59-osios Lietuvos moksleivių fizikos olimpiados
III rato 9 klasės teorinių užduočių sprendimai
2011m. balandžio 7- 9 d., Vilnius

Teorinė dalis

1. ℓ ilgio traukinys tolygiai greitėdamas pagreičiu a privažiuoja tunelį. Tunelio pradžioje ir pabaigoje stovi stebėtojai. Pro pirmąjį stebėtoją traukinys pravažiuoja per laiką t_1, pro antrąjį per laiką t_2. Per kiek laiko visas traukinys pravažiavo tunelį? (Visą laiką traukinys greitėja tuo pačiu pagreičiu.)
(10 taškų)

Sprendimas
Traukinys pro pirmąjį stebėtoją pravažiuoja vidutiniu greičiu

$$v_{vid1} = \frac{\ell}{t_1}, \qquad (1) \qquad \text{(0,5 balo)}$$

be to $$v_{vid1} = \frac{v_0 + v_1}{2}, \qquad (2) \qquad \text{(0,5 balo)}$$

čia v_0 – greitis, kuriuo traukinio priekis privažiuoja tunelio pradžią, v_1 – traukinio greitis, kai jis visas įvažiuoja į tunelį.

Žinome, kad $$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1}, \qquad \text{(0,5 balo)}$$

tada $$v_1 = v_0 + at_1. \qquad (3) \qquad \text{(0,5 balo)}$$

Iš (1), (2) ir (3) lygčių

$$\ell = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2}. \qquad (4) \qquad \text{(1 balas)}$$

Antrąjį stebėtoją traukinys pravažiuoja vidutiniu greičiu

$$v_{vid2} = \frac{\ell}{t_2}, \qquad (5) \qquad \text{(0,5 balo)}$$

bei $$v_{vid2} = \frac{v_2 + v_3}{2}, \qquad (6) \qquad \text{(0,5 balo)}$$

čia v_2 – traukinio greitis, kai traukinys privažiuoja tunelio pabaigą, v_3 – greitis, kai visas traukinys išvažiuoja iš tunelio.
Aišku, kad

$$v_2 = v_0 + a\tau, \qquad (7) \qquad \text{(1 balas)}$$

ir $$v_3 = v_0 + a(\tau + t_2), \qquad (8) \qquad \text{(1 balas)}$$

čia τ – laikas, per kurį traukinio priekis pravažiuoja tunelį.
Iš (5), (6), (7), (8) lygčių gauname

$$\ell = (v_0 + a\tau) + \frac{at_2^2}{2}. \qquad (9) \qquad \text{(1 balas)}$$

Iš (4) ir (9) lygčių

$$\tau = \frac{\ell}{a}\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right) + \frac{t_1 - t_2}{2}. \qquad \text{(1 balas)}$$

Visas laikas

$$t = t_2 + \tau, \qquad \text{(1 balas)}$$

$$\boxed{t = \frac{\ell}{a}\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right) + \frac{1}{2}(t_1 + t_2)} \qquad \text{(1 balas)}$$

2. Uždarame inde $t = 0\,°\mathrm{C}$ vandenyje plaukioja $M = 0{,}1$ kg masės stačiakampio gretasienio formos ledo gabalas. a. Kuri ledo gabalo dalis yra po vandeniu? (2 balai) b. Kokios masės m švininį rutuliuką reikia padėti ant ledo, kad iškilusios virš vandens dalies tūris sumažėtų dvigubai? (3 balai) c. Kokį mažiausią šilumos kiekį reikia suteikti ledui, kad ledas kartu su švininiu rutuliuku pilnai panirtų? (5 balai) Švino tankis $\rho = 11{,}3 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, ledo – $\rho_\ell = 900\ \mathrm{kg/m^3}$, vandens – $\rho_0 = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, ledo savitoji lydymosi šiluma $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5\ \mathrm{J/kg}$. Indo šiluminės talpos ir energijos nuostolių nepaisykite.

