rasti gintarą su tokiu lūžio rodikliu. Tačiau tuomet $\varphi = \dfrac{2\pi}{4}$, o tai ne žvaigždutė, o kvadratas. Šviesos kritimo kampas į tokios prizmės paviršių būtų $\dfrac{\pi}{2}$, t. y. šviesa turės sklisti išilgai kvadrato kraštinės ir gauti reikalingą uždarą trajektorija nepavyks.

$\boxed{\text{Iš gintaro padaryti negalima.}}$

**Eksperimentinė užduotis (20 taškų)**

**Duota:** nežinomos masės strypas;

2m ilgio plonas siūlas;

A3 formato milimetrinio popieriaus lapas;

metalinis varžtas $\boldsymbol{M}_X$, poveržlė $\boldsymbol{M}_Y$, veržlė $\boldsymbol{M}_Z$

(objektai išvardinti masių mažėjimo kryptimi):

$\Delta\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_X - \boldsymbol{M}_Y = 21.7(5)$g;

$\Delta\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_X - \boldsymbol{M}_Z = 22.7(0)$g.

**Nustatyti:** strypo masę.

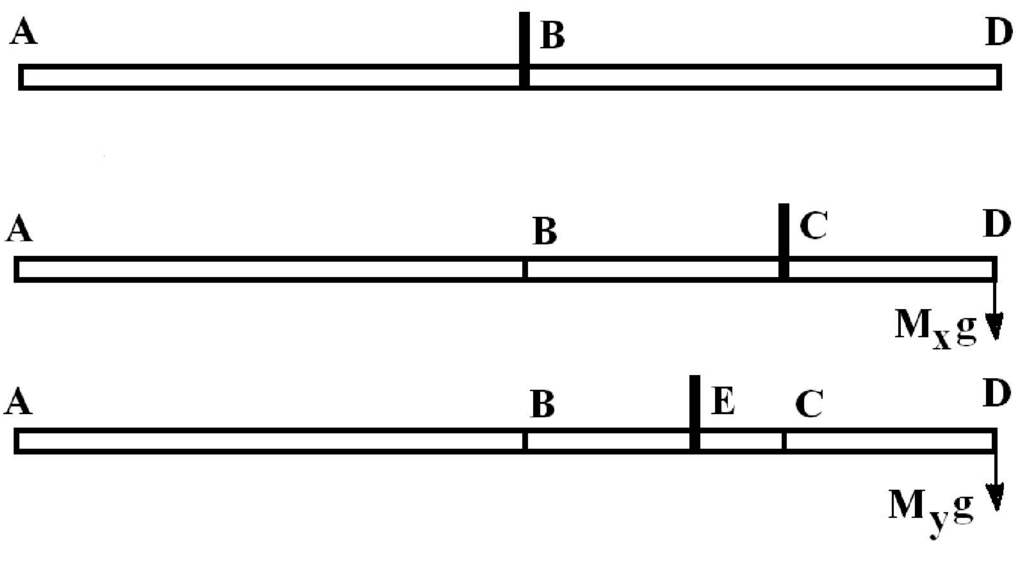
**Nuoroda:** šiame eksperimente strypą traktuoti kaip svertą.

**SPRENDIMAS**

**Duota:** $\Delta M_1 = M_X - M_Y = 21.7(5)$g;

**Nustatyti:** $M$

Duotas nežinomos masės strypas – tai apie 50 cm ilgio medinis tašelis, kurio skerspjūvis apie 8x8 mm$^2$. Šį tašelį reikia panaudoti kaip svertą – užrišus siūlą, parenkamas pakabos taškas, kad tašelis būtų pusiausvyroje. Atliekami trys bandymai, kurių schema pavaizduota 1 pav.




1 pav. Tašelis pusiausvyroje:

pakabintas taške B be papildomo svorio (viršuje),

pakabintas taške C su papildomu svoriu ($\boldsymbol{M}_X$)g (viduryje),

pakabintas taške E su papildomu svoriu ($\boldsymbol{M}_y$)g (apačioje).

**1-asis bandymas.** Tašelis pakabintas taške B pusiausvirojoje padėtyje, papildomo svorio nėra. Pakabinimo schema pateikta 1 pav. viršuje. Užfiksuojama taško B vieta.

