Vincas Kaminskas, Jonas Algirdas Martišius

TVERMĖS DĖSNIAI

Pakaitų konspektas
„Fizikos olimpo“ moksleiviams

Mokykla FIZIKOS OLIMPAS
Vilnius
2000

UDK 53(075.3)
Tv23

Paskaitų konspektą parengė ypatingai gabių mokinių papildomojo ugdymo mokyklos „Fizikos Olimpas“ dėstytojai doc. Vincas Kaminskas ir doc. Jonas Algirdas Martišius.

Recenzavo prof. Antanas Rimvydas Bandzaitis

Autoriai dėkoja „Fizikos Olimpo“ steigėjų tarybos pirmininkui P. Jonušui už iniciatyvą ir rūpestį, leidžiant šį leidinį.

ISBN 9986-778-05-0

TVERMĖS DĖSNIAI

Dažnai reikia nagrinėti ne vieno kūno ar taško judėjimą, o dviejų ar daugiau tarpusavyje sąveikaujančių kūnų sistemą. Pavyzdžiui, keletas žmonių ir valtis, kurioje jie yra, arba Saulės sistema. Čia kiekvieno kūno judėjimas priklauso nuo kitų kūnų judėjimo. Tokia sistema vadinama **mechanine sistema.** Vabzdžil būrys, nepaisant galimų susidūrimų ir sąveikos per orą, nėra mechaninė sistema, nes kiekvienas vabzdys gali nuskristi į šalį, nepakeisdamas kitų vabzdžių judėjimo. Toliau mes mechaninę sistemą vadinsime vienu žodžiu – sistema.

Jeigu bandytume nustatyti kiekvieno sistemos kūno judėjimą, turėtume parašyti kiekvienam i kūnui II Niutono dėsnį

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i, \qquad (1)$$

ir tų lygčių būtų tiek, kiek yra kūnų sistemoje. Jeigu kūnų skaičiųl sistemoje pažymėsime n, tai turėsime n vektorinių (1) lygčių, o suprojektavę į koordinačių ašis bendru atveju gausime 3n skaliarinių lygčių sistemą. Be to, kiekvieną kūną i veikianti jėga $\vec{F}_i$ priklausys nuo visų kitų kūnų padėties (koordinačių). Bendru atveju toks uždavinys (lygčių sistema) matematiškai tiksliai yra išsprendžiamas tik tada, kai kūnų skaičius sistemoje n=2. Trijų ir daugiau kūnų sistemos uždavinius galima spręsti tik apytikriai. Pavyzdžiui, 3 žvaigždžių uždavinį apie 1930 metus, sprendė Paulius Slavėnas, vėliau profesorius, akademikas. Tai buvo jo daktarinė disertacija.

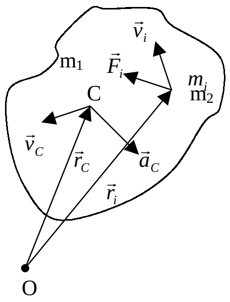
Dabar su kompiuteriais dideliu tikslumu galima nustatyti daug sudėtingesnių sistemų, negu 3 kūnų, kiekvieno kūno judėjimą. Tai įrodo ir šiuolaikinė kosmonautika. Tačiau ne visada tai būtina daryti, jeigu būtų ir įmanoma. Daugeliui uždavinių pakanka žinoti kai kurias bendras sistemos savybes. Tas savybes išreiškia taip vadinamos pagrindinės sistemos dinamikos teoremos apie judesio kiekį $\vec{K}$, apie masių centro judėjimą, apie judesio kiekio momentą $\vec{L}$, apie kinetinę energiją T. Iš tų teoremų seka, kad esant kai kurioms sąlygoms, sistemos judesio kiekis $\vec{K}$, judesio kiekio momentas $\vec{L}$, visa mechaninė energija laikui bėgant nekinta. Tuomet sako, kad tiems dydžiams galioja **tvermės dėsniai.** Be minėtų tvermės dėsnių klasikinėje mechanikoje dar žinomas masės tvermės dėsnis, elektrodinamikoje – elektros krūvio tvermės dėsnis. Elementariųjų dalelių fisikoje yra ir tokių krūvių, kuriems taip pat tinka krūvio tvermės dėsniai. Žinomas net „keistumo“ tvermės dėsnis. Bet labiausiai visoje fizikoje žinomas energijos tvermės dėsnis. Jį nustatant daugiausia pasidarbavo vokietis G. Leibnicas (gyveno 1646 – 1716m.), vokietis J. Mayeris (1814 – 1878m.), anglas J. Džaulis (1818 – 1889m.), vokietis G. Hemholcas (1821 – 1894m.).

