XXVI Tarptautinė fizikos olimpiada
1995 m. liepos 5–12 d., Kanbera, Australija

Teorijos turas

1 uždutis. RAUDONASIS GRAVITACINIS POSLINKIS IR ŽVAIGŽDĖS MASĖS MATAVIMAS.

a) Iš žvaigždės paviršiaus išspinduliuojamas dažnio f ir defektinės masės m fotonas. Įrodykite, kad fotono dažnio pokytis Δf, fotonui išėjus iš žvaigždės gravitacinio lauko, išreiškiamas formule

$$\frac{\Delta f}{f} = -\frac{GM}{Rc^2},$$

G – gravitacijos konstanta, M – žvaigždės masė, R – žvaigždės spindulys, c – šviesos greitis ir $\Delta f/f \ll 1$.

Raudonasis spektro linijų poslinkis gali būti panaudotas santykiui M/R matuoti. Žinant R, galima nustatyti M.

(3 balai)

b) Link vienos mūsų galaktikos žvaigždės paleista automatinė kosminė stotis išmatuoti žvaigždės masę M ir spindulį R. Žvaigždės paviršiuje He^+ jonų išspinduliuoti fotonai registruojami rezonansinės sugertiems metodu, sužadinant He^+ jonus stoties kameroje formuojamame pluoštelyje. Sugertis galima tik tada, kai He^+ jonai tam tikru greičiu juda link žvaigždės ir tuo kompensuoja raudonąjį poslinkį. He^+ jonų greitis žvaigždės atžvilgiu $v=\beta c$ matuojamas kaip atstumo iki artimiausio žvaigždės taško funkcija. Eksperimento duomenys pateikti lentelėje. Panaudodami visus eksperimento duomenis grafiniu būdu nustatykite žvaigždės masę M ir spindulį R. Atsakymo paklaidos nevertinkite.

Greičio parametras	$\beta = v/c$, (10^{-5})	3,352	3,279	3,195	3,077	2,955
Atstumas iki žvaigždės paviršiaus	d, $(10^8$ m)	38,90	19,98	13,32	8,99	6,67

(12 balų)

c) Šio eksperimento metu, nustatant R ir M vertes, paprastai atsižvelgiama į fotono dažnio pokytį dėl spinduliuojančio atomo atatrankos. (Šiluminis judėjimas praplečia spinduliuotės juostą, tačiau nekeičia maksimumo padėties, todėl tariame, kad į visus šiluminius efektus atsižvelgta).

i) Tegul ΔE yra dviejų atomo energijos lygmenų energijų skirtumas, kai atomai nejuda. Tegul atomas, esantis ramybės būsenos, išspinduliuoja fotoną ir pats išjuda. Išveskite išspinduliuoto atomo energijos hf reliatyvistinę priklausomybę nuo ΔE ir atomo rimties masės m_0.

(4 balai)

ii) Gaukite skaitinį reliatyvistinio dažnio poslinkio (Δf/f) įvertinimą He^+ jonams. Rezultatas turėtų būti dagu mažesnis už raudonąjį poslinkį b) punkte.

(1 balas)

Duomenys:

Šviesos greitis $c = 3{,}0\cdot10^8$ m/s,
He rimties masė $m_0c^2 = 4\times938$ MeV,
Boro energija $E_n = -13{,}6\, Z^2/n^2$ eV,
Gravitacijos konstanta $G = 6{,}7\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻².

2 užduotis. GARSO SKLIDIMAS

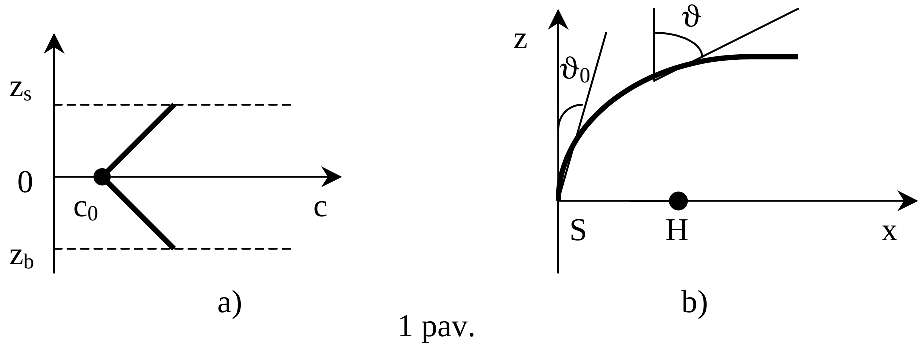
Garso greitis vandenyne priklauso nuo gylio, vandens temperatūros, druskos koncentracijos.