(10 taškų)

Sprendimas

a. Ledas plūduriuos, kai ledą veikianti sunkio jėga bus lygi Archimedo jėgai:

$$Mg = F_A,$$

$$Mg = \rho_0 g V_p, \qquad \text{čia } V_p - \text{panirusios ledo dalies tūris.} \qquad \text{(1 balas)}$$

$$V_p = \frac{M}{\rho_0}.$$

Ledo dalis po vandeniu $\frac{V_p}{V}$, čia V – viso ledo tūris.

$$\frac{V_p}{V} = \frac{\rho_\ell}{\rho_0}. \qquad \underline{\frac{V_p}{V} = 0{,}9.} \qquad \text{(1 balas)}$$

b. Kad iškilusios virš vandens ledo gabalo dalies tūris sumažėtų dvigubai, panirusi po vandeniu ledo dalis turi būti

$$\frac{V'_p}{V} = 0{,}95, \qquad \text{čia } V'_p - \text{panirusios dalies tūris uždėjus rutuliuką.} \qquad \text{(1 balas)}$$

Uždėjus švininį rutuliuką ant ledo, plūduriavimo sąlyga:

$$(M + m)g = \rho_0 g V'_p. \qquad V'_p = \frac{M + m}{\rho_0}. \qquad \text{(1 balas)}$$

Todėl $\frac{V'_p}{V} = \frac{M + m}{M} \cdot \frac{\rho_\ell}{\rho_0}.$

Iš čia $m = \left(\frac{V'_p}{V} \cdot \frac{\rho_0}{\rho_\ell} - 1 \right) M.$ $\qquad \underline{m = 5{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg.}}$ $\qquad$ (1 balas)

c. Kad ledas kartu su rutuliuku visiškai panirtų, reikia, kad ištirptų ΔM dalis ledo:

$$Q = \Delta M \lambda, \qquad (1) \qquad \text{(1 balas)}$$

o Archimedo jėga, veikianti likusį ledą su rutuliuku būtų lygi sunkio jėgai, veikiančiai rutuliuką ir neišsilydžiusį ledą, kurio masė M_1:

$$F_{A1} = (M_1 + m)g, \qquad (2) \qquad \text{(1 balas)}$$

$$F_{A1} = \rho_0 (V_1 + V_r) g = \rho_0 \left(\frac{M_1}{\rho_\ell} + \frac{m}{\rho} \right) g, \qquad (3)$$

Akivaizdu, kad $\qquad \Delta M = M - M_1. \qquad (4)$

Sulyginę (2) ir (3) lygtis, gauname:

$$\rho_0 \frac{M_1}{\rho_\ell} + \rho_0 \frac{m}{\rho} = M_1 + m, \qquad M_1 \left(\frac{\rho_0}{\rho_\ell} - 1 \right) = m \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right), \qquad \text{(1 balas)}$$

$$M_1 = \frac{m \rho_\ell (\rho - \rho_0)}{\rho (\rho_0 - \rho_\ell)}. \qquad (5) \qquad \text{(1 balas)}$$

(4) ir (5) įrašę į (1) gauname:

$$\boxed{Q = \left(M - \frac{m \rho_\ell (\rho - \rho_0)}{\rho (\rho_0 - \rho_\ell)} \right) \lambda} \qquad \underline{Q \approx 18\,\text{kJ.}} \qquad \text{(1 balas)}$$

3. Į indą, kuriame yra $t = 0\,°\mathrm{C}$ temperatūros ledas, įpilama $m = 3\,\mathrm{kg}$ masės $t_v = 90\,°\mathrm{C}$ temperatūros vandens. Kokia indo turinio masė, jei jo tūris nusistovėjus šiluminei pusiausvyrai $V_0 = 13{,}7\,\ell$? Vandens tankis $\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, ledo – $\rho_\ell = 900\,\mathrm{kg/m^3}$, vandens savitoji šiluma $c = 4{,}2\cdot10^3\,\mathrm{J/(kg\cdot°C)}$, ledo savitoji lydymosi šiluma $\lambda = 3{,}3\cdot10^5\,\mathrm{J/kg}$. Indo šiluminės talpos ir šilumos nuostolių nepaisykite.
(10 taškų)

Sprendimas

Šilumos kiekis, kurį gali atiduoti vanduo atvėsdamas nuo $t_v = 90\,°\mathrm{C}$ iki $t = 0\,°\mathrm{C}$:

$Q = cmt_v.$ $\qquad Q = 1{,}13\,\mathrm{MJ}.$ (1 balas)

Tokio šilumos kiekio užtektų m_1 masės ledui išlydyti:

$m_1 = \dfrac{Q}{\lambda}.$ $\qquad m_1 = 3{,}4\,\mathrm{kg}.$ (1 balas)

Tada užimamas tūris būtų:

$V^* = \dfrac{m + m_1}{\rho}.$ $\qquad V^* = 6{,}4\,\ell.$ (1 balas)

Pagal sąlygą $V_0 > V^*$, tai reiškia, kad visas ledas neišsilydo, o temperatūra inde yra $t_x = 0\,°\mathrm{C}$. (1 b.)