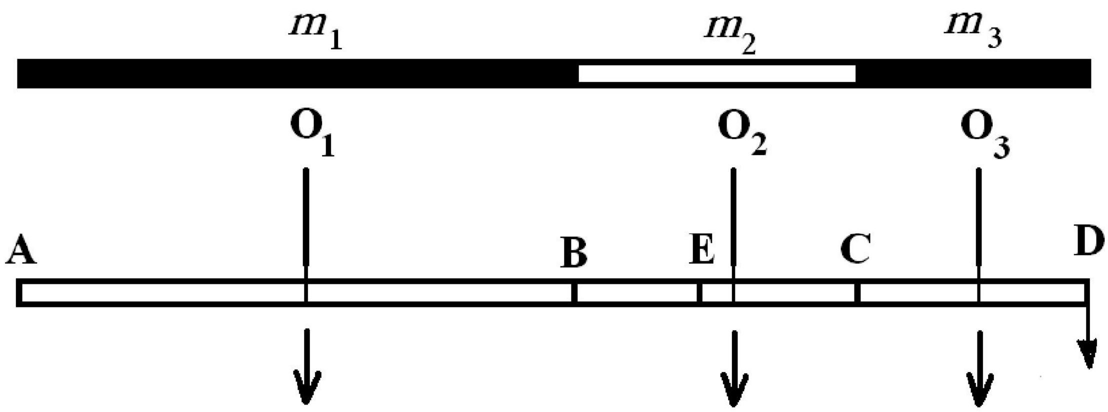
**2-asis bandymas.** Tašelis pakabintas taške C pusiausvirojoje padėtyje. Vienas papildomas svoris ($M_X$)g prikabintas ant siūlo taške D. Pakabinimo schema pateikta 1 pav. viduryje. Užfiksuojama taško C vieta.

**3-asis bandymas.** Tašelis pakabintas taške E pusiausvirojoje padėtyje. Vienas papildomas svoris ($M_Y$)g prikabintas ant siūlo taške D. Pakabinimo schema pateikta 1 pav. apačioje. Užfiksuojama taško E vieta.

Padalinkime strypą (kurio masė $M$) į tris sąlygines dalis: dalinimo taškai B ir C, o padalintų dalių masės $m_1$, $m_2$, $m_3$:

$$m_1 + m_2 + m_3 = M \tag{1}$$

2 pav. pateikta trijų sąlyginių dalių masių centrų schema (masių centrai pažymėti $O_1$, $O_2$ ir $O_3$ kaip geometriniai atitinkamų dalių vidurio taškai). Išmatuojami jėgų momentų pečiai (atstumai nuo pakabos taško iki sąlyginės tašelio dalies masės centro arba atstumai nuo pakabos taško iki papildomo svorio pakabos taško).




2 pav. Trijų sąlyginių dalių masių centrų schema (masių centrai pažymėti $O_1$, $O_2$ ir $O_3$).

Jėgos pažymėtos rodyklėmis.

Pusiausvyros sąlygos yra užrašomos kiekvienam bandymui, sulyginus kairės ir dešinės sverto pusės (atitinkamo pakabos taško atžvilgiu) jėgos momentų sumas:

$$m_1 g |O_1B| = m_2 g |O_2B| + m_3 g |O_3B| \tag{2}$$

$$m_1 g \left[ |O_1B| + |BC| \right] = m_2 g \left[ |O_2B| - |BC| \right] + m_3 g \left[ |O_3B| - |BC| \right] + M_X g \left[ |CD| \right] \tag{3}$$

$$m_1 g \left[ |O_1B| + |BE| \right] = m_2 g \left[ |O_2B| + |BE| \right] + m_3 g \left[ |O_3B| - |BE| \right] + M_Y g \left[ |ED| \right] \tag{4}$$

$$m_1 |O_1B| - m_2 |O_2B| - m_3 |O_3B| = 0 \tag{5}$$

$$m_1\left[|O_1B|+|BC|\right]-m_2\left[|O_2B|-|BC|\right]-m_3\left[|O_3B|-|BC|\right]=M_X\left[|CD|\right] \tag{6}$$

$$m_1\left[|O_1B|+|BE|\right]-m_2\left[|O_2B|+|BE|\right]-m_3\left[|O_3B|-|BE|\right]=M_Y\left[|ED|\right] \tag{7}$$