1 pav. a) parodyta garso greičio c priklausomybė nuo gylio z, kai mažiausias greitis c_0 esti viduryje tarp vandenyno paviršiaus ir dugno. Imame z = 0, kur greitis mažiausias, z_s yra vandenyno paviršius, z_b – dugnas.

Kai z > 0, greitis išreiškiamas formule $c=c_0+bz$,

kai z < 0, $c = c_0 - bz$.

Čia $b = |dc/dz|$ yra pastovus garso gradiento modulis.



1 pav.

1 pav. b) parodytas vandenyno pjūvis xz plokštuma (x – horizontalė). Toje plokštumoje garso greitis išreiškiamas 1 pav. a) parodyta priklausomybe. Garso šaltinis yra taške, kurio koordinatės x = 0, z = 0. garsą, sklindantį kuria nors kryptimi, pavaizduojame spinduliu, išeinančiu iš šaltinio kampu ϑ_0 (1 pav. b). Dėl garso greičio priklausomybės nuo z spindulys išlinksta, kampas ϑ išilgai trajektorijos kinta.

a) Įrodykite, kad pradinė trajektorijos dalis yra lankas, kurio spindulys $R=c_0/(b\sin\vartheta_0)$, kai $0 \le 90^0 \le \pi / 2$.

(6 balai)

b) Išveskite formulę, siejančią z_s, c_0 ir b, atitinkančią mažiausią kampo ϑ_0 vertę spinduliams, neatsispindintiems nuo vandenyno paviršiaus.

(3 balai)

c) 1 pav. b) pavaizduotas imtuvas , kurio koordinatės z = 0, x = X. Gaukite išraišką, siejančią b, X ir c_0 ir atitinkančią seriją kampo ϑ_0 verčių, leidžiančių garsui pasiekti imtuvą H. Tam, kad nebūtų garso atspindžio, tarkite, kad z_s ir z_b yra gana dideli.

(4 balai)

d) Apskaičiuokite keturias mažiausias ϑ_0 vertes, kai X = 10000 m, c_0 = 1500 m / s, b= 0,02000 s^{-1}.

(2 balai)

e) Išveskite formulę laikui, reikalingam garsui nusklisti nuo S iki H esant **mažiausiam** kampui ϑ_0, apskaičiuoti. Apskaičiuokite tą laiką naudodami d) punkto duomenis. Gali būti naudinga formulė

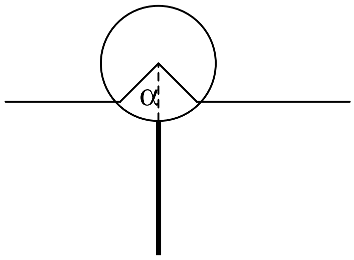
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln tg(x/2).$$

Nustatykite laiką, per kurį tiesus spindulys nusklinda nuo S iki H. Kuris spindulys – atitinkantis kampą $\vartheta_0=\pi/2$ ar atitinkantis mažiausią kampą ϑ_0 (apskaičiuotas d), nusklis greičiau?

(5 balai)

3 užduotis. CILINDRINĖ PLŪDĖ.

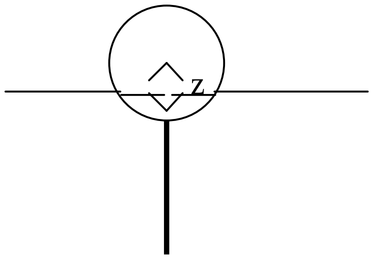
Plūdę sudaro a spindulio l ilgio pastovaus d tankio cilindras ir kietas vienalytis strypas, pritvirtintas cilindro viduryje statmenai cilindro ašiai (žr pav.).



Strypo masė lygi cilindro masei, jo ilgis lygus cilindro skersmeniui, tankis didesnis už jūros vandens tankį. Plūdė plūduriuoja ρ tankio jūros vandenyje.

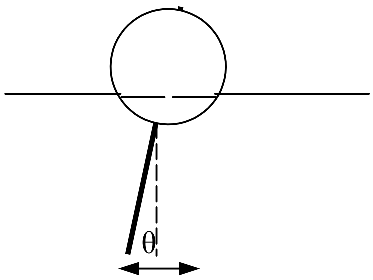
a) Gaukite išraišką, siejančią plūduriavimo kampą α su santykiu d/ρ. Į strypo tūrį neatsižvelkite.