Tvermės dėsniai šiuolaikinėje fizikoje (ir kituose gamtos moksluose) užima labai svarbią vietą. Todėl jų vardu ir galima vadinti visą šią mechanikos dalį.

I. SISTEMOS DINAMIKOS PAGRINDINĖS TEOREMOS

1.1 Materialių taškų sistemos judesio kiekis. Teorema apie judesio kiekio kitimą. Judesio kiekio tvermės dėsnis

Tegul turime mechaninę sistemą, sudarytą iš n kūnų. Marsui su dviem jo palydovais n=3, visai Saulės sistemai, imant tik 9 planetas, n=10. Bet kurio sistemos kūno masę pažymėkime m_i, jo radiusą vektorių arba spindulį vektorių - $\vec{r}_i$. Parašykime II Niutono dėsnį visiems sistemos kūnams:



1 pav.

$$\left.\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{F}_1 \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_2 \\ &.... \\ m_n\vec{a}_n &= \vec{F}_n \end{aligned}\right\} \text{(n lygčių)}$$

Trumpiau tai galima parašyti taip:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i. \qquad (1)$$

(i=1,2,...,n)

Iš dinamikos skyriaus žinome, kad II Niutono dėsnį

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

galima parašyti pavidalu:

$\dfrac{d\vec{k}}{dt} = \vec{F},\ kur\ \vec{k} = m\vec{v}$ yra kūno judesio kiekis. Tada vietoj (1) galime rašyti:

$$\frac{d\vec{k}_i}{dt} = \vec{F}_i. \qquad (2)$$

(i=1,2,...,n)

Kiekvieną sistemos kūną i veikiančių jėgų atstojamąją $\vec{F}_i$ išskaidykime į dvi dedamąsias: vidinių jėgų, kurių priežastis yra sistemą sudarančių kūnų poveikis, atstojamąją $\vec{F}_i^{\,v}$ ir išorinių jėgų, kurių priežastis yra sistemai nepriklausančių kūnų poveikis, atstojamąją $\vec{F}_i^{\,i}$: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,v} + \vec{F}_i^{\,i}$ (3). Tada (2) lygtis labiau išskleidę galime parašyti:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{k}_1}{dt} &= \vec{F}_1^{\,v} + \vec{F}_1^{\,i}, \\ \frac{d\vec{k}_2}{dt} &= \vec{F}_2^{\,v} + \vec{F}_2^{\,i}, \\ &.... \\ \frac{d\vec{k}_i}{dt} &= \vec{F}_i^{\,v} + \vec{F}_i^{\,i}, \\ &.... \\ \frac{d\vec{k}_n}{dt} &= \vec{F}_n^{\,v} + \vec{F}_n^{\,i}. \end{aligned}\right\} \text{(n lygčių)} \qquad (4)$$

Visas (4) lygtis panariui sudėkime. Gausime:

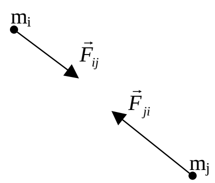
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{k}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,v} + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,i}. \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{k}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{k}_i = \frac{d\vec{K}}{dt},\ kur \qquad (6)$$

$$\boxed{\vec{K} = \sum_{i=1}^{n}\vec{k}_i = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i} \qquad (7)$$

yra sistemos judesio kiekis.

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,v} = 0. \qquad (8)$$



2 pav.

Įrodykime (8) lygybę. Čia parašyta suma reiškia visus sistemos kūnus veikiančių visų vidinių jėgų vektorinę sumą. Tą sumą galima išskaidyti į visas galimas jėgų poras $(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji})$, veikiančias tarp bet kurių dviejų sistemos kūnų (2 pav.):

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,i} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0,$$

nes pagal III Niutono dėsnį $(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0.$

Pažymėkime:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,i} = \vec{R}. \qquad (9)$$

Vektorius $\vec{R}$ reiškia visus sistemos kūnus (taškus) veikiančių visų **išorinių** jėgų vektorinę sumą. Jis dar vadinamas **pagrindiniu** išorinių jėgų vektoriumi. (6), (8) ir (9) įrašę į (5), gauname:

$$\boxed{\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}.} \qquad (10)$$

Ši (10) lygybė reiškia **teoremą apie sistemos judesio kiekio kitimą.** Žodžiais galima taip suformuluoti:

*Sistemos judesio kiekio kitimo greitis yra lygus pagrindiniam **išorinių** jėgų vektoriui.*

Vidinės jėgos sistemos judesio kiekiui įtakos neturi. Tai viena pagrindinių sistemos dinamikos teoremų.