Nusistovėjus šiluminei pusiausvyrai, inde bus ledo ir vandens mišinys, kurio masė M:

$M = m + m_1 + m_2,$ (1)

čia: $m_1 = \dfrac{Q}{\lambda} = \dfrac{cmt_v}{\lambda}$ – išsilydžiusio ledo masė, (2)

$m_2 = \rho_\ell V_2$ – neišsilydžiusio ledo masė, (3) (1 balas)

$V_2 -$ neišsilydžiusio ledo tūris.

$V_2 = V_0 - V - V_1,$ (4)

$V = \dfrac{m}{\rho}$ – įpilto vandens tūris, (5)

$V_1 = \dfrac{m_1}{\rho}$ – iš ledo gauto vandens tūris. (6) (1 balas)

(4), (5), (6) lygtis įrašę į (3) gauname:

$m_2 = \rho_\ell\left(V_0 - \dfrac{m + m_1}{\rho}\right).$ (7) (1 balas)

(2) ir (7) lygtis įrašę į (1), gauname

$M = m + \dfrac{cmt_v}{\lambda} + \rho_\ell V_0 - \dfrac{\rho_\ell}{\rho} m\left(1 - \dfrac{ct_v}{\lambda}\right).$ (2 balai)

$\boxed{M = \rho_\ell V_0 + m\left(1 - \dfrac{\rho_\ell}{\rho}\right)\left(1 + \dfrac{ct_v}{\lambda}\right)}$ $\qquad M \approx 13\,\mathrm{kg}.$ (1 balas)

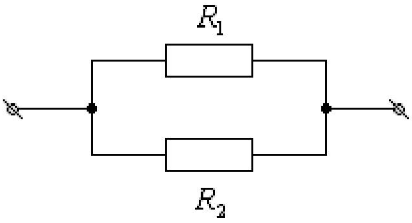
4. Iš $\ell = 1\,\text{m}$ ilgio, $R = 1{,}6\,\Omega$ varžos vielos (be izoliacijos) reikia pagaminti $r = 0{,}1\,\Omega$ varžą. Aprašykite du būdus, kaip galima tai padaryti. Reikia panaudoti visą vielą.
(10 taškų)

Sprendimas

Žinome, kad $R = \rho \dfrac{\ell}{S}$. (1) (2 balai)

1. Vielą sulenkiame į 4 lygias dalis. Gauname 4 lygiagrečiai sujungtas varžas. (1 balas)
Kiekvienos dalies varža $0{,}4\,\Omega$. Bendra varža tarp galų bus $r = 0{,}1\,\Omega$. (1 balas)

2. Vielą sulenkiame į dvi nevienodo ilgio dalis ir jas sujungiame lygiagrečiai. (2 balai)



Tokiu atveju

$$r = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (2)$$

Be to

$$R_1 = \rho \frac{\ell_1}{S}, \quad (3)$$

$$R_2 = \rho \frac{\ell_2}{S}. \quad (4)$$

(3), (4) lygtį įrašę į (2) gauname

$$r = \frac{\rho \ell_1 \ell_2}{S(\ell_1 + \ell_2)}. \quad (5)$$

Be to $\ell_1 + \ell_2 = \ell$. (6) (1 balas)

Iš (5), (6) ir (1) lygčių gauname:

$$R\ell_1^2 - R\ell\ell_1 + r\ell^2 = 0, \quad \text{(1 balas)}$$

$$\ell_1 = \ell\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{R - 4r}{4R}}\right). \quad \text{(1 balas)}$$

Iš čia vielos dalys:

$$\ell_1' = 0{,}07\,\text{m}, \quad \ell_2 = 0{,}93\,\text{m}. \quad \text{(1 balas)}$$

Eksperimentinė užduotis

Vielos tankio ir jos savitosios varžos nustatymas

Darbo tikslas: nustatyti vielos tankį ir jos savitąją varžą.
Darbo priemonės: viela, nevienalytis stačiakampis gretasienis pagaliukas, indas su vandeniu (vandens tankis 1000 $\mathrm{kg/m^3}$), siūlas, pasvarėlis, žirklės, kabliukas, sekundometras, stovas, popieriaus juostelė, pieštukas, ampermetras, srovės šaltinis, jungiamieji laidai, žinomos varžos rezistorius, jungiklis.
(20 taškų)

Sprendimas

Vielos tankis lygus

$$\rho = \frac{m}{V_v}.$$

Vielos masę m rasime iš Archimedo dėsnio. Jos tūrį V_v nustatysime pasigaminę liniuotę, naudodamiesi matematine svyruokle.
Vielos tūris

$$V_v = \pi r^2 \ell;$$

čia r – vielos spindulys, ℓ – jos ilgis.
Norint sužinoti vielos ilgį ℓ ir spindulį r, pasigaminame liniuotę. Tuo tikslu iš siūlo ir pasvarėlio padarome matematinę svyruoklę.
Žinome, kad svyravimo periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_s}{g}};$$

čia ℓ_s – siūlo ilgis, g – laisvojo kritimo pagreitis.