(3 balai)



b) Panardinta į maža gylį z ir paleista plūdė pradeda vertikaliai svyruoti apie pusiausvyros padėtį. Nustatykite, kaip to svyravimo dažnis priklauso nuo α, a ir laisvojo kritimo pagreičio g. Tarkite, kad vandens judėjimo įtaka gali būti įvertinta trečdaliu padidinant plūdės efektinę masę. Tarkite, kad kampas α nėra mažas.

(4 balai)



c) raskite svyravimo dažnio priklausomybę nuo a ir g plūdei sukinėjantis apie cilindro ašį. Strypo nuokrypio nuo vertikalės kampą tarkite esant mažą, į vandens dinamiką ir klampą neatsižvelkite.

(8 balai)

d) Plūdėje įtaisytas akselerometras, leidžiantis tirti vertikaliuosius ir sukamuosius svyravimus. Nustatyta, kad vertikaliųjų svyravimų periodas 1 s, sukamųjų 1,5 s. Panaudodami tą informaciją parodykite, kad plūduriavimo kampas artimas 90^0, įvertinkite cilindro spindulį ir masę, žinodami, kad cilindro ilgis yra lygus jo spinduliui. Vandens tankis ρ = 1000 kg / m^3, laisvojo kritimo pagreitis g = 9,8 m/s^2.

(5 balai)

Eksperimentinės užduotys

1 užduotis.

Skystyje krintantis kūnas per tam tikrą laiką įgyja pastovų greitį, vadinamą nuostoviuoju greičiu. Eksperimento tikslas – krintančių glicerine kūnų nuostoviojo greičio matavimas. Spindulio r rutuliuką, judantį skystyje greičiu v, veikia pasipriešinimo jėga

$$F = 6\pi\eta rv$$, (čia η - klampos koeficientas).

Eksperimento užduotis – išmatuoti metalinių cilindrų nuostovųjį greitį. Kiekvieno cilindro skersmuo lygus jo aukščiui.

Tarkime, kad cilindrą veikia pasipriešinimo jėga

$$F = 6k\pi\eta r^m v$$, čia k ir m – konstantos (rutuliukui k = m = 1).

Įrodykite, kad nuostovusis cilindro greitis skystyje išreiškiamas formule

$$v = Cr^{3-m}(\rho - \rho'),$$

jei ρ - cilindro medžiagos tankis, ρ' – skysčio tankis, C – konstanta, kurios išraišką irgi reikia nustatyti.

Užduotys: nustatykite laipsnio rodiklį m ir glicerino tankį.

Priemonės: 1000 ml menzūra su glicerinu, indas su glicerinu lygiui palaikyti, elektroninis sekundometras, liniuotė su padalomis, samtis, pincetas, 6 cilindrai: aliumininiai 10,00, 8,00, 5,00 ir 4,00 mm, titaniniai 4,00 mm, nerūdijančio plieno 4,00 mm, variniai 4,00 mm skersmens, milimetrinis popierius ir popierius su logaritminiu – logaritminiu tinkleliu.

Nurodymai. Norint gauti pastovius rezultatus, reikia siekti, kad cilindrai kristų išlaikydami horizontalią padėtį. Cilindrų skersmenų ir ilgių paklaida lygi 0,05 mm. Pakartotiniams bandymams cilindrai iš menzūros išimami samčiu, kurį būtina įleisti į menzūrą prieš metant cilindrą. Glicerinas sugeria iš oro vandens garus. Tai keičia jo klampą. Todėl kai menzūra Todėl kai menzūra nenaudojama, ji turi būti uždaryta plastikine plokštele.

Medžiagų tankiai tokie:

aliuminio $2{,}70 \cdot 10^3$ kg/m^3,
nerūdijančio plieno $7{,}87 \cdot 10^3$ kg/m^3,
titano $4{,}54 \cdot 10^3$ kg/m^3,
vario $8{,}98 \cdot 10^3$ kg/m^3.

2 užduotis.

Eksperimento tikslas – įvertinti kai kuriuos šviesos atspindžio, difrakcijos ir sklaidos reiškinius naudojant lazerio spinduliuotę.