Kai $\vec{R} = \vec{0}$, iš (10) seka, kad

$$\boxed{\vec{K} = \sum_{i=1}^{n}\vec{k}_i = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i = const.} \qquad (11)$$

Tai **sistemos judesio kiekio tvermės dėsnis:**

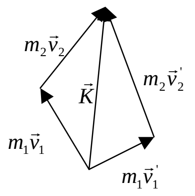
*Kai **išorinių** jėgų pagrindinis vektorius lygus nuliui, sistemos judesio kiekis yra pastovus.*

Kai $\vec{R} = \vec{0}$, **sistema** vadinama **uždara**. Uždarą sistemą apibrėžia ir kiek kitaip: tai sistema, kuri nesąveikauja su jokiais kitais kūnais, nepriklausančiais sistemai. Visais atvejais galima sakyti, kad **judesio kiekio tvermės dėsnis galioja uždaroms sistemoms.**

Sistemos judesio kiekis nėra kurio nors jo taško charakteristika. Tai visos sistemos charakteristika.

Matematine prasme judesio kiekis $\vec{K}$ yra **vektorius.** Pailiustruokime tai 2 kūnų sistemai. Tuo atveju iš (11) turime:

$$\vec{K} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = const.$$



3 pav.

Arba, jeigu tų kūnų greičius laiko momentu t pažymėsime $\vec{v}_1$ *ir* $\vec{v}_2$, o bet kuriuo kitu laiko momentu t' - $\vec{v}_1^{\,'}$ *ir* $\vec{v}_2^{\,'}$, tai turėsime (3 pav.):

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1^{\,'} + m_2\vec{v}_2^{\,'} \qquad (12)$$

Tai judesio kiekio tvermės dėsnis 2 kūnų sistemai.

Kai nuliui lygi tik viena kuri nors vektoriaus $\vec{R}$ projekcija, o ne visas vektorius, tai judesio kiekio tvermės dėsnį reikia kitaip formuluoti. Visada galima koordinačių ašis taip parinkti, kad būtų $R_x = 0.$ Tada iš (10):

$$\frac{dK_x}{dt} = R_x = 0 \;\; ir$$

$$\boxed{K_x = const.} \qquad (13)$$

Kai pagrindinio įęorinių jėgų vektoriaus projekcija į kurią nors ašį lygi nuliui, tvermės dėsnis tinka judesio kiekio projekcijai į tą ašį. Šia judesio kiekio tvermės dėsnio forma patogu naudotis, kai žinoma vektoriaus $\vec{R}$ kryptis.

Judesio kiekio tvermės dėsnis mechanikoje galioja, esant bet kokioms vidinėms jėgoms – gravitacinėms, elektrinėms ir kt. Tarp sistemos kūnų gali būti ar nebūti trinties, smūgiai gali būti tamprieji ar plastiškieji, šiluma gali išsiskirti arba neišsiskirti. Svarbu, kad sistema būtų uždara. Tai labai universalus dėsnis.

Iš (10):

$$d\vec{K} = \vec{R}dt.$$

Kai $\vec{R} = const,$ turėsime: $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{R}\int_{t_1}^{t_2} dt.$

$$\boxed{\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \vec{R}(t_2 - t_1).} \qquad (14)$$

Tai sistemos **impulsų teorema.** $\vec{R}(t_2 - t_1)$ vadinamas pagrindinio išorinių **jėgų vektoriaus impulsu** per laikotarpį ($t_2 - t_1$).

Kai sistemą sudaro tik vienas kūnas, visos jėgos yra išorinės: $\vec{R} = \vec{F}$ (kūną veikiančių jėgų atstojamoji). Tada (14):

$$\boxed{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}(t_2 - t_1).} \qquad (15)$$

Kūno judesio kiekio pokytis lygu jį veikiančių jėgų impulsui.

Judesio kiekio vienetas yra 1kg·m/s. Atskiro pavadinimo jis neturi.

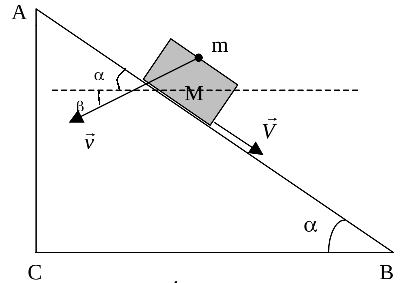
Pratybos

1. Kampu α į horizontą pasvirusia nuožulniąja plokštuma be trinties slysta M masės smėlio dėžė. Po to, kai dėžė nušliaužė atstumą s, į ją iš priešingos pusės įkrito m masės akmuo, kurio greitis su horizontu sudarė kampą β.