Iš (6) lygties atėmus (5), gaunama (8) lygtis, ir iš (7) lygties atėmus (5), gaunama (9) lygtis:

$$m_1|BC|+m_2|BC|+m_3|BC|=M_X|CD| \tag{8}$$

$$m_1|BE|+m_2|BE|+m_3|BE|=M_Y|ED| \tag{9}$$

Atlikus narių sugrupavimą ir atsižvelgus į (1) lygtį, gauname, kad

$$M|BC|=M_X|CD| \tag{10}$$

$$M|BE|=M_Y|ED| \tag{11}$$

Gauta dviejų lygčių sistema su trimis nežinomaisiais $M$, $M_X$, $M_Y$. Pagal pradinę sąlygą yra žinomas masių skirtumas $\Delta M_1$:

$$\Delta M_1=M_X-M_Y \tag{12}$$

$$M_X=M_Y+\Delta M_1 \tag{13}$$

(13) lygtis įstatoma į (10) lygtį:

$$M|BC|=\left(M_Y+\Delta M_1\right)|CD| \tag{14}$$

$$M|BE|=\left(M_Y\right)|ED| \tag{15}$$

Gauta dviejų lygčių sistema su dviem nežinomaisiais $M$, $M_Y$. Iš (15) lygties išreiškiamas $M_Y$ narys. (16) lygtis įstatoma į (14) lygtį:

$$M_Y=M\frac{|BE|}{|ED|} \tag{16}$$

$$M|BC|=\left(M\frac{|BE|}{|ED|}+\Delta M_1\right)|CD| \tag{17}$$

(17) lygtis – tai vieno nežinomojo $M$ lygtis.

$$M|BC|=M\frac{|BE|}{|ED|}|CD|+\Delta M_1|CD| \tag{18}$$

$$M\left\{|BC|-\frac{|BE|}{|ED|}|CD|\right\}=\Delta M_1|CD| \tag{19}$$

$$M\left\{\frac{|BC|*|ED|-|BE|*|CD|}{|ED|}\right\}=\Delta M_1|CD| \tag{20}$$

$$M=\Delta M_1\frac{|CD|*|ED|}{|BC|*|ED|-|BE|*|CD|} \tag{21}$$

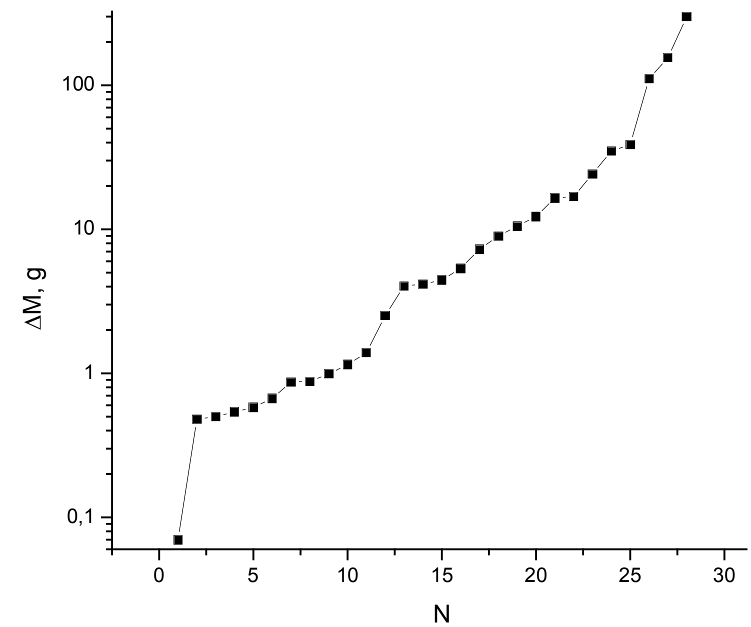
$$M=\frac{\Delta M_1}{\left(\dfrac{|BC|*|ED|-|CD|*|BE|}{|CD|*|ED|}\right)} \tag{22}$$

$$M=\frac{\Delta M_1}{\dfrac{|BC|}{|CD|}-\dfrac{|BE|}{|ED|}} \tag{23}$$

Tašelio masė $M$=[35..50] g.. 3 pav. pateiktas apibendrintas eksperimento rezultatas – paklaidos pasiskirstymas kaip tikrosios tašelio masės $M^R$ (nustatytos elektroninėmis svarstyklėmis individualiai kiekvienam tašeliui prieš eksperimentą) ir šiame eksperimente nustatytos tašelio masės $M$ skirtumo modulio pasiskirstymas:

$$\Delta M=\left|M^R-M\right| \tag{24}$$

Iš 28 dalyvių net 9 dalyviai (32 %) nustatė tašelio masę su <1 g paklaida (<2 %).




3 pav. Apibendrintas eksperimento rezultatas – tašelio masės paklaidos modulio $\Delta M$ pasiskirstymas ($N$ – dalyvių skaičius)

*Eksperimentinę užduotį parengė doc. dr. Alytis Gruodis.*