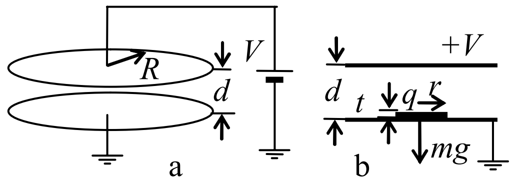
# XXXV TARPTAUTINĖ FIZIKOS OLIMPIADA
**2004 m. liepos 15–23, Pohang, Korea**

## 1 teorinė užduotis. „Ping-pongo“ varža

Kondensatorių sudaro dvi spindulio $R$ lygiagrečios plokštelės, atskirtos atstumo $d$ tarpeliu, ir $d<<R$, kaip parodyta 1 pav.(a). Viršutinė plokštelė prijungta prie pastovios įtampos $V$ šaltinio, o apatinė įžeminta. Plonas ir mažas diskelis $m$ masės ir $r$ spindulio ($r<<d, R$) ir storio $t$ ($t<<r$) padedamas apatinės plokštelės viduryje, kaip parodyta 1 pav. (b). Laikome, kad tarp plokštelių yra vakuumas, jo dielektrinė konstanta $\varepsilon_0$; plokštelės ir diskelis pagamintos iš labai laidžios medžiagos; į kraštinius efektus neatsižvelkite. Į elektrinės grandinės indukcinę varžą, reliatyvistinius efektus ir veidrodinio krūvio efektą taip pat neatsižvelkite.




(a) [1,2 taško]. Apskaičiuokite sąveikos jėgą tarp plokštelių nesant diskelio.

(b) [0,8 taško]. Kai diskelis padedamas ant plokštelės, diskelyje pagal 1 pav. (b) susidaro krūvis, kuris nuo potencialo $V$ priklauso taip : $q = \chi V$ . Išreikškite $\chi$ per $r$, $d$ ir $\varepsilon_0$.

(c) [0,5 taško]. Lygiagrečios plokštelės yra statmenos homogeniniam gravitaciniam laukui, sukuriančiam pagreitį $g$. Kad pradžioje gulėjęs ant apatinės plokštelės diskelis pradėtų kilti aukštyn, potencialą reikia padidinti virš ribinės vertės $V_0$. Išreikškite $V_0$ per $m$, $g$, $d$ ir $\chi$.

(d) [2,3 taško]. Kai $V>V_0$ diskelis juda aukštyn ir žemyn tarp plokštelių. (Laikykite, kad diskelis juda tik vertikaliai nesikraipydamas). Diskelio smūgiai į plokšteles netamprūs, naudingumo koeficientas $\eta=(v_{po}/v_{prieš})$, čia $v_{po}$ ir $v_{prieš}$ atitinkamai diskelio greičiai tuoj po smūgio į plokštelę ir prieš pat smūgį. Plokštelės yra nejudamai įtvirtintos. Diskelio greitis tuoj po smūgio į apatinę plokštelę apibrėžia „stacionarios būsenos greitį“ $v_s$, kuris priklauso nuo $V$ taip:

$$v_s = \sqrt{\alpha V^2 + \beta} .$$

Išreikškite koeficientus $\alpha$ ir $\beta$ per $m$, $g$, $\chi$, $d$ ir $\eta$ . Laikykit, kad visas diskelio paviršius paliečia plokštelę tuo pat momentu, todėl visiškas krūvio pasikeitimas įvyksta momentaliai kiekvieno smūgio metu.

(e) [2,2 taško]. Pasiekus stacionarią būseną vidutinis elektros srovės stipris grandinėje $I$ gali būti išreikštas taip: $I=\gamma V^2$ kai $qV>>mgd$. Išreikškite $\gamma$ per $m$, $\chi$, $d$ ir $\eta$.

(f) [3 taškai]. Kai potencialas $V$ labai lėtai mažinamas egzistuoja kritinė vertė $V_c$, žemiau kurios elektros srovė nustoja tekėti. Išreikškite $V_c$ ir atitinkamą $I_c$ per $m$, $g$, $\chi$, $d$ ir $\eta$ . Palyginę $V_c$ su užduotyje (c) nustatyta $V_0$ padarykite apytikslį $I$ priklausomybės nuo $V$ brėžinį kai $V$ didėja ir mažėja nuo $V$=0 iki $3V_0$.

## Sprendimas

(a) Plokščiojo kondensatoriaus elektrinė talpa $C = \varepsilon_0 \pi R^2 / d$ , jo viršutinėje plokštelėje susikaupia elektros krūvis $Q = VC = \varepsilon_0 \pi R^2 V / d$ . Toks krūvis sukuria pastovų elektrinį lauką $E = V / 2d$ , kuris veikia kitą plokštelę jėga $F = -QE = -\varepsilon_0 \pi R^2 V^2 / 2d^2$ .

(b) Apatinėje plokštelėje elektros krūvis pasiskirstęs pastoviu paviršiniu tankiu $\sigma = -Q / \pi R^2$. Padėjus ant plokštelės ploną laidų diskelį to diskelio užklotos plokštelės dalies krūvis $q$ pereina ant diskelio. Taigi, $q = -\sigma \pi r^2 = -\varepsilon_0 \pi r^2 V / d$, $\chi = -\varepsilon_0 \pi r^2 / d$ .

(c) Diskelį veikia nukreipta žemyn sunkio jėga $mg$ ir nukreipta aukštyn viršutinės plokštelės sukurto elektrinio lauko jėga $F_e = qE = \varepsilon_0 \pi r^2 V^2 / 2d^2 = \chi V^2 / 2d$ . Kad diskelis pradėtų kilti, turi būti $F_e > F_0 = mg$. Ribiniu atveju, kai $F = F_0$, $V_0 = \sqrt{2mgd / \chi}$ .

(d) Diskelio stacionarios būsenos greitį tik atsimušus į apatinę plokštelę pažymim $v_s$, o jo kinetinę energiją tuo metu $K_s = m v_s^2/2$. Kiekvieno praėjimo aukštyn–žemyn metu elektrinis laukas suteikia diskeliui energijos kiekį $\Delta U=2qV$. Kiekvieno netampraus smūgio metu diskelis praranda energijos kiekį $\Delta K = K_{prieš} - K_{po} = (1-\eta^2)K_{prieš} = (1/\eta^2 - 1)K_{po}$. Jei po smūgio į apatinę plokštelę kinetinė energija yra $K_s$, tai prieš smūgį į viršutinę plokštelę ji yra ($K_s+qV-mgd$). Visas kinetinės energijos pokytis praėjimo aukštyn–žemyn metu yra $\Delta K_v = (1/\eta^2 - 1)K_s + (1-\eta^2)(K_s + qV - mgd)$. Esant stacionariai būsenai tas pokytis yra kompensuojamas elektrinio lauko poveikiu, t.y., $\Delta K_v=2qV$. Įstatę $\Delta K_v$ išraišką, gauname:

$$2qV = (1/\eta^2 - 1)K_s + (1-\eta^2)(K_s + qV - mgd),$$

$$K_s = mv_s^2/2 = \eta^2 qV/(1-\eta^2) + \eta^2 mgd/(1+\eta^2),$$

$$v_s = \sqrt{2\eta^2\chi V^2/m(1-\eta^2) + 2\eta^2 gd/(1+\eta^2)}.$$

Palyginę su sąlygoje pateikta išraiška gauname:

$$\alpha = 2\eta^2\chi/m(1-\eta^2),\ \ \beta = 2\eta^2 gd/(1+\eta^2).$$

(e) Atsižvelgę į sąlygą $qV>>mgd$ matome, kad diskelį veikia pastovi elektrinė jėga, nukreipta jo judėjimo kryptimi ir suteikianti pagreitį $a = qV/dm$. Jo greitis stacionarioje būsenoje ir judant aukštyn, ir žemyn kinta vienodai, vienodi yra ir jo pradinis ir galinis greitis, visą atstumą $d$ jis nueina per vienodus laiko tarpus $t_0$, todėl $v_{prieš} = v_s + at_0 = \eta v_s$, $t_0 = (1/\eta - 1)v_s/a$ . Ankščiau gautoje kinetinės energijos išraiškoje išmetę narį su $mgd$, gauname $K_s = mv_s^2/2 = \eta^2 qV/(1-\eta^2)$. Išreiškę $v_s$ gauname $t_0 = \sqrt{2md^2(1-\eta)/[qV(1+\eta)]}$. Praėjimo aukštyn ar žemyn metu diskelis perneša krūvį $q$. Todėl vidutinis elektros srovės stipris

$$I = q/t_0 = \chi V/\sqrt{2md^2(1-\eta)/[qV(1+\eta)]} = \sqrt{(1+\eta)\chi^2/[2md^2(1-\eta)]}V^2,$$

