59-osios Lietuvos moksleivių fizikos olimpiados III rato 12 klasės teorinių užduočių sprendimai 2011m. balandžio 7- 9 d., Vilnius

Teorinė dalis

1. Vienas molis vienatomių idealiųjų dujų uždarytas šilumai nelaidžiame cilindre be trinties slankiojančiu stūmokliu, ant kurio pastatyti du vienodi svoriai. Pradinė dujų temperatūra T_1, o aplinkos slėgio galima nepaisyti. Kaip pasikeis dujų temperatūra, jei iš pradžių nuimsime vieną svorį, o po kažkiek laiko jį vėl pastatysime atgal?
(10 taškų)

Sprendimas
Pradinės dujų būsenos parametrai yra p_1, V_1, T_1; nuėmus vieną svorį, dujos adiabatiškai išsiplečia, o būsenos parametrai tampa p_3, V_3, T_3; uždėjus atgal dujos adiabatiškai suspaudžiamos, o būsenos parametrai p_2, V_2, T_2.
Dujų slėgiams kiekvienoje būsenoje galioja tokie sąryšiai:

$$p_1 = p_2 = 2mg/S, \quad p_3 = mg/S, \qquad (1)$$

kur mg – sunkio jėga, slegianti dujas cilindre, o m – vieno svorio masė, g – laisvo kritimo pagreitis; S – cilindro skerspjūvio plotas.
Iš (1) išplaukia, kad

$$p_1 = p_2 = 2p_3 \qquad (2)$$

Dujų būsenos lygtys, atitinkamai, yra lygios

$$p_1V_1 = RT_1,\ p_3V_3 = RT_3,\ p_2V_2 = RT_2. \qquad (3)$$

Kadangi indas izoliuotas, todėl procesas adiabatinis, todėl pagal pirmąjį termodinamikos dėsnį
$\Delta U + A = 0$.
Čia ΔU – dujų vidinės energijos pokytis $-\Delta U = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1)$, o A – dujoms plečiantis atliktas darbas. Dujos plečiasi veikiant pastoviam slėgiui p_3 , t.y. $A = p_3\left(V_3 - V_1\right)$. Tuo būdu gauname, kad

$$\frac{3}{2}R(T_1 - T_3) = p_3\left(V_3 - V_1\right) \qquad (4)$$

Išsireiškę T_3, gauname:

$$T_3 = \frac{\frac{3}{2}RT_1 + p_3V_1}{\frac{3}{2}R + R} \qquad (5)$$

Kadangi $p_3V_1 = \frac{1}{2}p_1V_1 = \frac{1}{2}RT_1$, tai

$$T_3 = \frac{\left(\frac{3}{2}R + \frac{1}{2}R\right)T_1}{\frac{3}{2}R + R} = \frac{4}{5}T_1 \qquad (6)$$

Pastatę svorį atgal, gauname lygtį panašią į (6) lygtį:

$$T_2 = \frac{\frac{3}{2}RT_3 + p_1V_3}{\frac{3}{2}R + R} = \frac{\left(\frac{3}{2}R + 2R\right)T_3}{\frac{3}{2}R + R} = \frac{7}{5}T_3$$

Tada temperatūros pokytis lygus

$$T_2 - T_1 = \frac{7}{5}T_3 - T_1 = \frac{7}{5}\frac{4}{5}T_1 - T_1 = \frac{3}{25}T_1 = 0{,}12 \cdot T_1$$

Ats.: $T_2 - T_1 = 0{,}12\ T_1$

2. Į t_1 = 20°C temperatūros vandenį, esantį mažos šiluminės talpos inde, įmetus du įkaitintus iki t_2 = 100°C temperatūros vienodus šratus, po kiek laiko nusistovėjo t_3 = 60°C temperatūra. Kokia temperatūra t nusistovės įmetus dar tris tokius pačius ir tiek pat įkaitintus šratus? Į šilumos nuostolius neatsižvelkite.
(10 taškų)