Priemonės: lazeris, metalinės liniuotė kaip difrakcinė gardelė, organinio stiklo indas vandeniui ir pieno mišiniui sklaidos ir atspindžio tyrimams, tieslė, baltas popierinis ekranas, sklaidomasis lęšis, skirtingo pralaidumo filtrai, menzūra su lašeline, lazdelė maišymui, milimetrinis popierius ir popierius su tiesiniu – logaritminiu tinkleliu. Visų priemonių panaudoti nebūtina.

1) Padėkite metalinę liniuotę taip, kad lazerio spinduliai kristų statmenai apšviesdami kelias jos padalas. Baltame ekrane gaukite kelias difrakcines juosteles. Išmatuokite tų juostelių padėtį ir atstumus tarp jų ekranui esant apie 1,5 m nuo liniuotės ir nubraižykite geometrinį eksperimento vaizdą. Panaudodami sąryšį $N\lambda = \pm h \sin\beta,$ (čia N – difrakcijos eilė, λ - šviesos bangos ilgis, h – gardelės konstanta, β - difrakcijos kampas), pagal matavimo duomenis nustatykite lazerio šviesos bangos ilgį ir gauto rezultato paklaidą.

2) Pastatykite tuščią organinio stiklo indą tarp lazerio ir ekrano taip, kad šviesa į juos kristų statmenai.

i) Ekrano apšvietimo sumažėjimo laipsnį įvertinkite procentais. Tam galima panaudoti žinomo pralaidumo filtrus. Atminkite, kad žmogaus regos jautrumui būdinga logaritminė priklausomybė. Apšviestumo sumažėjimą daugiausia lemia šviesos atspindys oro ir organinio stiklo ribose, kurių šiuo atveju yra keturios. Statmenai krintant šviesai jos atspindžio koeficientas dviejų aplinkų riboje išreiškiamas taip:

$$R = ((n_1 - n_2)/(n_1 + n_2))^2,$$

Čia n_1 ir n_2 yra pirmosios ir antrosios aplinkų lūžio rodikliai. Pralaidumo koeficientas $T = 1 - R$.

ii) Imdami organinio stiklo lūžio rodiklį n = 1,59 ir neatsižvelgdami į daugkartinį atspindį ir šviesos koherentiškumo efektus, apskaičiuokite tuščio organinio stiklo šviesos pralaidumo koeficientą. Palyginkite rezultatą su gautu i) punkte.

3) Nekeisdami organinio stiklo padėties į indą įpilkite 50 ml vandens ir pakartokite 2) punkte nurodytus matavimus ir skaičiavimus. Vandens lūžio rodiklis 1,33.

4) **i)** Įpilkite į organinio stiklo indą 50 ml vandens ir 0,5 ml (12 lašų) pieno (sklaidančioji medžiaga) ir gerai išmaišykite. Išmatuokite kampą, kuriuo išsisklaido lazerio spinduliai, ir išeinančio pro užpakalinę indo dienelę spindulių pluoštelio skersmenį, nepaisydami, kad du dydžiai tarp savęs yra susiję. Nustatykite pralaidumo koeficientą, kaip tai buvo daroma anksčiau.

ii) Įpilkite į indą dar 0,5 ml pieno ir pakartokite matavimus.

iii) Kartokite bandymą tol, kol galite stebėti praėjusią pro indą lazerio šviesą.

iv) Nustatykite priklausomybę tarp sklaidos kampo ir pieno koncentracijos.

v) Panaudodami gautus rezultatus ir formulę

$$I = I_0 \exp(-\mu z) = T_{pien} I_0,$$

Nustatykite sklaidos koeficiento μ vertę esant 10% pieno koncentracijai. Čia I_0 – krintantis šviesos stipris, I – praėjusios šviesos stipris, z – skysčio sluoksnio storis, μ - sklaidos koeficientas, lygus konstantos ir sklaidančiosios medžiagos koncentracijos sandaugai, T_{pien} – pieno sluoksnio pralaidumo koeficientas.

SPRENDIMAI

Teorinės užduotys

1 užduotis.

a) Fotono energija E = hf, impulsas p = hf/c, masė $m = hf/c^2$. Fotonui nutolus nuo žvaigždės atstumu

$$\Delta r = r_2 - r_1,$$

jo gravitacinė energija pakinta dydžiu (į fotono masės pokytį neatsižvelgiame)

$$\Delta E = -\frac{GMm}{r_1} + \frac{GMm}{r_2} = \frac{GMhf}{c^2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Kadangi

$$\Delta E = hf_2 - hf_1,$$

tai gauname

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Išspinduliuotam iš žvaigždės paviršiaus fotonui ($r_1 = R$) nutolus nuo žvaigždės ($r_2 \to \infty$), gaunamas dažnio pokyčio ir dažnio santykis