$$\gamma = \sqrt{(1+\eta)\chi^2/[2md^2(1-\eta)]}.$$

(f) Elektros srovė nustos tekėti, kai atsimušęs į apatinę plokštelę diskelis nepakils iki viršutinės plokštelės, t.y., ribiniu atveju jo greitis ir kinetinė energija prie viršutinės plokštelės bus lygi nuliui. Tokios būsenos ribinį potencialą nustatome iš lygties $K_s + qV_c - mgd = 0$, čia $K_s$ – diskelio kinetinė energija prie apatinės plokštelės tuoj po smūgio. Įrašę kinetinės energijos išraišką iš (d), gauname

$$\eta^2 qV_c/(1-\eta^2) + \eta^2 mgd/(1+\eta^2) + qV_c - mgd = 0.$$

Dar įstatę $q=\chi V_c$ išreiškiame ribinį potencialą $V_c = \sqrt{mgd(1-\eta^2)/[(1+\eta^2)\chi]}$. Palyginę gautą išraišką su dalyje (c) nustatytu potencialu $V_0$, galime parašyti $V_c=z_cV_0$, panaudodami $z=V/V_0$ kaip argumentą srovės stiprio grafikui nubrėžti. Gauname $z_c = \sqrt{(1-\eta^2)/[2(1+\eta^2)]}$. Elektros srovės stipriui gauti esant $V$ nežymiai didesniam už $V_c$ nustatome laiko tarpą $\Delta t=t_+ + t_-$, per kurį diskelis praeina visą kelią aukštyn–žemyn, panaudodami tolygiai greitėjančio judėjimo kelio formulę:

$$v_{0+}t_+ + a_+t_+^2/2 = d,\ \ v_{0-}t_- + a_-t_-^2/2 = d,$$

čia

$$a_+ = qV_c/md - g = -2\eta^2 g/(1+\eta^2),\ a_- = qV_c/md + g = 2g/(1+\eta^2),\ a_+/a_- = -\eta^2.$$

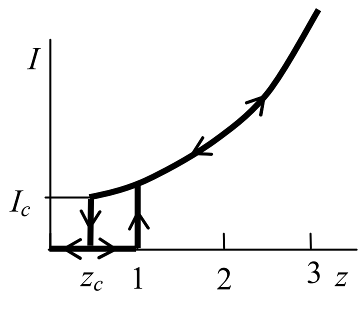
Kadangi $v_{0-}=0$, $t_- = \sqrt{2d/a_-} = \sqrt{(1+\eta^2)d/g}$. Diskeliui kylant aukštyn greitis prie viršutinės plokštelės lygus nuliui, todėl

$$v_{0+}+a_+t_+=0,\ t_+ = \sqrt{2d/(-a_+)} = \sqrt{(1+\eta^2)d/\eta^2 g}.$$

Taigi, vidutinis srovės stipris

$$I_c = 2q/(t_+ + t_-) = 2\eta g\sqrt{m\chi(1-\eta^2)}/[(1+\eta)(1+\eta^2)].$$

Nubrėžiame srovės stiprio priklausomybės nuo $z=V/V_0$ grafiką.



## 2 teorinė užduotis. Kylantis balionas

Guminis balionas užpildytas heliu kyla aukštai į orą, kur temperatūra ir slėgis su aukščiu mažėja. Laikykite, kad baliono forma išlieka sferinė nepriklausomai nuo balasto ir neatsižvelkite į apvalkalo ir balasto tūrį. Taip pat laikykite, kad helio temperatūra visada lygi aplinkinio oro temperatūrai, o visos dujos yra idealiosios. Dujų konstanta $R$=8,31 J/mol·K, helio ir oro molinės masės atitinkamai $M_{He}$=4,00·10$^{-3}$ kg/mol ir $M_o$=28,9·10$^{-3}$ kg/mol, laisvojo kritimo pagreitis $g$=9,8 m/s$^2$.

**[A dalis]**

(a) [1,5 taško]. Tegu išorinio oro slėgis yra $P$, o temperatūra $T$. Slėgis baliono viduje yra didesnis dėl baliono apvalkalo įtempimo. Balione yra $n$ molių helio, o slėgis $P+\Delta P$. Raskite veikiančią balioną keliamąją jėgą $F_B$ kaip $P$ ir $\Delta P$ funkciją.

(b) [2 taškai]. Vieną saulėtą vasaros dieną Korėjoje oro temperatūra $T$ nuo aukščio $z$ virš jūros lygio priklausė taip: $T(z) = T_0(1 - z/z_0)$, čia $T_0$=303 K, $z_0$=49 km, o 0< $z$ <15 km. Oro slėgis ir tankis jūros lygyje buvo $P_0$=1,01·10$^5$ Pa ir $\rho_0$=1,16 kg/m$^3$. Pateiktame aukščių intervale slėgis išreškiamas formule $P(z) = P_0(1 - z/z_0)^{\eta}$. Išreikškite $\eta$ per $z$, $P_0$, $\rho_0$ ir $g$ ir nustatykite jo skaitinę vertę dviejų ženklų tikslumu. Laikykite, kad laisvojo kritimo pagreitis nuo aukščio nepriklauso.

**[B dalis]**

Kai sferinės formos guminis balionas, kurio spindulys be įtempimo yra $r_0$, pripučiamas iki spindulio $r>r_0$, baliono apvalkalas dėl įtempimo įgyja papildomos tamprumo energijos. Pagal supaprastintą teoriją esant pastoviai temperatūrai tamprumo energija gali būti išreikšta taip: $U = 4\pi r_0^2 \kappa RT(2\lambda^2 + 1/\lambda^4 - 3)$, čia $\lambda$= $r/r_0$ (>1) yra pripūtimo santykis, o $\kappa$ – konstanta, kurios dimensija mol/m$^2$.

(c) [2 taškai]. Išreikškite $\Delta P$ per $U$ išraiškoje panaudotus parametrus ir pateikite $\Delta P$ kaip $\lambda$= $r/r_0$ funkciją.

(d) [1,5 taško]. Konstanta $\kappa$ gali būti nustatyta iš dujų kiekio, reikalingo balionui pripūsti. Esant $T_0$=303 K ir $P_0$=1,01·10$^5$ Pa neištemptame balione ($\lambda$=1) yra $n_0$=12,5 molių helio. Reikia iš viso $n$=3,6 $n_0$=45 molių helio balionui pripūsti iki $\lambda$=1,5 esant tai pačiai $T_0$ ir $P_0$. išreikškite baliono parametrą $a=\kappa/\kappa_0$ per $n$, $n_0$ ir $\lambda$, čia $\kappa_0 = r_0 P_0 / 4RT_0$. Apskaičiuokite $a$ dviejų ženklų tikslumu.

**[C dalis]**

Balionas jūros lygyje pripūstas iki $\lambda$=1,5 panaudojus $n$=3,6 $n_0$=45 molių helio esant $T_0$=303 K temperatūrai ir $P_0$=1,01·10$^5$ Pa slėgiui. Visa baliono masė (helio, apvalkalo ir balasto) yra $m_T$=1,12 kg. Balionas paleistas kilti nuo jūros lygio.

(e) [3 taškai]. Leiskim, kad balionas nustojo kilti pasiekęs $z_j$ aukštį, kai keliamąją jėgą atsvėrė sunkio jėga. Raskite $z_j$ ir pripūtimo santykį $\lambda_j$ tame aukštyje. Atsakymą pateikite dviejų ženklų tikslumu. Laikykite, kad dujų kiekis balione kylant nekito.

## Sprendimas

### [A dalis]

(a). Iš idealiųjų dujų lygties $n$ molių helio tūris esant temperatūrai $T$ ir slėgiui $P+\Delta P$ yra $V = nRT/(P+\Delta P)$, o $n'$ molių oro tūris esant temperatūrai $T$ ir slėgiui $P$ yra $V' = n'RT/P$. Taigi, balionas išstumia $n'=nP/(P+\Delta P)$ molių oro, kurio sunkis yra $M_o n' g$. Tas sunkis ir yra keliamoji jėga, t.y., $F_B= M_o g\, nP/(P+\Delta P)$.

(b). Kai oro tankis $\rho$ kinta priklausomai nuo aukščio $z$, iš idealių dujų būvio lygties gauname slėgio pokytį:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{\rho_0 T_0 P}{T P_0} g\,.$$

Įstatę $T = T_0(1 - z/z_0)$ ir $P = P_0(1 - z/z_0)^{\eta}$, gauname

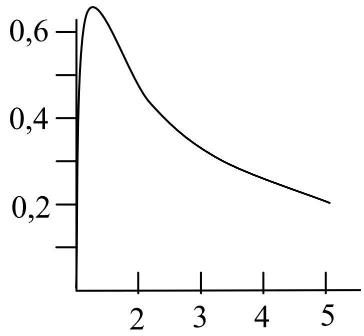
$$\frac{dP}{dz} = -\rho_0 g (1 - z/z_0)^{\eta-1},\ \ P = \frac{\rho_0 g z_0}{\eta}(1 - z/z_0)^{\eta},\ \ \eta = \frac{\rho_0 g z_0}{P_0},\ \ \eta = 5{,}5.$$

**[B dalis]**

(c). Darbas, atliekamas padidinant baliono spindulį nuo $r$ iki $r+dr$ esant slėgio skirtumui $\Delta P$ yra lygus $dW = 4\pi r^2 \Delta P dr$, o tamprumo energija padidėja dydžiu $dW = (dU/dr)dr = 4\pi\kappa RT(4r - 4r_0^4/r^5)dr$. Sulyginę gautas išraiškas, gauname

$\Delta P = 4\kappa RT(1/r - r_0^4/r^7) = 4\kappa RT(1/\lambda - 1/\lambda^7)/r_0$.

