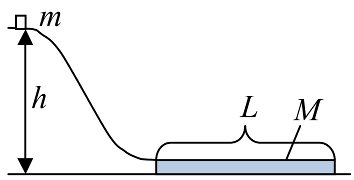
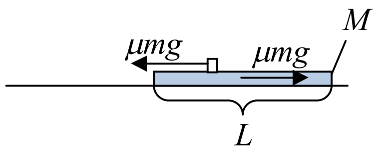
60-osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados
III rato 12 klasės teorinių užduočių sprendimai
2012m. balandžio 12 - 14 d., Vilnius



1. Nedidelis masės m kūnas nušliuožia nuo lygaus kalnelio ir patenka ant masės M ir ilgio L lentos, kuri padėta ant horizontalios plokštumos (žiūr. brėž.). Trinties tarp kūno ir lentos koeficientas μ, o tarp lentos ir horizontalios plokštumos trinties nėra. a) Kiek išsiskiria šilumos Q, jei kūnas įveikia visą lentos ilgį? b) Koks turi būti kalnelio aukštis h, kad kūnas pasiektų kitą lentos galą? c) Koks lentos greitis u, kai kūnas lentos atžvilgiu sustoja pačiame jos gale? d) Kiek laiko t šiuo atveju trunka kūno judėjimas lenta?

Sprendimas



a) Kūną jam slystant lenta veikia stabdanti jį trinties jėga $F_{tr} = \mu mg$, o lentą pagal 3 Niutono dėsnį veikia tokio pat dydžio, bet priešingos krypties jėga - žiūr. brėž. (1 taškas), todėl kūnas lėtėja, o lenta greitėja. Visa išsiskirianti šiluma lygi trinties jėgos darbui, atliekamam kūnui įveikiant lentos ilgį L, t.y. $Q = F_{tr}L = \mu mgL$ (1 taškas).

b) Panaudojame ergijos tvermės dėsnį viso proceso pradžiai ir pabaigai:

$$mgh = \mu mgL + \frac{(m+M)u^2}{2} \qquad \text{(1 taškas)}$$

Čia tariame, kad kūnui pasiekus lentos pabagą jis lentos atžvilgiu sustoja.
Tuomet judesio kiekio tvermės dėsnis kūno ir lentos sistemai, kai kūnas jau nusileidžia nuo kalnelio,

$$mv = (m+M)u \qquad \text{(1 taškas)}$$

Čia v – kūno greitis papėdėje prieš pat patenkant jam ant lentos. Jį randame iš energijos tvermės dėsnio: $mgh = \dfrac{mv^2}{2}$ (1 taškas) .

Iš šių lygčių, eliminavę v ir u, surandame $h = \dfrac{\mu L(m+M)}{M}$. (1 taškas)

c) Iš b) dalies lygčių gauname $u = m\sqrt{\dfrac{2\mu gL}{M(M+m)}}$ (1 taškas).

d) Mūsų sistemos atžvilgiu kūnas, slysdamas lenta, juda tolygiai lėtėjančiai pagreičiu

$$a = \mu g \quad \text{(1 taškas)}.$$

Pradžioje jo greitis v, o pabaigoje u, taigi, $u = v - at$ (1 taškas).

Iš čia $t = \sqrt{\dfrac{2LM}{\mu g(M+m)}}$ (1 taškas).

2. Cilindre su stūmokliu yra 1 litras 0,1 MPa slėgio 27°C temperatūros oras. Iš pradžių jis yra šildomas esant pastoviam tūriui iki du kartus didesnio nei pradinis slėgio, po to esant pastoviam slėgiui – iki du kartus didesnio tūrio, o dar vėliau – esant pastoviai temperatūrai plečiasi iki pradinio slėgio. a) Kiek oro molekulių yra inde? b) Kiek pakinta oro temperatūra ir tūris? c) Nubrėžkite oro slėgio priklausomybės nuo tūrio, slėgio priklausomybės nuo temperatūros ir tūrio priklausomybės nuo temperatūros diagramas. $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}$, $R = 8{,}31$ J/(K·mol).

Sprendimas

Pasižymime duotus dydžius: $V = 1\,\text{l} = 1\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3$, $p = 0{,}1\,\text{MPa} = 1\cdot 10^5\,\text{Pa}$, $t = 27\,°\text{C}$, $T = 300$ K,

$V_2 = V_1$, $p_2 = 2p_1$, $p_3 = p_2$, $V_3 = 2V_2$, $T_4 = T_3$.
Turime rasti: N; temperatūros pokytį ΔT; tūrio pokytį ΔV; $p(V)$; $p(T)$; $V(T)$.