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{GM}{Rc^2}.$$

b) Išspinduliuotam iš žvaigždės paviršiaus f dažnio fotonui esant atstumu d nuo žvaigždės paviršiaus jo dažnio pokytis

$$\Delta f = \frac{fGM}{c^2}\left(\frac{1}{R+d} - \frac{1}{R}\right).$$

Norint, kad f + Δf dažnio fotonai sužadintų He^+ jonus, pastarieji turi judėti link žvaigždės greičiu v, leidžiančiu kompensuoti pokytį Δf. Panaudodami klasikinę Dolerio efekto formulę (parametras β = v/c yra mažas)

$$\Delta f = -\beta f.$$

Tada

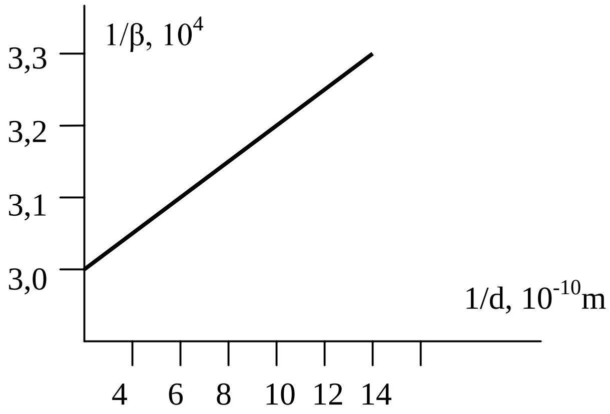
$$\beta = \frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right),$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{R^2c^2}{GM}\frac{1}{d} + \frac{Rc^2}{GM},$$

Matome, kad 1/β ir 1/d susiję tiesine priklausomybe. Iš sąlygoje pateiktų duomenų gauname 1/β ir 1/d (m^{-1}).

1/β, 10^4	2,983	3,050	3,130	3,250	3,339
1/d, 10^{-10}	2,571	5,005	7,508	11,123	14,993

Diagramoje pažymime gautus taškus ir per juos nubrėžiame tiesę (žr. pav.).



Tos tiesės sankirtos su 1/β ašimi taškas atitinka 1/d = 0 ir gaunamas parametras

$$a = \frac{Rc^2}{GM}.$$

Tada tiesės lygtis gali būti parašyta taip:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{aR}{d} + a.$$

Matome, kad aR = k yra tiesės krypties koeficientas, kurį randame iš grafiko. Tada galime gauti žvaigždės spindulį

R = k/a

ir žvaigždės masę

$$M = \frac{kc^2}{Ga}.$$

Iš grafiko gauname k = 3,2· 10^{12} m, a = 2,9· 10^4, todėl

$$R = 1{,}1\cdot 10^8 \text{ m}, M = 5{,}1\cdot 10^{30}\text{kg}.$$

c) **i)** Panaudojame energijos ir impulso tvermės dėsnius:

$$m_0c^2 = c\sqrt{p^2 + m_1^2c^2} + hf,$$

$$p = \frac{hf}{c}.$$

Čia p – atomo įgytas impulsas, kuris yra lygus fotono impulsui, m_1 – nesužadinto atomo rimties masė,

$$mc^2 = m_0c^2 - \Delta E.$$

Iš pateiktų lygčių išreiškiame fotono energiją:

$$\left(m_0c^2 - hf\right)^2 = c^2\left(\frac{h^2f^2}{c^2} + m_1^2c^2\right),$$

$$2m_0c^2hf = m_0^2c^4 - m_1^2c^4 = \left(m_0c^2 + m_1c^2\right)\left(m_0c^2 - m_1c^2\right) =$$

$$= \left(2m_0c^2 - \Delta E\right)\Delta E,$$

$$hf = \Delta E\left(1 - \frac{\Delta E}{2m_0c^2}\right).$$

ii) Kadangi $hf_0 = \Delta E$, tai turime

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta E}{2m_0c^2},$$

$$\Delta E = E_nZ^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Imdami Z = 2, n_1 = 1, n_2 = 2, gauname

$$\Delta f/f = 5{,}44\cdot 10^{-9}.$$

2 užduotis.