Sprendimas
Sudarome dvi šilumos balanso lygtis, atitinkamai įmetus į vandenį du ir po to tris šratus. Tam įveskime vandens ir vieno šrato šilumines talpas, atitinkamai C_v ir $C_š$:

$$C_v(t_3 - t_1) = 2C_š(t_2 - t_3),$$

$$(2C_š + C_v)(t - t_3) = 3C_š(t_2 - t).$$

Iš pirmos lygties randame

$$C_š = \frac{C_v(t_3 - t_1)}{2(t_2 - t_3)}.$$

Įrašę šią išraišką į antrąją lygtį ir išprastinę C_v randame t:

$$t = \frac{5t_2t_3 - 3t_1t_2 - 2t_1t_3}{3t_3 + 2t_2 - 5t_1} = 77°C.$$

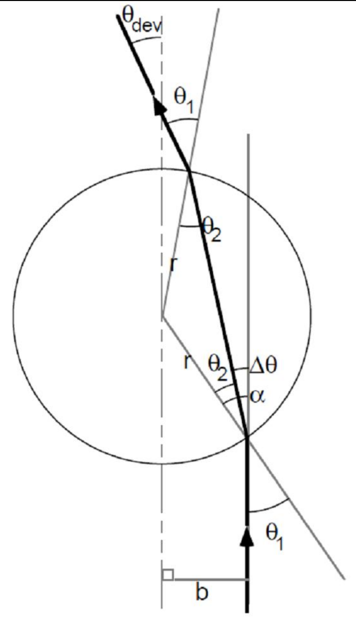
3. Lazerio šviesos spindulys, kurio bangos ilgis λ = 530 nm, krenta į stiklinį rutuliuką, kurio spindulys R = 25 mm ir lūžio rodiklis n = 1,4, taip, kad minimalus atstumas nuo rutuliuko centro iki tiesės, išvestos išilgai krentančio spindulio, lygus b = 6 mm. Apskaičiuokite: a) kampą θ, kurį praėjęs per rutuliuką spindulys sudaro su krentančiu į rutuliuką spinduliu; b) praėjusio per rutuliuką fotono impulso pokytį $\Delta p_\perp$ statmena krentančiam į rutuliuką spinduliui kryptimis; c) jėgą $F_\perp$, kuria šviesos spindulys veikia rutuliuką statmena krentančiam į rutuliuką spinduliui kryptimi, jei lazerio spinduliavimo galia P = 1W.
(10 taškų)

Sprendimas

a) Krentantis į rutulį spindulys, eidamas per aplinkų ribą oras-stiklas, lūžta, kaip pavaizduota brėžinyje. Jei kritimo kampas θ_1, o lūžio kampas θ_2, tai kampas tarp kritusio ir lūžusio spindulių $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$. Kadangi spindulys išeidamas iš rutulio dar kartą lūžta, o kritimo kampas į aplinkų ribą stiklas-oras lygus lūžio kampui aplinkų riboje oras-stiklas, tai spindulys dar kartą nukrypsta kampu $\Delta\theta$ nuo pradinės spindulio krypties. Tada kampas tarp kritusio ir išėjusio iš rutulio spindulių $\theta_{dev} = 2\Delta\theta = 2(\theta_1 - \theta_2)$. Kadangi $\sin\theta_1 = \sin\alpha = \frac{b}{r}$, o iš lūžio dėsnio $\sin\theta_2 = \frac{1}{n}\sin\theta_1 = \frac{b}{nr}$, tai $\theta_{dev} = 2\left(\arcsin\left(\frac{b}{r}\right) - \arcsin\left(\frac{b}{nr}\right)\right)$. Dydžių skaitinėms vertėms $r = 25mm$, $b = 6\mu m$, $n = 1{,}4$ turime $\theta_{dev} = 2\left(13{,}88^o - 9{,}87^o\right) = 8{,}03^o$.