$\Delta P$ kaip $\lambda$>1 funkcijos grafikas pradžioje staigiai didėja, pasiekia maksimumą taške $\lambda=7^{1/6}$=1,38, o toliau mažėja, didelėms $\lambda$ vertėms kaip $\lambda^{-1}$. Pateiktame grafike horizontaliai atidėta $\lambda$, vertikaliai $\Delta P/(4\kappa RT/r_0)$.




(d). Pagal idealiųjų dujų būsenos lygtį $P_0\ V_0= n_0 R\ T_0$, čia $V_0$ yra neištenpto baliono tūris. Esant tūriui $V=\lambda^3 V_0$, temperatūrai $T_0$ ir molių skaičiui $n$ slėgis baliono viduje $P_{in} = nRT_0/V = nP_0/(n_0\lambda^3)$. Iš kitos pusės,

$P_{in} = P_0 + \Delta P = P_0 + 4\kappa PT_0(1/\lambda - 1/\lambda^7)/r_0 = [1 + a(1/\lambda - 1/\lambda^7)]P_0$.

Sulyginę pateiktas išraiškas, gauname $a$:

$$a = \frac{n/(n_0\lambda^3) - 1}{\lambda^{-1} - \lambda^{-7}}.$$

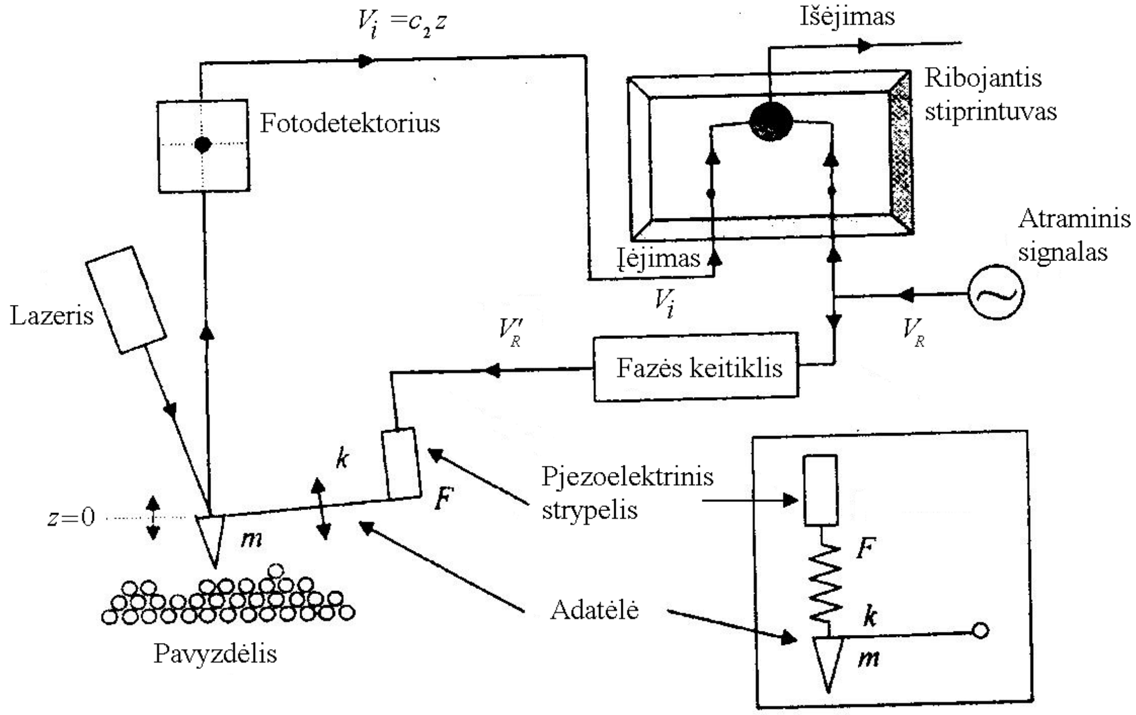
Imdami $n/n_0$=3,6 ir $\lambda$=1,5 gauname $a$=0,110.

**[C dalis]**

(e). Keliamoji jėga, nustatyta dalyje (a), turi atsverti visą baliono masę atitinkančią sunkio jėgą, t.y., $m_T$ =1,12 kg. Iš (a) dalies turime $F_B= M_o g\ nP/(P+\Delta P)=m_T g$. Iš jos gauname: $P/(P+\Delta P) = m_T/(M_0 n)$. Taikydami idealiųjų dujų būsenos lygtį heliui balione ir imdami $V = \lambda^3 V_0$ gauname $(P+\Delta P)\lambda^3 = nRT/V_0 = P_0 Tn/(T_0 n_0)$. Pateiktos lygtys susieja nežinomuosius $P$, $\Delta P$ ir $\lambda$ su kitais parametrais. Panaudoję dar B dalyje gautą išraišką $\Delta P = 4\kappa RT(1/\lambda - 1/\lambda^7)/r_0$, parašome lygtį parametrui $\lambda$: $\lambda^2 - \lambda^{-4} = (n - m_T/M_o)/(an_0)$. Įstatę skaitines vertes, gauname $\lambda^2 - \lambda^{-4} = 4{,}54$. Išmetę $\lambda^{-4}$ kaip mažą dydį, gauname ieškomąjį pripūtimo parametrą $\lambda_j$=2,1. Tada $\lambda^{-4}$=0,048, t.y., sprendžiant dviejų ženklų tikslumu tas narys nereikšmingas. Toliau panaudoję išraiškas $P/(P+\Delta P) = m_T/(M_0 n)$ ir $(P+\Delta P)\lambda^3 = P_0 Tn/(T_0 n_0)$, gauname $PT_0\lambda^3/(P_0 T) = m_T/(M_o n_0)$. Išreiškę $P$ ir $T$ per $z$ gauname lygtį aukščiui $z_j$: $(1 - z_j/z_0)^{\eta-1} = m_T/(M_o n_0 \lambda_j^3)$. Tos lygties sprendinys $z_j = z_0\{1 - [m_T/(M_o n_0\lambda_j^3)]^{1-\eta}\}$. Imdami skaitines parametrų vertes, gauname $z_j$=11 km.

## 3 teorinė užduotis. Atominis zonduojantis mikroskopas

Atominis zonduojantis mikroskopas yra galinga priemonė nano struktūrų moksle. Adatėlės judėjimas atominiame zonduojančiame mikroskope nustatomas fotodetektoriumi, reaguojančiu į atspindėtą lazerio spindulį, kaip parodyta 3.1 pav.




3.1 pav. Zonduojančio mikroskopo schematinė diagrama. Dešiniame apatiniame kampe pateikta supaprastinto mechaninio modelio schema, vaizduojanti adatėlės jungimą su pjezoelektriniu strypeliu.

Adatėlė gali judėti tik vertikalia kryptimi, o jos padėtis kaip laiko $t$ funkcija $z$ aprašoma lygtimi

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + kz = F\,, \qquad (3.1)$$

čia $m$ – adatėlės masė, $k=m\omega_0^2$ – adatėlės spyruoklės tamprumo koeficientas, $b$ – mažas slopinimo koeficientas, patenkinantis sąlygą $\omega_0>>(b/m)>0$, o $F$ – išorinė veikiančioji jėga, sukuriama pjezoelektrinio strypelio.

**[A dalis]**

(a) [1,5 taško]. Kai $F = F_0 \sin\omega t$, lygties (3.1) sprendinys yra $z(t) = A\sin(\omega t - \phi)$, čia $A>0$, o $0\le\phi\le\pi$. Raskite amplitudės $A$ ir tg$\phi$ išraiškas per $F_0$, $m$, $\omega$, $\omega_0$ ir $b$. Nustatykite $A$ ir $\phi$ rezonansiniam dažniui $\omega=\omega_0$.

(b) [1 taškas]. Ribojantis stiprintuvas 3.1 pav. padaugina įėjimo signalą iš ribojančiojo atraminio signalo $V_R = V_{R0}\sin\omega t$, o tada praleidžia *tik* sudauginto signalo dc (dirct current, t.y., nuolatinė srovė) dedamąją . Laikykite, kad įėjimo signalas yra $V_i = V_{i0}\sin(\omega_i t - \phi_i)$, čia $V_{R0}$, $V_{i0}$, $\omega_i$ ir $\phi_i$ – duotos teigiamos konstantos. Raskite $\omega>0$, kuriam neišnyksta išėjimo signalas. Kokia yra neišnykstančio išėjimo signalo dydžio išraiška tam dažniui?