a) Spindulio sklidimo kryptį tarp skirtingas c vertes atitinkančių sluoksnių išreiškia lūžio rodiklis

$$n = \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0} = \frac{c}{c_0},$$

iš kur

$$\sin\vartheta = \frac{c_0 + bz}{c_0}\sin\vartheta_0.$$

Spindulį išreiškia funkcija

$$z = z(x),$$

jos kryptį – liestinės krypties koeficientas

$$k = z' = tg\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = ctg\vartheta,$$

ir kreivumo spindulys

$$R = \frac{(1 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{|z''|}.$$

Panaudoję $\sin\vartheta$ išraišką per z, apskaičiuojame

$$z' = \frac{\sqrt{c_0^2 - (c_0 + bz)^2 \sin^2\vartheta_0}}{(c_0 + bz)\sin\vartheta_0},$$

$$z'' = -\frac{bc_0^2}{(c_0 + bz)^3 \sin\vartheta_0},$$

$$R = \frac{c_0}{b\sin\vartheta_0}.$$

Matome, kad R nepriklauso nuo x ir z, t.y., $z = z(x)$, yra spindulio R apskritimo lankas.

b) Atspindžio nuo vandens paviršiaus nebus, kai lanko aukštis h bus nedidesnis už z_s. Aukščiui h gauname išraišką

$$h = R - R\sin\vartheta_0 = c_0 \frac{1 - \sin\vartheta_0}{b\sin\vartheta_0}.$$

Imant h = z_s, turime $$\vartheta_0 = \arcsin\frac{c_0}{c_0 + bz_s}.$$

c) Spindulio, plintančio iš taško S kampu ϑ_0, sankirtos su x ašimi pirmojo taęko H atstumą nuo S išreikš formulė

$$SH = X = 2R\cos\vartheta_0 = \frac{2c_0}{btg\vartheta_0},$$

$$tg\vartheta_0 = \frac{2c_0}{bX}.$$

Akivaizdu, kad taške H spindulys pereina į apatinę sritį ir joje nubrėžia tokį patį lanką kaip ir viršutinėje srityje, todėl gauname spindulio sankirtos su x ašimi antrąjį tašką atstumu 2X nuo taško S ir t.t. Taigi į tašką H patenka spinduliai, kertantieji tame taške x ašį pirmą, antrą kartą ir t.t. Todėl kampams ϑ_0, atitinkantiems tokius spindulius, gauname sąlygą

$$\vartheta_0 arctg\frac{2nc_0}{bX}, \text{ kur n = 1, 2, 3,...}$$

d) Imdami sprendinyje c vertes n = 1, 2, 3, 4, gauname tokias ϑ_0 vertes:

$$\vartheta_0 = 86{,}19^0; 88{,}09^0; 88{,}73^0; 89{,}05^0.$$

e) Garsui plintant apskritimo lanku, laiką galime išreikšti taip:

$$t = \int_S^H \frac{dS}{c},$$

kur dS – lanko elementas. Lanko elementą išreiškę kampo elementu, turime

$$dS = Rd\vartheta = \frac{c_0}{b\sin\vartheta_0} d\vartheta.$$

Garso greitį iš lūžio rodiklio formulės išreiškę nuokrypio kampu, gauname:

$$c = c_0 \frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}.$$

Panaudoję simetriją, leidžiančią skaičiuoti sklidimo laiką pusei lanko ir dauginti iš dviejų, bei įrašę dS ir c išraiškas, gausime

$$t = \frac{2}{b}\int_{\vartheta_0}^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{2}{b}\ln tg\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\Big|_{\vartheta_0}^{\pi/2} = -\frac{2}{b}\ln tg\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right).$$

Imdami dalyje d pateiktus duomenis, gauname

$$t = -\frac{2}{0{,}02}\ln tg\left(\frac{86{,}19^0}{2}\right) = 6{,}655s.$$

Taigi tiesiai plintantis spindulys į tašką H patenka vėliau.

3 užduotis.

a) Panaudodami Archimedo dėsnį, gauname

$$2\pi a^2 ld = \rho l(\alpha a^2 - a^2 \sin\alpha \cos\alpha),$$

$$2\alpha - \sin 2\alpha = 4\pi \frac{d}{\rho}.$$

b) Plūdei nukrypus mažu atstumu z nuo pusiausvyros padėties, ją veikianti Archimedo jėga pakinta, atsiranda jėga F, besistengianti grąžinti plūdę į pusiausvyros padėtį. Turime

$$F = 2\rho gzla \sin\alpha.$$

Kadangi F proporcinga z, tai jos veikiama plūdė svyruos apie pusiausvyros padėtį dažniu