Pagal Klapeirono lygtį medžiagos kiekis $\nu = \frac{pV}{RT}$, tai $N = \nu N_A = \frac{pV}{RT} N_A$,

$$N = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 300} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \approx 2{,}4 \cdot 10^{22}. \quad \text{(1 taškas)}$$

Pagal Šarlio dėsnį $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$ (1 taškas)

randame $T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1$, $T_2 = 2T_1$, $T_2 = 2 \cdot 300 = 600$ (K). (1 taškas)

Pagal Gei-Liusako dėsnį $\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2}$ (1 taškas)

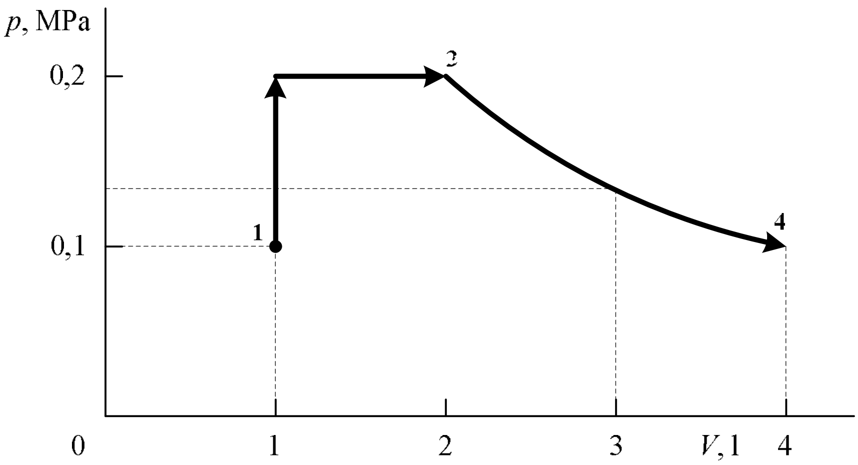
randame

$$T_3 = \frac{V_3}{V_1} T_2, \; T_3 = 2T_2, \; T_3 = 2 \cdot 600 = 1200 \text{ (K)}.$$

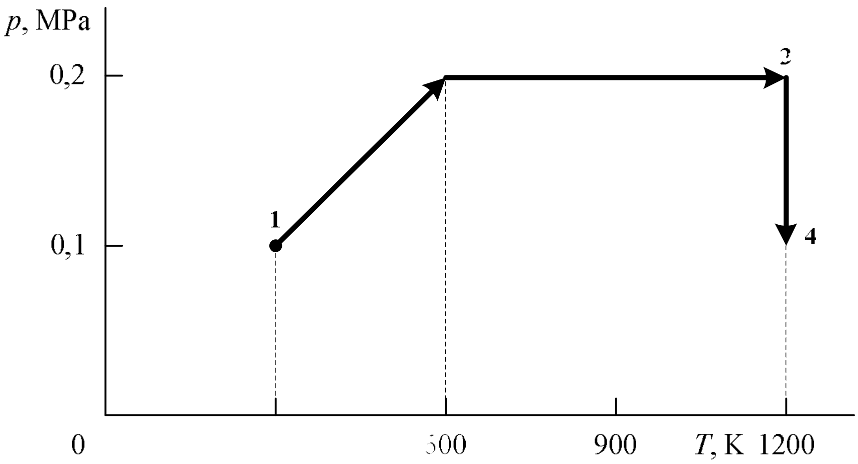
$$\Delta T = T_3 - T_1 = 3T_1, \; \Delta T = 3 \cdot 300 = 900 \text{ (K)}. \quad \text{(1 taškas)}$$

Pagal Boilio ir Marioto dėsnį $p_1 V_4 = p_3 V_3$ (1 taškas)