(c) [1,5 taško]. Praėjusi pro fazės keitiklį atraminio signalo įtampa $V_R = V_{R0}\sin\omega t$ pakinta į $V_R' = V_{R0}\sin(\omega t + \pi/2)$. Prijungta prie pjezoelektrinio strypelio įtampa $V'_R$ veikia adatėlę jėga $F=c_1 V'_R$. Fotodetektorius paverčia adatėlės padėtį $z$ įtampa $V_i=c_2z$, čia $c_1$ ir $c_2$ – konstantos. Raskite *išėjimo signalo dc* didumo išraišką esant $\omega=\omega_0$.

(d) [2 taškai]. Nedidelis adatėlės masės pokytis $\Delta m$ pakeičia rezonansinį dažnį dydžiu $\Delta\omega$, todėl pradinio dažnio $\omega_0$ fazė $\phi$ pakinta dydžiu $\Delta\phi$. Raskite masės pokytį $\Delta m$, sukeliantį fazės pokytį

$\Delta\phi=\pi/1800$, kas yra tipinė fazės matavimų skiriamoji geba. Adatėlės parametrai tokie: $m=1{,}0\cdot10^{-12}$ kg, $k=1{,}0$ N/m, $(b/m)=1{,}0\cdot10^{3}$ s$^{-1}$. Galite naudoti apytiksles formules $(1+x)^a=1+ax$ ir $\mathrm{tg}(\pi/2+x)=-1/x$, kai $|x|<<1$.

**[B dalis]**

Toliau laikome, kad be A dalyje nurodytų jėgų adatėlę veikia papildomos jėgos, susietos su pavyzdėliu, pateiktu 3.1 pav.

(e) [1,5 taško]. Laikant, kad papildoma jėga $f(h)$ priklauso tik nuo atstumo tarp adatėlės ir pavyzdėlio paviršiaus $h$ galima rasti naują adatėlės pusiausvyros padėtį $h_0$. Kai $h$ artimas $h_0$, galima rašyti $f(h)\approx f(h_0)+c_3(h-h_0)$, čia $c_3$ nepriklauso nuo $h$. Išreikškite naują rezonansinį dažnį $\omega'_0$ per $\omega_0$, $m$ ir $c_3$.

(f) [2,5 taško]. Kai paviršius skenuojamas judinant pavyzdėlį horizontalia adatėlės galiukas, turintis elektros krūvį $Q=6e$, sąveikoja su nejudančiu elektronu, kurio krūvis $q=e$, lokalizuotu po pavyzdėlio paviršiumi tam tikru atstumu. Skenuojant arti elektrono didžiausias rezonansinio dažnio pokytis $\Delta\omega_0$ $(=\omega'_0-\omega_0)$ yra daug mažesnis už $\omega_0$. Išreikškite atstumą $d_0$ tarp adatėlės ir lokalizuoto elektrono esant maksimaliai nuokrypai per $m$, $q$, $Q$, $\omega_0$, $\Delta\omega_0$ ir elektrostatinę konstantą $k_e$. Apskaičiuokite $d_0$ (nm) esant $\Delta\omega_0=20$ s$^{-1}$.

Adatėlės parametrai tokie: $m=1{,}0\cdot10^{-12}$ kg, $k=1{,}0$ N/m. Neatsižvelkite į jokius poliarizacinius efektus nei adatėlėje, nei pavyzdėlyje.

$k_e=1/4\pi\varepsilon_0=9{,}0\cdot10^{9}$ N·m$^2$/C$^2$, $e=-1{,}6\cdot10^{-19}$ C.

## Sprendimas

**[A dalis]**

(a). Įrašę į lygtį funkciją $z(t)=A\sin(\omega t-\phi)$ ir $F=F_0\sin\omega t$, gauname

$$-m\omega^2\sin(\omega t-\phi)+b\omega\cos(\omega t-\phi)+m\omega_0^2\sin(\omega t-\phi)=(F_0/A)\sin\omega t .$$

Surinkus narius prie $\sin\omega t$ ir $\cos\omega t$ ir kiekvieną jų prilyginus nuliui gaunama

$$\mathrm{tg}\phi=b\omega/[m(\omega_0^2-\omega^2)],\quad A=F_0/\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2} .$$

Kai $\omega=\omega_0$ gauname $A=F_0/b\omega_0$, $\phi=\pi/2$.

(b). Sudaugintas signalas yra

$$V_{i0}\sin(\omega_i t-\phi_i)V_{k0}\sin\omega t=\frac{1}{2}V_{i0}V_{k0}[\cos\{(\omega_i-\omega)t-\phi_i\}-\cos\{(\omega_i+\omega)t-\phi_i\}] .$$

Neišnykstanti dc (nuolatinės elektros srovės dedamoji) egzistuoja tik esant $\omega=\omega_i$, tokio signalo didumas yra $(V_{I0}\ V_{R0}\cos\phi)/2$.

(c). Kadangi ribojantis stiprintuvas matuoja tik tokį signalą, kurio dažnis lygus atraminio signalo dažniui, pjezoelektrinio strypelio svyravimų dažnis, adatėlės svyravimų dažnis ir fotodetektoriaus dažnis turi būti toks pat. Įėjimo signalo didumas esant rezonansui yra

$$V_{i0}=c_2F_0/(b\omega_0)=c_1c_2V_{R0}/(b\omega_0) .$$

Kadangi esant rezonansui įeinančio signalo fazė $(-\pi/2\ +\pi/2)=0$, $\phi_i=0$, ribojančio stiprintuvo signalas yra

$$(V_{i0}V_{R0}\cos 0)/2=c_2F_0/(b\omega_0)=c_1c_2V_{R0}^2/(2b\omega_0).$$

(d). Pradinis rezonansinis dažnis $\omega_0=\sqrt{k/m}$ pakinta į

$$\sqrt{\frac{k}{m+\Delta m}}=\sqrt{\frac{k}{m}}\left(1+\frac{\Delta m}{m}\right)^{-1/2}=\omega_0\left(1-\frac{\Delta m}{2m}\right).$$

Taigi, $\Delta\omega=-\omega_0\Delta m/2m$. Arti rezonanso pakeisdami $\phi\rightarrow\pi/2+\Delta\phi$ ir $\omega_0\rightarrow\omega_0+\Delta\omega_0$ gauname

$$\mathrm{tg}(\pi/2+\Delta\phi)=-1/\mathrm{tg}\Delta\phi=b/(2m\Delta\omega_0),\ \text{ t.y., }\ \Delta\phi\approx\mathrm{tg}\Delta\phi=-2m\Delta\omega_0/b .$$

Per $\Delta\phi$ išreiškiame $\Delta m$: $\Delta m=b\Delta\phi/\omega_0$, $\Delta m=1{,}7\cdot10^{-13}$ kg.

**[B dalis]**

(e). Esant sąveikai svyravimų lygtis tampa tokia:

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+b\frac{dz}{dt}+kz-c_1z=F_0\sin\omega t,$$

čia $f(h)\approx f(h_0)+c_3(h-h_0)$, bet $z=h-h_0$ yra nuokrypa nuo naujos pusiausvyros padėties $h_0$. Pastovusis $f(h_0)$ narys susiprastina imant naują pusiausvyros padėtį. Taigi, ankstesnį rezonansinį dažnį $\omega_0=\sqrt{k/m}$ reikia pakeisti į

$$\omega'_0=\sqrt{(k-c_3)/m}=\sqrt{(m\omega_0^2-c_3)/m}=\omega_0\sqrt{1-c_3/(m\omega_0^2)}.$$

Taigi, rezonansinio dažnio pokytis

$$\Delta\omega_0=\omega_0\left[\sqrt{1-c_3/(m\omega_0^2)}-1\right].$$

(f). Didžiausia nuokrypa susidaro kai adatėlė yra tiksliai virš krūvio $q$, tada susidaro sąveikos jėga $f(h)=k_eqQ/h^2$.