b) Krentančio į rutulį fotono impulso statmena kritimo krypčiai komponentė lygi nuliui. Kadangi praėjęs per rutulį fotonas nukrypsta kampu θ_{dev} nuo pradinės judėjimo krypties, tai jo impulsas įgyja statmeną kritimo krypčiai komponentę $p_\perp = p_f \sin\theta_{dev}$, čia fotono impulso modulis $p_f = \frac{h}{\lambda}$. Tada impulso pokytis statmena kritimo į rutuliuką kryptimi $\Delta p_\perp = p_f \sin\theta_{dev}$. Bangos ilgiui $\lambda = 5{,}30 \cdot 10^{-7} m$ ir kampui $\theta_{dev} = 8{,}03^o$ turime $\Delta p_\perp = 1{,}75 \cdot 10^{-28} kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

c) Esant lazerio spinduliavimo galiai P, į rutuliuką per sekundę krentančių fotonų skaičius $N = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc}$. Kai spinduliavimo galia $P = 1W$, o fotono bangos ilgis $\lambda = 5{,}30 \cdot 10^{-7} m$, fotonų skaičius $N = 2{,}67 \cdot 10^{18} s^{-1}$. Jų visų suminis impulso pokytis statmena kritimui kryptimi bus lygus jėgai, veikiančiai rutuliuką šia kryptimi: $F_\perp = N \cdot \Delta p_\perp = 2{,}67 \cdot 10^{18} s^{-1} \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-28} kg \cdot m \cdot s^{-1} = 4{,}67 \cdot 10^{-10} N$.

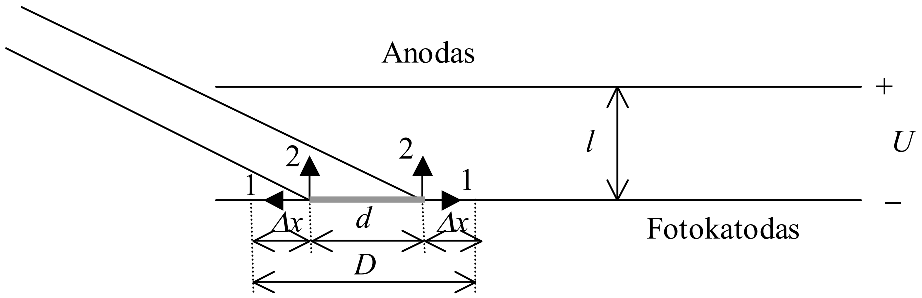


4. Fotoelementą sudaro lygiagrečių plokščių fotokatodas ir anodas, tarp kurių atstumas l = 20 mm. Šis atstumas žymiai mažesnis už fotokatodo ir anodo matmenis. Lazerio spindulys fokusuojamas fotokatode į skersmens $d = 1{,}0$ mm dėmę ir sukelia fotoefektą. Fotokatodo medžiagos elektronų išlaisvinimo darbas $A = 3{,}5 \cdot 10^{-19}$ J, o lazerio spinduliuotės bangos ilgis $\lambda = 425$ nm. Tarp fotokatodo ir anodo prijungiamas išmuštus elektronus greitinantis potencialų skirtumas $U = 2{,}0$ kV, verčiantis juos judėti anodo kryptimi pastoviu pagreičiu. Elektronai iš fotokatodo išlekia skirtingomis kryptimis. Koks yra dėmės, į kurią patenka pasiekiantieji anodą elektronai, skersmuo D? Įvertinkite, per kokį laiką išmušti iš fotokatodo elektronai pasiekia anodą? Planko konstanta $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s, šviesos greitis $c = 3{,}0 \cdot 10^{8}$ m/s, elektrono masė $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg, elektrono krūvis $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

(10 taškų)

Sprendimas

Braižome brėžinį.



Greičių kryptys įvairios, todėl elektronų, pasiekiančių anodą, dėmės dydį nulems elektronai, kurie ties fotokatodo dėmės kraštu sklinda nuo dėmės centro (paveiksle kryptys 1). Taigi,

$D = d + 2\Delta x$.

Čia Δx - tai atstumas, kurį elektronai įveikia kryptimi 1 per laiką t, kurį sugaišta, lėkdami nuo fotokatodo iki anodo.

$\Delta x = vt$, čia v – išmuštų elektronų greitis

Išmuštų elektronų greitį galima apskaičiuoti pritaikius fotoefekto formulę:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} + A.$$

Pasinaudojame tuo, kad $h\nu = \frac{hc}{\lambda}$. Taigi, $v = \sqrt{\frac{2\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}{m}}$.