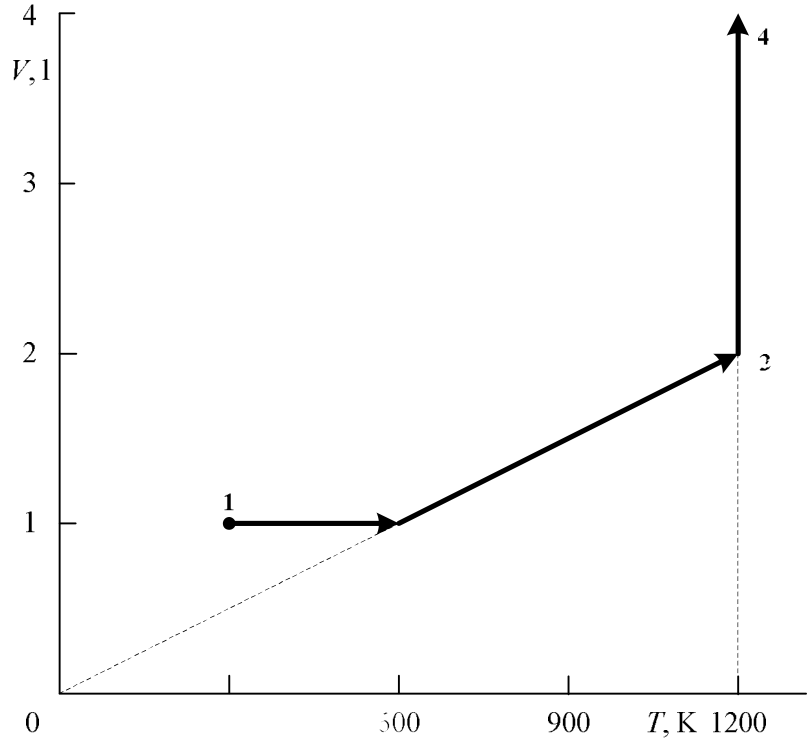
randame $V_4 = \frac{p_3 V_3}{p_1} = 4V_1$, tai $\Delta V = V_4 - V_1 = 3V$, $\Delta V = 3 \cdot 1 = 3$ (l). (1 taškas)



(1 taškas)



(1 taškas)



(1 taškas)

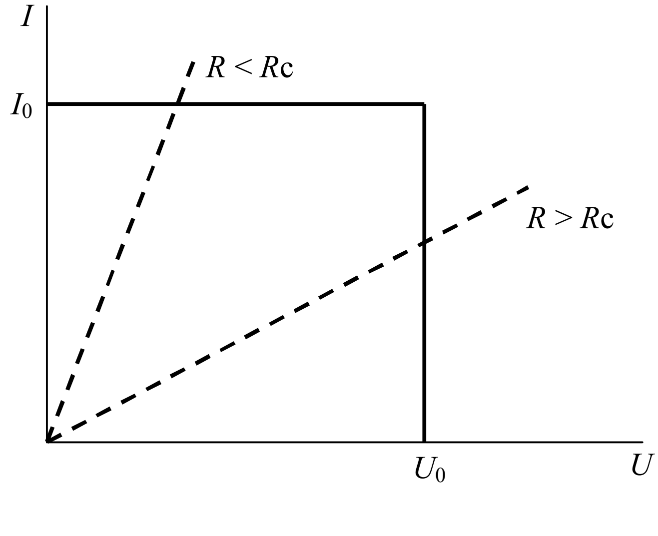
3. Laidžios sferos centre įtvirtintas nedidelis radioaktyvaus elemento, kurio pusamžis ilgas, lyginant su mūsų analizuojamu laiko tarpu, rutuliukas. Radioaktyvus šaltinis charakterizuojamas aktyvumu A, rodančiu skilimų skaičių per sekundę. Skilimo metu atsiranda alfa dalelės, kurių kinetinė energija pasiskirsčiusi labai siaurame intervale aplink vertę W. Prie rutuliuko ir sferos prijungus eletrodus ir išorinę apkrovą, toks prietaisas gali būti naudojamas kaip elektros srovės šaltinis. a) Apibūdinkite šaltinio voltamperinę charakteristiką, t.y. nustatykite ryšį tarp grandinėje tekančios srovės stiprio I ir elektrodų įtampos U. b) Apskaičiuokite, kokia galia P išsiskirs išorinėje apkrovoje, turinčioje varžą R, prijungtoje prie tokio šaltinio. Kam lygi didžiausia galima šios galios vertė ir kokiai apkrovos varžai esant ji realizuojama?