Iš čia

$$c_3=\left.\frac{df}{dh}\right|_{h=d_0}=-2k_e\frac{qQ}{d_0^3}.$$

Kadangi $\omega_0>>\Delta\omega_0$, apytiksliai iš $\Delta\omega_0$ išraiškos gauname $\Delta\omega_0\approx-c_3/(2m\omega_0)$. Įstatę $c_3$ gauname

$$\Delta\omega_0=-\frac{1}{2m\omega_0}\left(-2k_e\frac{qQ}{d_0^3}\right)=k_e\frac{qQ}{m\omega_0d_0^3}.$$

Iš gautos formulės išreiškiame $d_0$ ir apskaičiuojame jo vertę:

$$d_0=\left(k_e\frac{qQ}{m\omega_0\Delta\omega_0}\right)^{1/3},\quad d_0=4{,}1\cdot10^{-8}\ \text{m}=41\,\text{nm}.$$

## Eksperimentinė užduotis. Mechaninė „juodoji dėžė“

**Įranga**

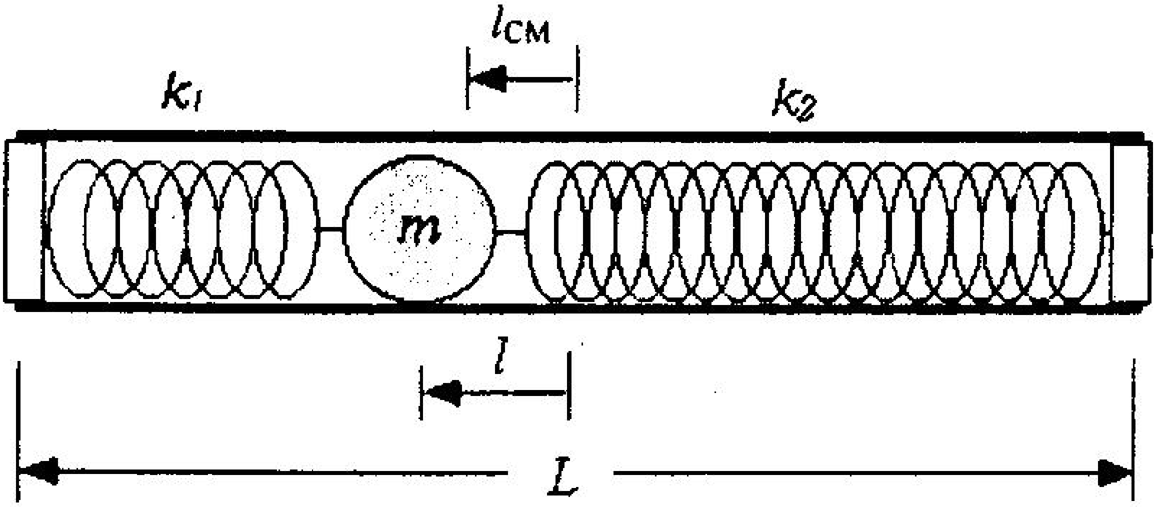
| | | | |
|---|---|---|---|
| A | Fotovartų laikrodis | L | Atsuktuvas |
| B | Fotovartai | M | Pasvarėlis su kilpele |
| C | Jungiamieji laidai | N | Svarstyklės |
| D | Mechaninė „juodoji dėžė“ | O | Stovas su skale |
| E | Besisukantis stovas | P | U formos atrama |
| F | Guminis padėklas | Q | C formos laikiklis |
| G | 2 skriemuliai | | 0,5 m ir 0,15 m ilgio liniuotės |
| H | 2 strypeliai | | Slankmatis |
| I | U formos plokštelė | | Žirklės |
| J | 2 varžtai | | Siūlai |
| K | Veržliaraktis | | Atsarginės priemonės |

Fotovartus sudaro infraraudonas lazeris ir jutiklis, laikrodis leidžia matuoti laiko intervalą tarp dviejų momentų, kurių metu į jutiklį nepatenka lazerio spindulys.

**Užduotis: nustatykite rutuliuko masę ir spyruoklių tamprumo konstantas mechaninėje „juodojoje dėžėje“**

### Bendra informacija apie mechaninę „juodąją dėžę“

Mechaninę „juodąją dėžę“ (MJD) sudaro kietas rutuliukas, dviem spyruoklėm įtvirtintas




1 pav.

Mechaninė „juodoji dėžė“

vamzdelyje, kaip parodyta 1 pav. Spyruoklės yra vienodai susuktos iš tokios pat vielos, bet turi skirtingą vijų skaičių. Spyruoklių masių ir jų ilgių, kai jos neištemptos, nepaisykite. Vamzdelis yra homogeniškas, jo galai uždaryti vienodais kamščiais. Į vamzdelį įstatyta 5 mm ilgio kamščio dalis. Rutuliuko spindulys 11 mm, vamzdelio vidinis skersmuo 23 mm. Laisvojo kritimo pagreitis 9,8 m/s$^2$. tarp rutuliuko ir vamzdelio sienelių yra trintis.

Darbo užduotis – nustatyti rutuliuko masę $m$ ir spyruoklių tamprumo $k_1$ ir $k_2$ koeficientus neatidarant vamzdelio. $l$ yra atstumas tarp vamzdelio vidurio ir rutuliuko centro kai rutuliukas pusiausvyras, o trinties nėra.

**Naudojami žymėjimai.**

Rutuliuko masė $m$.

Rutuliuko spindulys $r$=11 mm.

MJD masė išskyrus rutuliuką $M$.

MJD ilgis $L$.

Į MJD įstatyto kamščio vidinės dalies ilgis $\delta$=5 mm.

Atstumas nuo MJD masės centro iki vamzdelio vidurio $l_{cm}$.

Atstumas nuo rutuliuko centro iki vamzdelio vidurio $l$ arba $x$ (kai MJD vertikali).

Laisvojo kritimo pagreitis $g$=9,8 m/s$^2$.
Pasvarėlio masė $m_0$.
Pasvarėlio greitis $v$.
Pasvarėlio leidimosi aukštis $h$.
Besisukančio stovo ritinėlio siūlui apvynioti spindulys $R$.
Inercijos momentai $I$, $I_0$, $I_1$, $I_2$, ir kt.
Kampiniai greičiai $\omega$, $\omega_0$, $\omega_1$, ir kt.
Svyravimo periodai $T_1$, $T_2$.
Spyruoklių tamprumo koeficientai $k$, $k_1$, $k_2$.
Spyruoklių vijų skaičiai $N_1$, $N_2$.

**A dalis [4 taškai]. Nustatyti rutuliuko atstumo nuo vamzdelio vidurio ir jo masės sandaugą *ml***

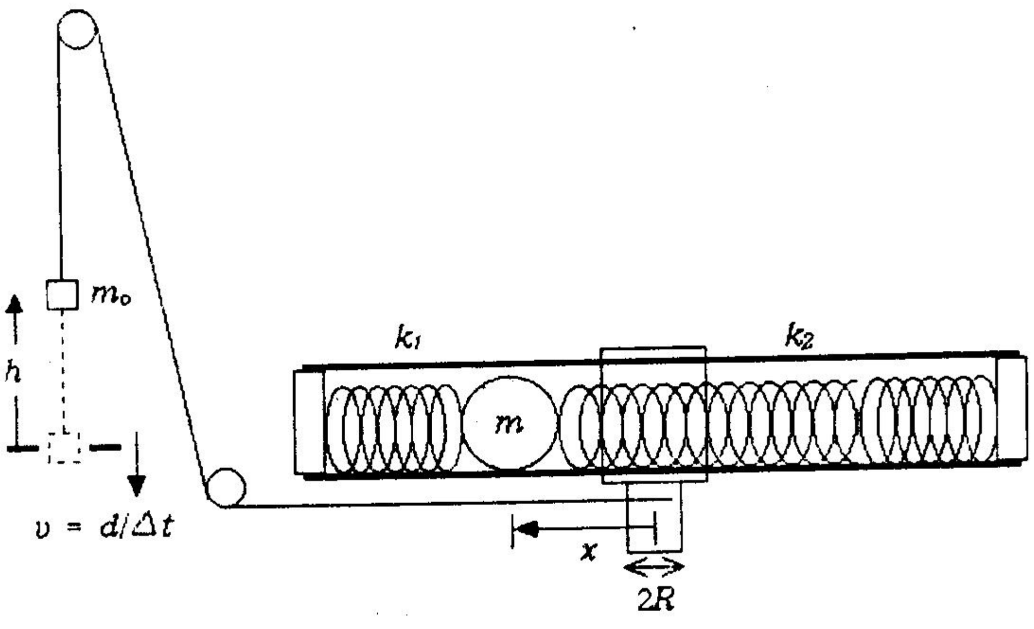
[2 taškai]. Pasiūlykit ir pagrįskit formulėmis būdą, leidžiantį nustatyti *ml.*

[2 taškai].Eksperimentiškai nustatykite *ml*.

**B dalis [10 taškų]. Rutuliuko masė**

2 pav. Pateikta eksperimento schema. MJD pritvirtinta horizontaliai ant besisukančio stovo, o pasvarėlis pritvirtintas prie siūlo, kurio kitas galas užvyniotas ant stovo besisukančio ritinio. Pasvarėliui leidžiantis siūlas nusivynioja ir MJD sukasi. Panaudojant tą sukimąsi aprašančias lygtis ir A dalies rezultatus galima gauti rutuliuko masę apibrėžiančias lygtis. Tarp rutuliuko ir vamzdelio sienelių yra trintis. Trinties ir rutuliuko slydimo pasireiškimo mechanizmas besisukant MJD yra sudėtingas. Supaprastinimui galima neatsižvelgti į energijos nuostolius dėl judėjimo trinties.