Tolygiai greitėjančiam judėjimui be pradinio greičio $l = \frac{at^2}{2}$.

Čia a judėjimo link anodo pagreitis $a = \frac{F}{m}$, $F = eE$ – jėga, kuria elektrinis laukas greitina elektronus, $E = \frac{U}{l}$ – elektrinio lauko stipris, kurį gauname, taikydami plokščiojo kondensatoriaus modelį. Taigi, iš šių lygčių surandame

$$t = l\sqrt{\frac{2m}{eU}}.$$

Tada $\boxed{D = d + 4l\sqrt{\frac{\frac{hc}{\lambda} - A}{eU}}}$.

$\boxed{D = 2{,}5 \text{ mm.}}$

Bendru atveju laikas, per kurį elektronai pasiekia anodą, turėtų būti iš intervalo nuo $t_{\min}$ iki t_{maks}. Maksimalų laiką jau esame gavę – tai laikas t, per kurį anodą pasiekia horizontaliai išlekiantys elektronai (paveiksle, pvz., kryptys 1).

Taigi, $t_{\text{maks}} = l\sqrt{\dfrac{2m}{eU}}$.

Minimalų laiką sugaišta elektronai, kurie išlekia statmenai fotokatodui (kryptys 2). Tačiau įvertinę duotus parametrus pastebime, kad $v^2 = 2{,}6\cdot10^{11}$ (m/s)^2 $<< \dfrac{2eU}{m} = 7{,}0\cdot10^{14}$ (m/s)^2.

Todėl pradinis greitis turi mažai įtakos elektronų judėjimo tarp elektrodų laikui.

$$\boxed{t_{\min} \approx t_{\text{maks}} = l\sqrt{\frac{2m}{eU}} = 1{,}5\ \text{ns}}.$$

5. Gamtinis uranas yra sudarytas iš $n_1 = 0{,}7\%$ izotopo ^{235}U ir $n_2 = 99{,}3\%$ izotopo ^{238}U. Įvertinkite, prieš kiek metų t įvyko supernovos, po kurio susiformavo Saulės sistema, sprogimas, jeigu ^{235}U pusėjimo laikas $T_1 = 7\cdot10^8$ metų, o ^{238}U pusėjimo laikas $T_2 = 4{,}5\cdot10^9$ metų . Laikykite, kad supernovos sprogimo metu atsiradusių abiejų rūšių izotopų skaičius buvo vienodas.
(10 taškų)

Sprendimas

Tegul pradžioje abiejų iazotopų skaičius buvo N_0. Per laiką $t = n\ T_1$ nuo sprogimo izotopo ^{235}U liko $N_1 = \dfrac{N_0}{2^n}$.

Analogiškai, per tą patį laiką $t = k\ T_2$ izotopo ^{238}U liko $N_1 = \dfrac{N_0}{2^k}$. Pagal užduoties sąlygą:

$$n_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}; \quad n_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}. \qquad (1)$$

Iš čia gauname

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{2^n}{2^k} = 2^{n-k}. \qquad (2)$$

$$n - k = \log_2\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \qquad (3)$$

Kadangi $t = n\ T_1 = k\ T_2$, gauname $n = \dfrac{kT_2}{T_1}$. Įsistatę gautąją išraišką į (3) lygtį, surandame k:

$$k = \frac{T_1}{T_1 - T_2}\log_2\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \qquad (4)$$

Suradę k, apskaičiuojame prieš kiek metų įvyko supernovos sprogimas:

$$t = kT_2 = \frac{T_1T_2}{T_1 - T_2}\log_2\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \approx 6\cdot10^9 \text{ metų}.$$

Atsakymas.: $t = 6\cdot10^9$ metų.