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Čia $k = 2\rho gla \sin\alpha$, $m = 2\pi a^2 ld \cdot \frac{4}{3}$. Todėl

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\rho g \sin\alpha}{4\pi ad}} = \sqrt{\frac{3g \sin\alpha}{a(2\alpha - \sin 2\alpha)}}.$$

c) Neatsižvelgiant į vandens judėjimą, gaunama, kad plūdė svyruoja sukinėdamasi apie cilindro ašį. Strypui nukrypus mažu kampu ϑ nuo vertikalės, plūdę veikia jėgos momentas

$$M = 2\pi a^3 ldg\vartheta,$$

Sukantis plūdę į pusiausvyros padėtį. Todėl plūdė svyruoja dažniu

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{b}{J}},$$

kur b – jėgos momento proporcingumo posūkio koeficientas, J – plūdės inercijos momentas svyravimo ašies atžvilgiu, kurį gauname pasinaudodami cilindro ir strypo inercijos momentų išraiškomis. Turime

$$b = 2\pi a^3 ldg,$$

$$J = \frac{1}{2}\pi a^2 ld \cdot a^2 + \pi a^2 ld\left(\frac{a^2}{3} + 4a^2\right) = \frac{29}{6}\pi a^4 ld.$$

Tada

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{12g}{29a}}.$$

d) Imdami dažnių išraiškas iš b ir c, gauname

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{4\pi ad}{3g\rho \sin\alpha}\frac{12g}{29a}} = \sqrt{\frac{16\pi d}{29\rho \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{4(2\alpha - \sin 2\alpha)}{29 \sin\alpha}}.$$

Įstatę periodų vertes ir pakėlę išraišką kvadratu, gauname transcendentinę lygtį

$$2\alpha - \sin 2\alpha = 3{,}22 \sin\alpha,$$

kurios apytikslis sprendinys $\alpha = 91^0$. Panaudodami ω_2 išraišką, gausime

$$a = \frac{12gT_2^2}{4\pi^2 \cdot 29} = 0{,}23m.$$

Įrašę gautą a vertę ir imdami l = a, turėsime

$$m = 2\pi a^3 d = \rho a^3(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha) = 1{,}66a^3 \rho \sin\alpha = 20{,}5kg.$$

Eksperimentinės užduotys

1 užduotis

Krintantį skystyje cilindrą veikia trys jėgos: žemyn nukreipta sunkio jėga

$$F_1 = \rho V g = 2\pi r^3 \rho g,$$

aukštyn nukreipta Archimedo jėga

$$F_2 = \rho' V g = 2\pi r^3 \rho' g$$

ir aukštyn nukreipta skysčio pasipriešinimo jėga

$$F_3 = 6\pi k \eta r^m v_T.$$

Greičiui nusistovėjus, visų jėgų atstojamoji yra lygi 0, t.y.

$$F_1 = F_2 + F_3.$$

Įrašę jėgų išraiškas, gauname formulę nuostoviajam greičiui:

$$v_T = \frac{g(\rho - \rho')}{3k\eta} r^{3-m} = C(\rho - \rho') r^{3-m},$$

$$C = \frac{g}{3k\eta}.$$

1) Nuostoviojo greičio matavimas.

Liniuote išmatuojame atstumą tarp cenzūros skalės padalų. Skalė je pasirenkamos dvi padalos ir, metant į cenzūrą cilindrus, sekundmačiu išmatuojamas laikas, per kurį cilindrai nueina nuo viršutinės padalos iki apatinės. Viršutinė padala imama ne prie pat paviršiaus, kad spėtų nusistovėti greitis. Imamos kelios skirtingos padalų poros, kiekvienai porai atliekama po kelis bandymus, apskaičiuojamos greičio vertės, nustatomas jo vidurkis ir paklaida. Imant skirtingus atstumus, galima grafiškai pavaizduoti S ir t priklausomybę ir per gautus taškus nubrėžti tiesę. v_T yra tos tiesės krypties koeficientas.

2) Keičiant aliumininius cilindrus, gaunama greičio priklausomybė nuo cilindro spindulio. Įrašę

$$v_T = \frac{S}{t}$$

ir imdami v_T išraiškos logaritmą, gauname

$$\lg S - \lg t = (3 - m)\lg r + \lg C(\rho - \rho').$$

Matome, kad lgt ir lgr susieti tiesine priklausomybe ir (3 – m) yra tos tiesės krypties koeficientas. Todėl pažymime ant popieriaus su logaritminiu tinkleliu cilindrų spindulius ir jų kritimo laiką atitinkančius taškus (esant tam pačiam S), per tuos taškus nubrėžiame tiesę ir, nustatę jos krypties koeficientą, apskaičiuojame m.