1. [4 taškai]. Išmatuokite pasvarėlio greitį esant skirtingiems jo pakėlimo aukščiams $h$. Rekomenduojama matuoti greitį nuo $h$=1 cm iki 40 cm kas 1– 2 cm. Duomenis pavaizduokite grafiškai parinkę tinkamą pavidalą masei $m$ nustatyti. Suradę $v$ ir $h$ sąryšį, jei reikia, atlikite kelis papildomus matavimus. Kai MJD sukasi lėtai, rutuliukas dėl trinties nepasislenka iš statinės pusiausvyros padėties dėl trinties tarp rutuliuko ir vamzdelio sienelių. Kai MJD sukasi pakankamai greitai, rutuliukas atsiremia į kamštį, nes spyruoklės silpnos. Grafike nustatykite lėto ir greito sukimosi sritis.



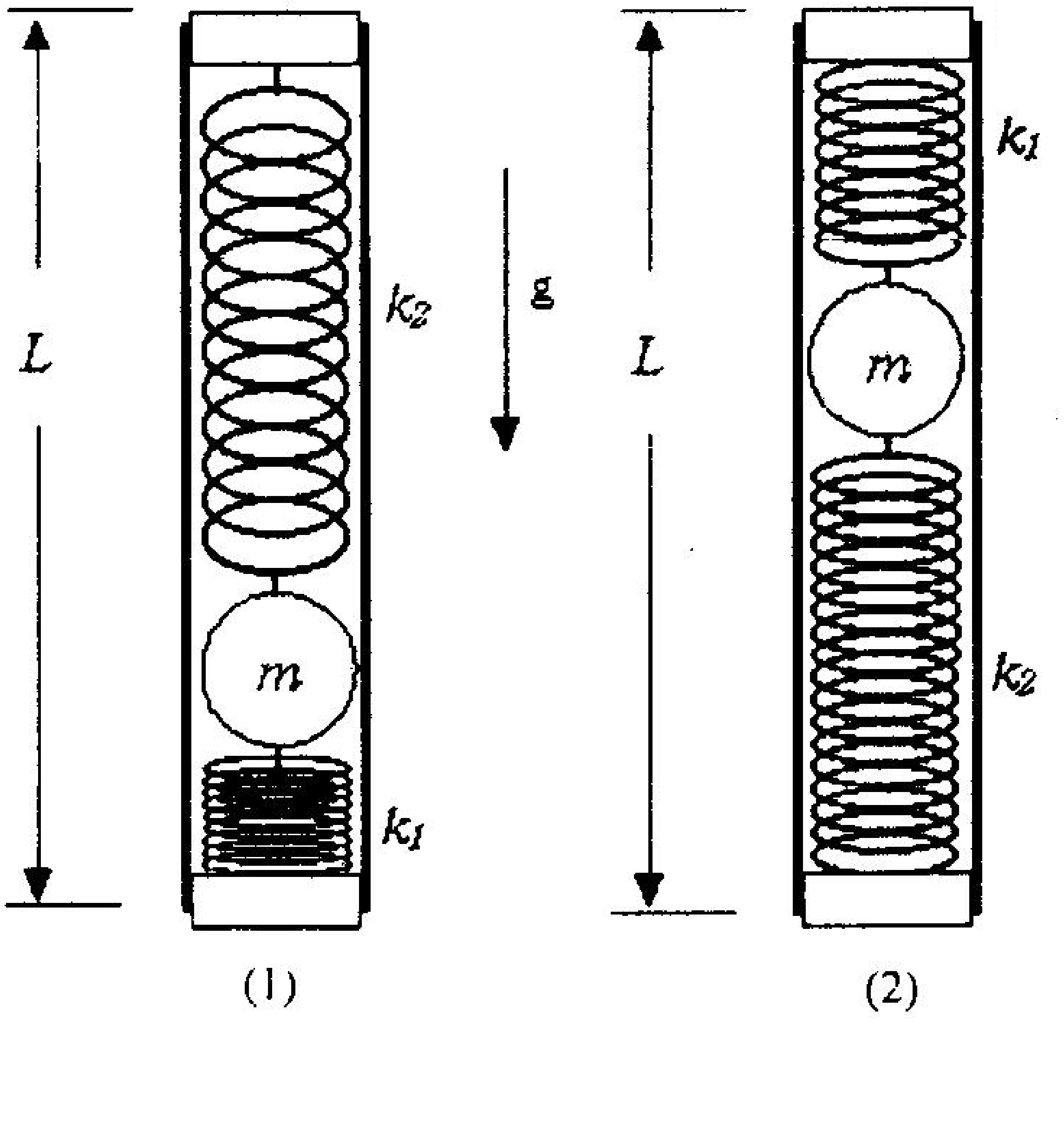

2 pav. Mechaninės „juodosios dėžės“ sukimasis. Sukimosi kampinis greitis gali būti gautas iš greičio $v$, kuriuo pasvarėlis praeina pro fotovartus. $x$ yra rutuliuko atstumas nuo sukimosi ašies, $d$ yra pasvarėlio ilgis.

2. [1 taškas]. Iš savo matavimo duomenų nustatykite, kad $v^2$ proporcinga $h$ ($h = Cv^2$) lėto sukimosi srityje ir $h = AAv^2 + B$ greito sukimosi srityje.

3. [1 taškas]. Rutuliuko $r$ spindulio ir $m$ masės inercijos momentas einančios per centrą ašies atžvilgiu yra $2mr^2/5$. Rutuliukas yra atstumu $a$ nuo sukimosi ašies, jo inercijos momentas padidėja dydžiu $ma^2$. Pilnąjį visų besisukančių dalių išskyrus rutuliuką inercijos momentą žymėkite $I$. Susiekite koeficientą $C$ su MJD parametrais $m$, $l$, ir kt.
4. [1 taškas]. Susiekite koeficientus $A$ ir $B$ su MJD parametrais $m$, $l$, ir kt.
5. [3 taškai]. Iš matavimų ir A dalies rezultatų nustatykite $m$ vertę.

**C dalis [6 taškai]. Spyruoklių koeficientai $k_1$ ir $k_2$** Šioje dalyje turite atlikti mažų svyravimų eksperimentą naudodami MJD kaip fizinę svyruoklę. Kiekviename MJD gale yra po dvi mažas skylutes, į kurias įstatyti strypeliai tampa svyruoklės svyravimų ašimi, kuria svyruoklė atsiremia į U formos atramą, pritvirtintą prie stovo. Mažų svyravimų dažnis $\omega$=[jėgos momentas/(inercijos momentas× kampas)]$^{1/2}$, čia jėgos momentas ir inercijos momentas imami svyravimo ašies atžvilgiu. Kaip ir B dalyje išnagrinėkite dvi eksperimento sąlygas, pateiktas 3 pav., leidžiančias eliminuoti nežinomą MJD inercijos momentą $I_0$ be rutuliuko.

1. [1 taškas]. Išmatuokite dviejų pateiktų 3 pav. padėčių mažų svyravimų periodus $T_1$ ir $T_2$ ir užrašykite jų vertes.
2. [1 taškas]. Panaudodami lygtis paaiškinkite, kodėl dažniai $\omega_1$ ir $\omega_2$ yra skirtingi. Žymėkite MJD inercijos momentą be rutuliuko $I_0$, o $\Delta l$ rutuliuko atstumą nuo jo pusiausvyros padėties esant horizontaliai MJD.
3. [1 taškas]. Apskaičiuokite $\Delta l$ eliminuodami $I_0$ iš ankstesnių rezultatų.




(1) (2)

3 pav. Mechaninės „juodosios dėžės“ svyravimai. Dviejų pateiktų padėčių mažų svyravimų periodai $T_1$ ir $T_2$ gali būti išmatuoti panaudojant fotovartus. Eksperimentui naudojami du strypeliai ir U formos atrama.

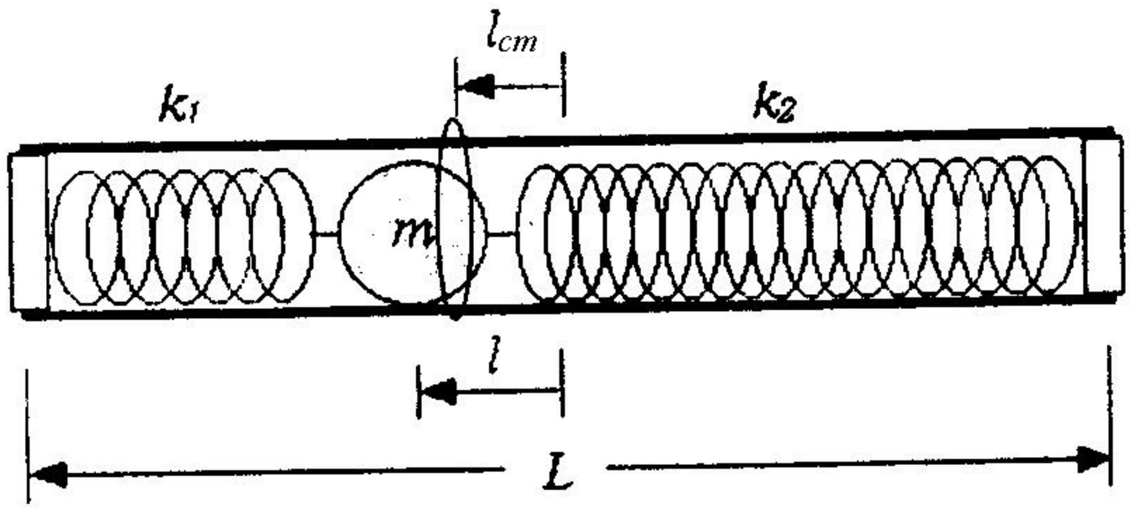
4. [2 taškai]. Derindami B dalies ir C dalies rezultatus nustatykite atstojamąjį dviejų spyruoklių sistemos tamprumo koeficientą $k$.
5. [1 taškas]. Apskaičiuokite vertes $k_1$ ir $k_2$.