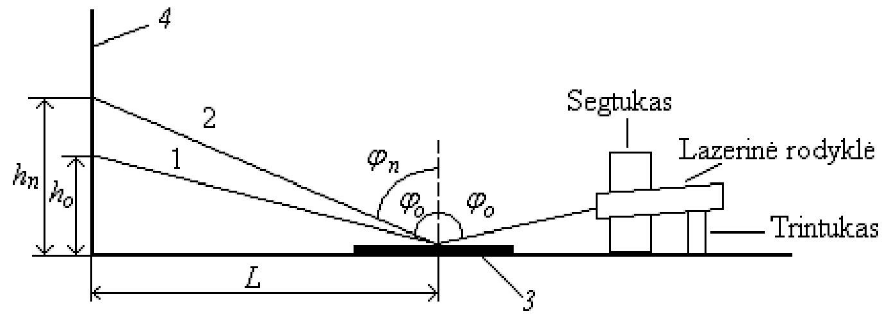
Eksperimento dalis

Darbo užduotis.
Nustatyti, lazerinės rodyklės šviesos bangos ilgį ir įvertinti matavimo paklaidas.
Darbo priemonės.
Metalinė liniuotė arba slankmatis, languoto popieriaus lapas, dvi adatėlės, pleišto pavidalo trintukas, skalbinių segtukas, lazerinė rodyklė, kita liniuotė, rašymo priemonė.

Įspėjimas: Dirbdami stebėkite, kad Jūsų įjungtos lazerinės rodyklės spindulys, ar jos spindulio atspindys nuo atspindinčių paviršių nepataikytų Jums arba Jūsų kaimynams į akis.

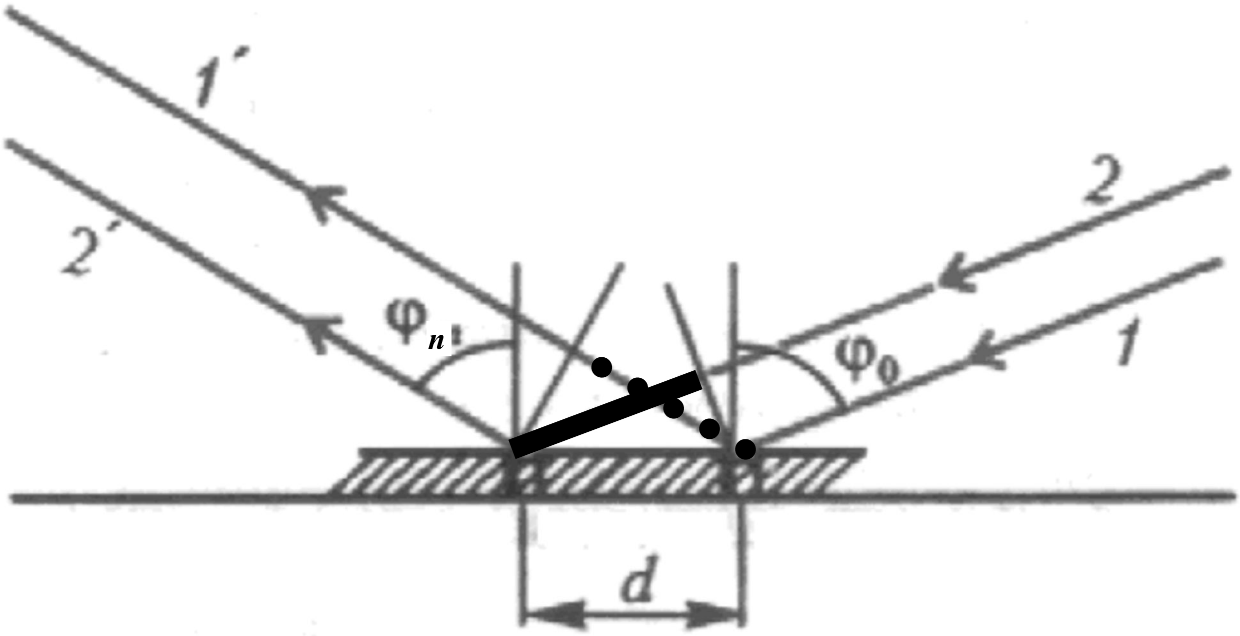
Naudodamiesi nurodytomis priemonėmis dalyviai privalo atlikti matavimus ir apskaičiuoti duotos lazerinės rodyklės šviesos bangos ilgį ir įvertinti matavimo paklaidas.
(20 taškų)

Sprendimas
1. Metalinės liniuotės milimetrų padalos yra tvarkingai sudarytų optinių žymių rinkiniai. Jos suformuoja optinę difrakcinę gardelę. Todėl sąveikaujantis su jomis vienspalvis koherentinis lazerinės rodyklės spindulys difraguoja į difrakcinį vaizdą, sudarytą iš atskirų maksimumų.