Sprendimas

a) Srovės stiprį riboja skilimų skaičius – didžiausią srovės stiprį $I_0 = 2eA$ turime tada, kai visos išspinduliuotos dalelės pasiekia priešingą elektrodą. (1 taškas)

Maksimalus galimas potencialų skirtumas tarp elektrodų $U_0 = \dfrac{W}{2e}$, kadangi esant didesnei įtampai, alfa dalelėms neužtenka kinetinės energijos pasiekti sferą. (1 taškas)

Taigi, tokio prietaiso voltamperinė charakteristika yra laiptelio pavidalo, o lūžio tašką atitinka nurodytos U_0 ir I_0 vertės. Iki lūžio taško prietaisas elgiasi kaip geras srovės šaltinis, o už jo – kaip geras įtampos šaltinis.



Už brėžinį - (1 taškas)

b) Grandinėje tekančią srovę ir įtampą tarp elektrodų nusako voltamperinės charakteristikos ir išorinės varžos Omo dėsnio $U = IR$ susikirtimo taškas. (1 taškas)
Matome, kad turime atskirai nagrinėti du atvejus pagal tai ar apkrovos varža yra mažesnė ar didesnė už kritinę vertę

$$R_c = \frac{U_0}{I_0} = \frac{W}{4e^2 A} \quad . \qquad \text{(1 taškas)}$$

Kai $R < R_c$, ribojama srovė, todėl $I = I_0$ ir $U = I_0 R$, o apkrovoje išsiskirianti galia lygi

$$P = I_0^2 R = 4e^2 A^2 R \, . \qquad \text{(1 taškas)} \qquad (1)$$

Tuo tarpu kai $R > R_c$ ribojama įtampa, taigi turime $U = U_0$ ir $I = \frac{U_0}{R}$, o apkrovoje išsiskirianti galia lygi

$$P = \frac{U_0^2}{R} = \frac{W^2}{4e^2 R}, \qquad \text{(1 taškas)} \qquad (2)$$

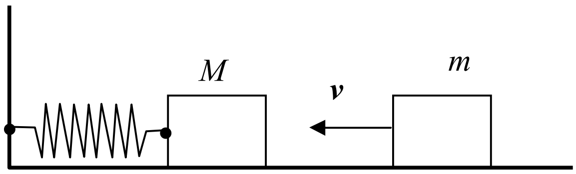
Maksimali galia atitinka kritinę varžą, kurios apkrovos tiesė kerta voltamperinę charakteristiką lūžio taške. Tada galia

$$P = U_0 I_0 = WA, \qquad \text{(1 taškas)} \qquad (3)$$

o ieškoma apkrovos varža

$$R = \frac{U_0}{I_0} = \frac{W}{4e^2 A}. \qquad \text{(2 taškai)} \qquad (4)$$

4. Į ant horizontalios plokštumos padėtą masės M kūną, spyruokle pritvirtintą prie sienos ir esantį rimtyje, juda plokštuma greičiu v kitas masės m kūnas (žiūr. brėž.). Trinties tarp kūnų ir horizontalios plokštumos nėra. Įvykus smūgiui, kūnai sukimba ir pradeda harmoniškai svyruoti periodu T. a) Kiek šilumos Q išsiskiria smūgio metu? b) Koks spyruoklės standumas k? c) Koia svyravimų amplitudė A?



Dabar išnagrinėkite atvejį, kai smūgis absoliučiai tamprus, o po smūgio kūnas M svyruoja harmoniškai. d) Koks šiuo atveju svyravimų periodas T' ? e) Kokia amplitude A' vyksta svyravimai?

Sprendimas

a) Tariame, kad smūgio trukmė labai maža, ir spyruoklė jo metu nespėja deformuotis. Pritaikome judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius:

$$\begin{cases} mv = (m+M)u, \\ \dfrac{mv^2}{2} = Q + \dfrac{(m+M)u^2}{2}. \end{cases} \qquad \text{(1 taškas)}$$

Čia Q - išsiskyrusios smūgio metu šilumos kiekis, u – kūnų greitis po smūgio. Iš pirmosios lygties randame $u = \frac{mv}{M+m}$. Įrašę į antrąją randame $Q = \frac{mMv^2}{2(M+m)}$; (1 taškas)

b) Po smūgio sukibę kūnai svyruoja kaip vienas. Tokių svyravimų periodas

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$. Čia k – spyruoklės standumas. (1 taškas)

Iš čia $k = \frac{4\pi^2(m+M)}{T}$. (1 taškas)

c) Pritaikome energijos tvermės dėsnį dviems kraštinėms svyruojančių kūnų padėtims:

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \qquad \text{(1 taškas)}$$

čia A – svyravimų amplitudė. Panaudoję u išraišką iš a) ir k iš b) dalių, randame

$$A = \frac{Tmv}{2\pi(M+m)}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

d) Kai smūgis tamprus, svyruoja tik pritvirtintras prie spyruoklės kūnas M. Jo svyravimų periodas $T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$. Iš abiejų kūnų svyravimų periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$ išreiškę k randame

$$T' = T\sqrt{\frac{M}{M+m}}; \qquad \text{(1 taškas)}$$

e) Norėdami rasti svyravimų amplitudę šiuo atveju A', turime apskaičiuoti M kūno greitį po smūgio u'. Pritaikome judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius absoliučiai tampriam smūgiui žinodami, kad m kūnas po smūgio atšoka nuo M ir juda į prišingą pusę (antraip kūnas M nesvyruotų harmoniškai). Tegul m kūno greitis po smūgio v'. Tada

$$\begin{cases} mv = Mu - mv', \\ \frac{mv^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}. \end{cases} \qquad \text{(1 taškas)}$$

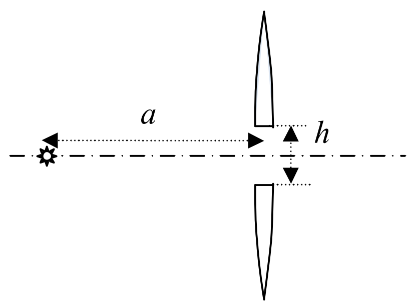
Išsprendę sistemą randame:

$$u' = \frac{2mv}{M+m}, \; v' = \frac{(M-m)v}{M+m}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

Pritaikome energijos tvermės dėsnį dviems kraštinėms svyruojančio M kūno padėtims:

$$\frac{Mu'^2}{2} = \frac{kA'^2}{2}. \text{ Iš čia } A' = \frac{Tmv}{\pi(M+m)}\sqrt{\frac{M}{M+m}}. \qquad \text{(1 taškas)}$$

5. Plono glaudžiamojo lęšio, kurio židinio nuotolis $F = 8{,}0$ cm, optinėje ašyje atstumu $a = 18{,}0$ cm nuo lęšio, padėtas taškinis šviesos šaltinis. a) Kokiu atstumu b nuo lęšio reikia pastatyti ekraną, kad jame atsirastų ryškus šaltinio atvaizdas? Po to lęšis buvo perpjautas per jo skersmenį, o jo pusės paslinktos atstumu $h = 2{,}0$ cm viena nuo kitos (žiūr. brėž.). b) Ką matome ekrane? c) Koks jame atstumas d tarp šaltinio atvaizdų?



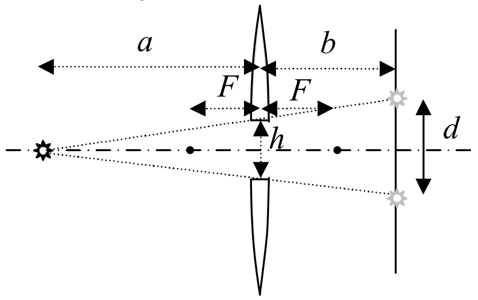
Sprendimas

a) Glaudžiamasis lęšis formuoja atvaizdą kitoje lęšio pusėje atstumu b, kurį randame iš lęšio formulės:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ (2 taškai). Iš čia } b = \frac{af}{a-f} = 14{,}4 \text{ cm} \quad \text{(1 taškas).}$$

Tokiu atsumu ir reikia pastatyti ekraną.

b) Braižome brėžinį:



(2 taškai)

Pastebime, kad kiekviena lęšio dalis, jas slankiojant statmenai optinei ašiai, kuria savo taškinio šviesos šaltinio atvaizdus, atsirandančius kitoje glaudžiamojo lęšio pusėje vienoje statmenoje optinei ašiai plokštumoje atstumu d vienas nuo kito ir esančius tuo pačiu atstumu b nuo lęšio. Be to, matyti šviesi pločio d juosta (2 taškai).

Atvaizdų padėtis surandame, papildomai brėždami spindulius per atskirų lęšio dalių optinius centrus (2 taškai).

Tada iš trikampių panašumo

$$\frac{d}{h} = \frac{a+b}{a} \qquad \text{(2 taškai).}$$

Iš čia $d = h\dfrac{a}{a-f} = 3{,}6\ \text{cm}$ (1 taškas).