## Sprendimas

### A dalis. Rutuliuko atstumo nuo vamzdelio vidurio ir jo masės sandauga *ml*

Aprišame MJD siūlu ir randame jos masės centro padėtį pagal tai, kad pakelta už siūlo MJD laikosi horizontaliai (A-1 pav). MJD masę be rutuliuko pažymėję $M$ rašome momentų pusiausvyros sąlygą= $Ml_{cm} = m(l - l_{cm}),\ \ ml = (M + m)l_{cm}$. Nustatome $l_{cm}$ bei MJD masę ir apskaičiuojame $ml$.

Eksperimento duomenys: $M+m$=(0,1411±0,00005) kg, $l_{cm}$=(2,1±0,06) cm, $ml$=(2,96±0,08)×10$^{-3}$ kg·m.



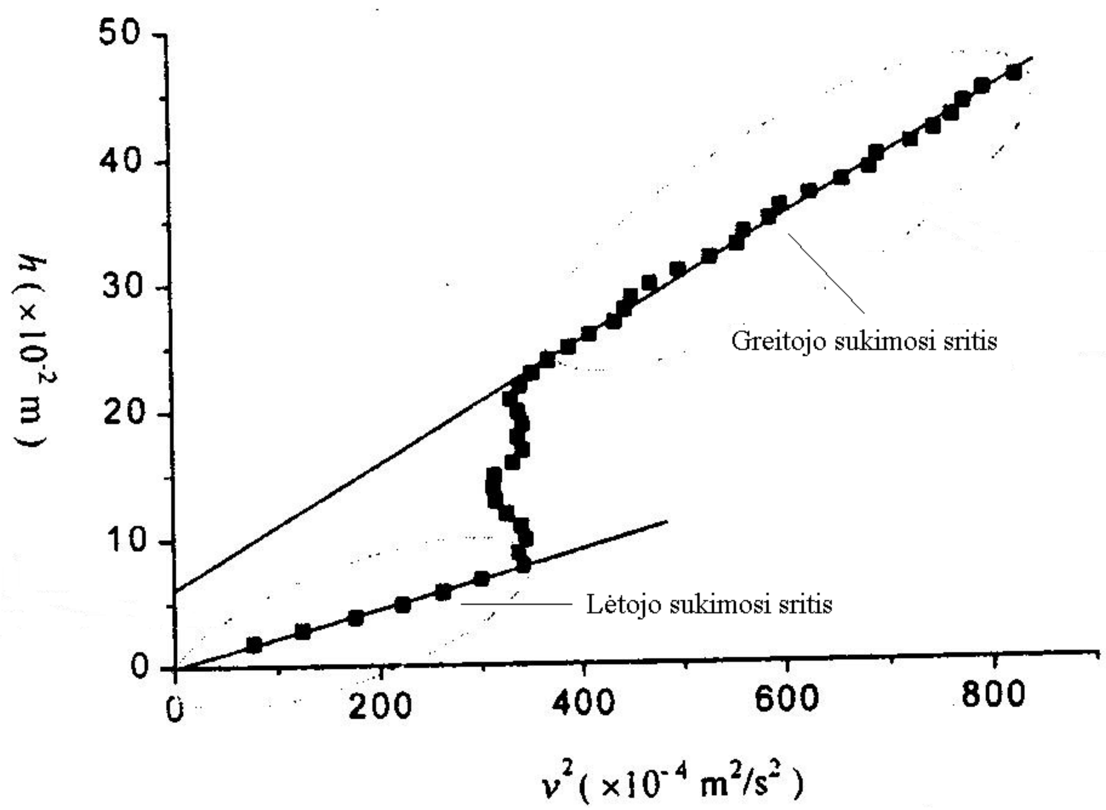

A-1 pav.

### B dalis. Rutuliuko masė

Surenkame sąlygoje pateiktą eksperimento įrangą, sukdami MJD suvyniojame ant ritinėlio tiek siūlo, kad pasvarėlis būtų reikiamame aukštyje $h$ virš fotovartų ir paleidžiame pasvarėlį kristi. Bandymą kartojame sąlygoje nurodytu būdu keisdami $h$. Duomenis rašome į lentelę. $h_1$ – skalės rodmuo ties pasvarėlio viršumi, $h=h_1- h_2+d/2$, $h_2$=(25±0,05) cm– skalės rodmuo ties fotovartais, $d$=(2,62±0,005) cm – pasvarėlio aukštis, $\Delta t$ – laikas, per kurį pasvarėlis praeina pro fotovartus, $v=d/\Delta t$.

| $h_1$, cm | $\Delta t$, ms | $h$, cm | $v$, cm/s | $v^2$, cm$^2$/s$^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 25,5 | 269,4 | 1,81 | 9,73 | 94,6 |
| 26,5 | 235,7 | 2,81 | 11,12 | 123,6 |
| 27,5 | 197,9 | 3,81 | 13,24 | 175,3 |
| 28,5 | 176 | 4,81 | 14,89 | 221,6 |
| 29,5 | 161,8 | 5,81 | 16,19 | 262,2 |
| 30,5 | 151,4 | 6,81 | 17,31 | 299,5 |
| 31,5 | 141,8 | 7,81 | 18,48 | 341,4 |
| 32,5 | 142,9 | 8,81 | 18,33 | 336,2 |
| 33,5 | 141,4 | 9,81 | 18,53 | 343,3 |
| 34,5 | 142,2 | 10,81 | 18,42 | 339,5 |
| 35,5 | 145,4 | 11,81 | 18,02 | 324,7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 36,5 | 147,8 | 12,81 | 17,73 | 314,2 |
| 37,5 | 148,3 | 13,81 | 17,67 | 312,1 |
| 38,5 | 148 | 14,81 | 17,70 | 313,4 |
| 39,5 | 143,9 | 15,81 | 18,21 | 331,5 |
| 40,5 | 141,9 | 16,81 | 18,46 | 340,9 |
| 41,5 | 142,9 | 17,81 | 18,33 | 336,2 |
| 42,5 | 141,9 | 18,81 | 18,46 | 340,9 |
| 43,5 | 142,8 | 19,81 | 18,35 | 336,6 |
| 44,5 | 144,3 | 20,81 | 18,16 | 329,7 |
| 45,5 | 142,2 | 21,81 | 18,42 | 339,5 |
| 46,5 | 139,8 | 22,81 | 18,74 | 351,2 |
| 47,5 | 136,7 | 23,81 | 19,17 | 367,3 |
| 48,5 | 133 | 24,81 | 19,70 | 388,1 |
| 49,5 | 129,5 | 25,81 | 20,23 | 409,3 |
| 50,5 | 125,7 | 26,81 | 20,84 | 434,4 |
| 51,5 | 124,3 | 27,81 | 21,08 | 444,3 |
| 52,5 | 123,4 | 28,81 | 21,23 | 450,8 |
| 53,5 | 120,9 | 29,81 | 21,67 | 469,6 |
| 54,5 | 117,5 | 30,81 | 22,30 | 497,2 |
| 55,5 | 114 | 31,81 | 22,98 | 528,2 |
| 56,5 | 111,2 | 32,81 | 23,56 | 555,1 |
| 57,5 | 110,5 | 33,81 | 23,71 | 562,2 |
| 58,5 | 108,1 | 34,81 | 24,24 | 587,4 |
| 59,5 | 107,1 | 35,81 | 24,46 | 598,4 |
| 60,5 | 104,6 | 36,81 | 25,05 | 627,4 |
| 61,5 | 102,1 | 37,81 | 25,66 | 658,5 |
| 62,5 | 100,1 | 38,81 | 26,17 | 685,1 |
| 63,5 | 99,6 | 39,81 | 26,31 | 692,0 |




B-1 pav.