Nustatę svyravimų periodą ($T = \frac{t}{n}$), apskaičiuojame siūlo ilgį

$$\ell_s = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

Siūlą lankstydami į dalis ir darydami atžymas popieriaus juostelėje, pasigaminame liniuotę. (4 balai)
Pagaminta liniuote išmatuojame vielos ilgį ℓ, o ją suvyniojus ant pieštuko vija prie vijos, surandame vielos skersmenį. Pvz., vijų skaičius n, o ant pieštuko užvyniotas vijų užimamas ilgis a, tai $r = \frac{a}{2n}$.

Tada vielos tūris bus

$$V_v = \pi \frac{a^2}{4n^2} \cdot \ell. \qquad \text{(2 balai)}$$

Nustatydami vielos masę, medinį pagaliuką panardiname sunkesniuoju galu į indą su vandeniu ir pieštuku pažymime jo panirimo gylį. Po to užvyniojame vielą ant pagaliuko sunkesniojo galo ir vėl panardiname į vandenį. Pagaliukas nugrimzta giliau. Vėl pažymime panirimo gylį. Liniuote išmatuojame panirimo gylių skirtumą $\Delta\ell$. Papildomai panirusio pagaliuko ieškomos dalies tūris bus:

$$\Delta V = b_1 \cdot b_2 \cdot \Delta\ell + V_v; \qquad \text{(3 balai)}$$

čia b_1 ir b_2 – pagaliuko pagrindo kraštinių ilgiai, kuriuos išmatuojame liniuote. Tuomet

$$mg = \Delta V g \rho_0; \qquad \text{(1 balas)}$$

čia ρ_0 – vandens tankis.
Tada vielos masė bus

$$m = \left(b_1 \cdot b_2 \cdot \Delta\ell + V_v\right)\rho_0 .$$

Vielos tankis

$$\boxed{\rho = \rho_0\left(\frac{b_1 \cdot b_2 \cdot \Delta\ell}{\pi r^2 \ell} + 1\right)}$$ (2 balai)

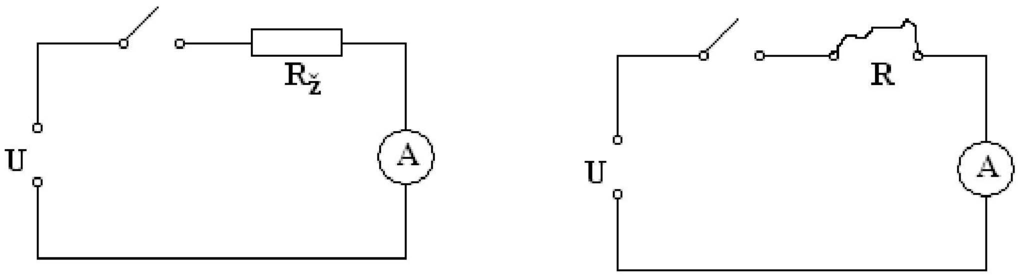
Vielos savitąją varžą rasime žinodami, kad $R = \rho\frac{\ell}{S}$ ir sujungdami dvi elektrines grandines.

Vielos savitoji varža:

$$\rho = \frac{RS}{\ell};$$

čia $S = \pi R^2$. (2 balai)

. Pirmuoju atveju į grandinę įjungiame žinomą varžą $R_ž$, antruoju – tiriamąją vielą R:



(2 balai)

Pagal Omo dėsnį:

$$U = I_1 R_ž ,$$
$$U = I_2 R.$$ (2 balai)

Iš šių lygčių

$$R = \frac{I_1}{I_2} R_ž$$ (1 balas)

Srovės stiprį išmatuojame ampermetru.
Todėl

$$\boxed{\rho = \frac{I_1 R_ž S}{I_2 \ell}}$$ (1 balas)

PASTABA. Balai gali būti pridėti įvertinus ampermetro ir šaltinio vidaus varžas.