3) Matuojame to paties dydžio skirtingo tankio cilindrų kritimo laiką (tam pačiam S). Iš išraiškos

$$\frac{S}{t} = B(\rho - \rho'),$$

kur B – konstanta, matome, kad ρ ir 1/t susieti tiesine priklausomybe. Imame ašis ρ ir 1/t, atidedame skirtingus matavimus atitinkančius taškus ir brėžiame per juos tiesę. Iš tos tiesės sankirtos su ρ ašimi taško gauname ρ’ vertę.

2 užduotis.

1) Pasirenkame N, leidžiantį pakankamai tiksliai išmatuoti kampą β $(N \approx 10)$. Galima β matuoti matlankiu, tačiau tai netikslu. Tikslesnė β vertė gaunama, išmatavus atstumą tarp tą patį N atitinkančių linijų vienoje ir kitoje pusėje nuo centrinės linijos ir tą atstumą padalinus iš dvigubo atstumo nuo liniuotės iki ekrano (nes kampas β yra mažas). Matavimą pakartojame keletą kartų, gauname vidurkį ir paklaidą.

2) **i)** Naudodami filtrus, pastebime, kad kiuvetės pralaidumas artimas 75% filtro pralaidumui.

ii) Apskaičiuojame kiuvetės pralaidumą, naudodami sąlygoje pateiktą formulę (oro lūžio rodiklis $n_2 = 1$):

$$T_0\left[1-\left(\frac{1{,}59-1}{1{,}59+1}\right)^2\right]^4 = 0{,}808.$$

3) Apskaičiuojame kiuvetės su vandeniu pralaidumą

$$T = \left[1-\left(\frac{1{,}59-1}{1{,}59+1}\right)^2\right]^2\left[1-\left(\frac{1{,}59-1{,}33}{1{,}59+1{,}33}\right)^2\right]^2 = 0{,}885.$$

4) Žinodami į kiuvetę įpilto vandens kiekį ir įlašinto pieno kiekį, apskaičiuojame pieno koncentraciją. Iš viršaus stebėdami spindulių eigą kiuvetėje, galime išmatuoti matomo šviesaus kūgio sklaidos kampą matlankiu. Tačiau, kol pieno koncentracija maža ir mažas sklaidos kampas, toks matavimas netikslus. Tiksliau sklaidos kampą gauname, išmatavę šviesaus skritulio skersmenį, spinduliui įeinant į kiuvetę ir iš jos išeinant, ir jų skirtumą padalinę iš skysčio sluoksnio storio. Didinant pieno koncentraciją, sklaidos kampas didėja, o išeinančių spindulių sudaromas skritulys blankiąja. Kai sklaidos kampas viršija 20^0, jį tiksliau galima išmatuoti matlankiu. Pieno koncentracijos vertes ir jas atitinkančias sklaidos kampo vertes pavaizdavę grafiškai, gauname tarp jų tiesinę priklausomybę. Kiekvienos pieno koncentracijos išmatuojame ir šviesos pralaidumą. Kadangi šviesos pralaidumą lemia du faktoriai – atspindžiai skirtingų medžiagų ribose ir sklaida pieno dalelėmis, tai pieno mišinio pralaidumą gauname taip:

$$T_{pien} = \frac{T_v}{T},$$

kur T_v – išmatuotas kiuvetės su skysčiu pralaidumas, T – kiuvetės su grynu vandeniu pralaidumas. Imdami sąlygoje pateiktos intensyvumo formulės natūralinį logaritmą ir panaudodami sąryšį

$$\mu = kC,$$

kur k – konstanta, C – mišinio koncentracija, gauname

$$\ln T_{pien} = -kzC.$$

Matome, kad $\ln T_{pien}$ ir C susieti tiesine priklausomybe ir (-kz) yra tos tiesės krypties koeficientas. Ant popieriaus su tiesiniu – logaritminiu tinkleliu pažymėję taškus, atitinkančius C ir T_{pien} vertes, ir nubrėžę per juos tiesę, iš grafiko randame 10% pieno koncentraciją atitinkančią T_{pien} vertę ir, imdami kiuvetėje esančio skysčio sluoksnio storį z, apskaičiuojame μ.

Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2005 04 07.