Pagal gautus rezultatus nubraižome grafiką (B-1 pav.). Grafike per iš eksperimento duomenų apskaičiuotus taškus nubrėžtos dvi tiesės, atitinkančios lėtojo ir greitojo MJD sukimosi sritis. Iš grafiko randame parametrus *C* (lėtojo sukimosi srities tiesės krypties
koeficientas), *A* (greitojo sukimosi srities tiesės krypties koeficientas) ir *B* (greitojo sukimosi srities tiesės *h* ašyje atkertamos atkarpos ilgis). Panaudodami energijos tvermės dėsnį lėtojo sukimosi sričiai gauname: $m_0gh = \frac{m_0v^2}{2} + \left[I + m\left(2r^2/5 + l^2\right)\right]v^2/2R^2$, čia $I$ – visų besisukančių įrangos dalių, išskyrus rutuliuką, inercijos momentas. Palyginę gautąją išraišką su sąlygoje pateiktu sąryšiu, gauname:

$$C = \left[m_0R^2 + I + m\left(2r^2/5 + l^2\right)\right]/(2m_0gR^2).$$

Spyruoklių įtempimo jėgos yra nedidelės, ir greitojo sukimosi srityje rutuliukas pasislenka iki vamzdelio galo ir atsiremia į kamštį. Todėl energijos išraiškoje atsiranda ir spyruoklių tamprios deformacijos energiją atitinkantis narys. Kaip nurodyta sąlygoje, neištemptų spyruoklių ilgio nepaisome, todėl tamprumo energijos pokyčio išraiška tokia:

$$\Delta E = \{-k_1(l - r - \delta)^2 + k_2[(L - 2r - 2\delta)^2 - (L/2 + l - r - \delta)^2]\}/2.$$

Tada iš energijos tvermės dėsnio gauname:

$$m_0gh = \frac{m_0v^2}{2} + \left\{I + m\left[2r^2/5 + (L/2 - r - \delta)^2\right]\right\}v^2/(2R^2) + \{-k_1(l - r - \delta)^2 +$$
$$+ k_2[(L - 2r - 2\delta)^2 - (L/2 + l - r - \delta)^2]\}/2, \text{ t.y.,}$$
$$A = \left\{m_0R^2 + I + m\left[2r^2/5 + (L/2 - r - \delta)^2\right]\right\}/(2m_0gR^2),$$
$$B = \{-k_1(l - r - \delta)^2 + k_2[(L - 2r - 2\delta)^2 - (L/2 + l - r - \delta)^2]\}/(2m_0g)$$
$$A - C = m\left[(L/2 - r - \delta)^2 - l^2\right]/(2m_0gR^2).$$

Panaudodami A dalyje nustatytą *ml* sandaugos vertę, gauname lygtį rutuliuko masei *m*:

$$m^2(L/2 - r - \delta)^2 - m(A - C)2m_0gR^2 - (ml)^2 = 0.$$

Iš B-1 pav. nustatome tiesių krypties koeficientus $A$=(5,0±0,1) s$^2$/m, $C$=(2,4±0,1) s$^2$/m. Įstate tas vertes (bei kitų parametrų vertes) į pastarąją lygtį, o taip pat *ml* sandaugos vertę, gauname:

$$338{,}6m^2 - 19550m - 87620 = 0,$$

Čia *m* išreiškiama gramais. Lygties teigiamoji šaknis *m*=(62±2) g.

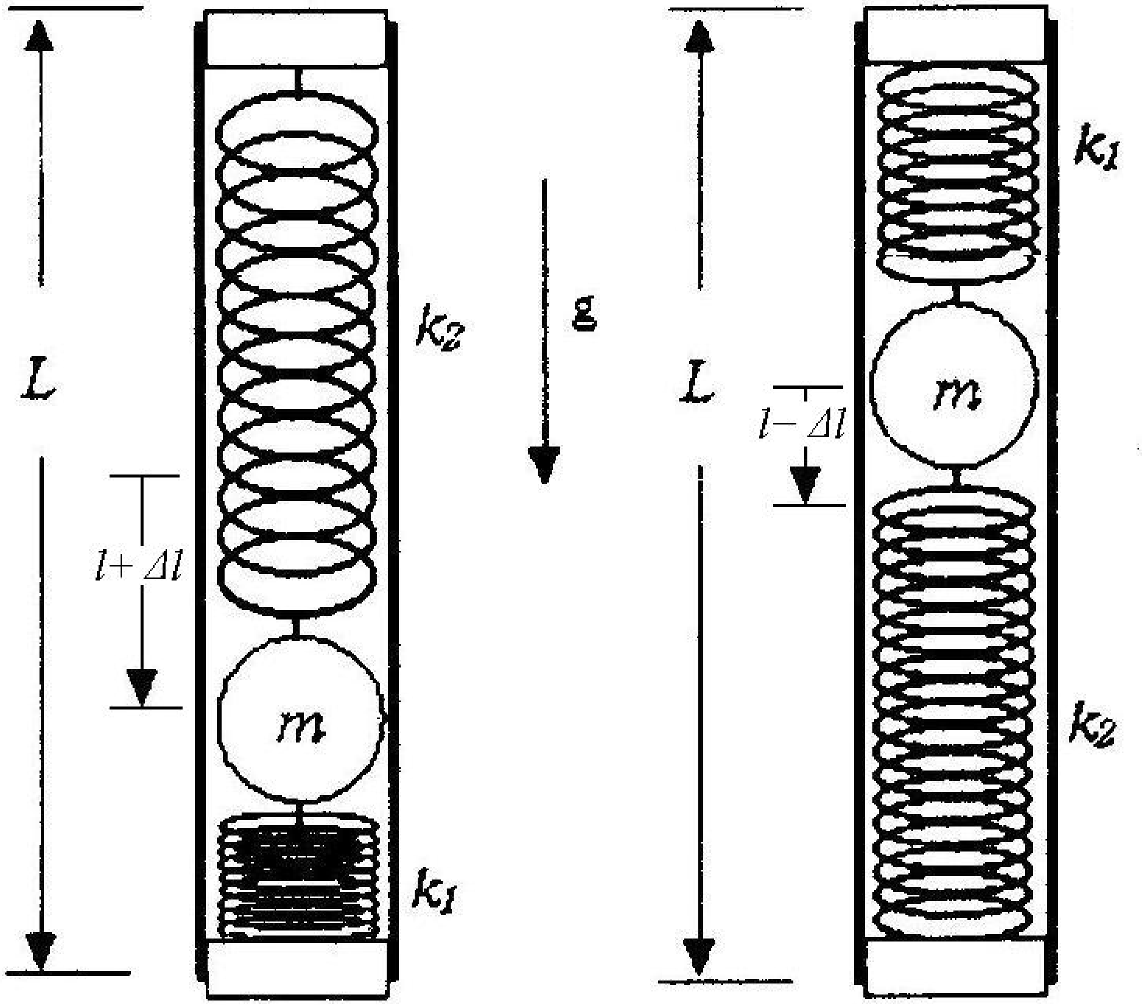
**C dalis. Spyruoklių konstantos $k_1$ ir $k_2$**

Išmatuojame MJD svyravimo periodus 3 pav. pateiktais atvejais.

| $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|
| 1,1085 | 1,0194 |
| 1,1093 | 1,0194 |
| 1,1089 | 1,0193 |
| 1,1085 | 1,0191 |
| 1,1094 | 1,0192 |
| 1,1090 | 1,0194 |
| 1,1088 | 1,0194 |
| 1,1090 | 1,0191 |
| 1,1092 | 1,0192 |
| 1,1094 | 1,0193 |

$T_1$=(1,1090±0,0003) s, $T_2$=(1, 0193±) s.

Parašome MJD svyravimo dažnių išraiškas esant vienai ir kitai padėčiai (C-1 pav.).




(1) C-1 pav. (2)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{MgL/2 + mg(L/2 + l + \Delta l)}{I_0 + m[(L/2 + l + \Delta l)^2 + 2r^2/5]}},$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{MgL/2 + mg(L/2 - l + \Delta l)}{I_0 + m[(L/2 - l + \Delta l)^2 + 2r^2/5]}}.$$

Iš pateiktų lygčių eliminuojame $I_0$ ir išreiškiame $\Delta l$:

$$\Delta l = \frac{g[l(1 + M/m)(T_1^2 - T_2^2) + 2l(T_1^2 + T_2^2)] - 16\pi^2 lL}{32\pi^2 l - g(T_1^2 - T_2^2)}, \quad \Delta l = (7{,}2 \pm 0{,}9)\ \text{cm}.$$

Toliau išreiškiame dviejų spyruoklių tamprumo koeficientą:

$$k = mg/\Delta l, \quad k = (9 \pm 1)\ \text{N/m}.$$

Kaip nurodyta sąlygoje, spyruoklės pagamintos iš vienodos vielos, skiriasi tik jų vijų skaičius. Todėl $k_1/k_2 = (L/2 + l - \delta - r)/(L/2 - l - \delta - r)$, be to, $k_1 + k_2 = k$. Iš pateiktų lygčių gauname:

$$k_1 = k(L/2 + l - \delta - r)/(L - 2\delta - 2r), \quad k_1 = (5{,}7 \pm 0{,}6)\ \text{N/m},$$

$$k_2 = k(L/2 - l - \delta - r)/(L - 2\delta - 2r), \quad k_1 = (3{,}3 \pm 1{,}0)\ \text{N/m}.$$