1 pav. Principinė schema, 1 ir 2 – atsispindėjusios lazerio šviesos bangos nueiti keliai į skirtingus difrakcinius maksimumus, 3 – metalinė liniuotė ir 4 – languoto popieriaus lapas.

2. Ant stalo pasidedame metalinę liniuotę arba slankmatį. Lazerinę rodyklę įstatome į skalbinių segtuką, taip kad lazerinė rodyklė įsijungtų ir ją pastatome už liniuotės. Priešingoje liniuotės pusėje įtvirtiname languoto popieriaus lapą.
3. Pleišto pavidalo trintuką pakišame po įjungtos lazerinės rodyklės galu ir ją nukreipiame taip, kad lazerio rodyklės spindulys pataikytų į liniuotę toje vietoje, kurioje yra subraižytos milimetrinės skalės padalos. Lazerio rodyklės spindulys į liniuotę turi būti nukreiptas taip, kad kampas φ_o (1 pav.) būtų kuo artimesnis 90^o.
4. Nuo liniuotės atsispindėjęs spindulys languoto popieriaus lape sudarys difrakcinį vaizdas.
5. Languoto popieriaus lape pasižymime matomų šviesių taškų centrus, t.y. nulinės eilės maksimumą ir n-tosios eilės maksimumą. Šių difrakcinių maksimumų atspindėtos šviesos kampus pasižymime atitinkamai φ_o ir φ_n (1 pav).
6. Kita liniuote išmatuojame atstumą L tarp languoto popieriaus lapo ir lazerio spindulio metalinėje liniuotėje arba slankmatyje atspindžio vietos vidurio, aukštį tarp nulinės eilės difrakcinio maksimumo ir metalinės liniuotės (stalo) (h_0), bei n-tosios eilės difrakcinio maksimumo ir metalinės liniuotės (stalo) (h_n) (1 pav.).
7. Atstumas tarp gretimų liniuotės padalų yra d=1 mm. Kadangi liniuotė yra tarsi difrakcinė gardelė, vadinasi difrakcinės gardelės konstanta bus lygi d.



2 pav. Optinių kelių skirtumo skaičiavimo brėžinys

Vadinasi šviesos nueitų optinių kelių į n-tąjį maksimumą nuo gretimų padalų (1-1‘ ir 2-2‘) skirtumą bus galima rasti taip (2 pav. skirtumas tarp storos ir taškinės linijų ilgių):

$$\Delta = d \sin \varphi_0 - d \sin \varphi_n \, . \qquad (1)$$

Kadangi kampas φ_n yra į n-tosios eilės difrakcinį maksimumą, tai:

$$\Delta = n\lambda \, . \qquad (2)$$

(2) lygtį įstatę į (1) lygtį gauname:

$$n\lambda = d \sin \varphi_0 - d \sin \varphi_n \, . \qquad (3)$$

Veidrodinį atspindį turime, kai kampas $\varphi_n = \varphi_0$, vadinasi:

$$\sin \varphi_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h_0^2}} \, . \qquad (4)$$

Analogiškai n-tojo difrakcinio maksimumo kampo φ_n sinusas bus:

$$\sin \varphi_n = \frac{L}{\sqrt{L^2 + h_n^2}} \, . \qquad (5)$$

Taigi lazerinės rodyklės šviesos bangos ilgis bus lygus:

$$\lambda = \frac{d}{n}\left(\frac{L}{\sqrt{L^2 + h_0^2}} - \frac{L}{\sqrt{L^2 + h_n^2}} \right). \qquad (6)$$