Koks buvo akmens greitis v, jeigu dėžė smūgio metu sustojo?

Sprendimas

Nuo laiko momento prieš pat smūgį iki laiko momento tuoj po smūgio sunkio jėgų galima nepaisyti, nes jos daug mažesnės už jėgas, veikiančias smūgio metu. Todėl smūgio metu dėžės ir



4 pav.

akmens sistemą išorinės jėgos išilgai tiesės AB (4 pav.) neveikia, ir judesio kiekio projekcija AB kryptyje yra konstanta ir šį kartą ji lygi nuliui, nes dėžė ir akmuo smūgio metu sustojo:

$$MV - mv\cos(\alpha + \beta) = 0,$$

čia V – dėžės greitis prieš pat smūgį.

$$V = \sqrt{2gs\sin\alpha}.$$

Iš tų lygybių gauname:

$$v = \frac{M\sqrt{2gs\sin\alpha}}{m\cos(\alpha + \beta)},$$

$$\alpha + \beta < 90^0.$$

2. Greičiu v skrendančio reaktyvinio lėktuvo variklis kas sekundę įsiurbia m masę oro, sunaudoja M masę kuro ir degimo produktus išmeta greičiu u lėktuvo atžvilgiu. Raskite variklio galią N (Ats.: $N = Fv = (m + M)uv - mv^2$).

3. Tankio ρ, skerspjūvio S, greičio v horizontali skysčio srovė atsimuša į vertikalią sieną ir nuteka sienos paviršiumi. Kokia jėga F srovė spaudžia sieną?

1.2 Teorema apie masių centro judėjimą

Perrašykime praeito skirsnio (1) lygybę:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i.$$

(i=1,2,....,n)

Atsiminkime, kad tai n lygčių sistema. Sudėkime visas tas lygtis panariui. Sudėję gausime:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \vec{R}, \qquad (1)$$

nes visų vidinių jėgų vektorinė suma lygi nuliui (žr. Praeito skirsnio (8)).

Kai visų sistečmos kūnų pagreičiai tarpusavyje lygūs, tokį judėjimą vadina **slenkamuoju sistemos judėjimu.** Lygiai taip mes apibrėžėme kietojo kūno slenkamąjį judėjimą kinematikoje (žr. 2.7 paragrafą). Taigi, kai sistemos judėjimas yra slenkamasis, tai

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = ... = \vec{a}_i = ... = \vec{a}_n = \vec{a}. \qquad (2)$$

Jeigu pradiniai taškų greičiai $\vec{v}_{0i}$ buvo lygūs, tai bus lygūs tarpusavyje visų taškų greičiai bet kuriuo laiko momentu:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = ... = \vec{v}_i = ... = \vec{v}_n = \vec{v}. \qquad (3)$$

Turėkime galvoje, kad laikui bėgant bendru atveju greitis $\vec{v}$ keisis, gali keistis ir pagreitis $\vec{a}$, tiktai slenkamojo judėjimo atveju visų taškų greičiai ir pagreičiai kinta vienodai.

Taigi slenkamajam sistemos judėjimui

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a} = \vec{a}\sum_{i=1}^{n} m_i = \vec{a}M,$$

kur

$$\boxed{M = \sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (4)$$

yra visa sistemos masė. Tada iš (1) gauname:

$$M\vec{a} = \vec{R}. \qquad (5)$$

Tai sistemos slenkamojo judėjimo dinamikos lygtis. Ji sutampa su vieno kūno (taško) dinamikos lygtimi, su II Niutono dėsniu.

Jeigu sistema juda ne slenkamuoju, o sudėtingesniu judėjimu (pvz. Saulės sistema), tai (1) lygtis bus sudėtingesnė už II Niutono dėsnį vienam taškui. Bet **ar negalima (1) lygtį suvesti į vieno taško judėjimo lygtį ir šiuo atveju?** Pasirodo – **galima.** Iš tikrųjų, visada galima rasti tokį tašką C sistemoje (kartais jis gali būti ir šalia sistemos), kurio pagreitis $\vec{a}_C$ patenkina lygybę:

$$\vec{a}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}{M}, \qquad (6)$$

kur M – sistemos masė. Taškas C vadinamas sistemos **masių centru.** Jis dar vadinamas inercijos centru, vienalyčiame sunkio jėgų lauke sutampa su svorio centru. Masių centro apibrėžimas pagal (6) yra lygiavertis masių centro apibrėžimui, kuris buvo duotas, nagrinėjant kietojo kūno statiką: masių centro spindulys vektorius (žr. 1 pav.)

$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}.} \qquad (7)$$

Tikrai, diferencijuokime abi (7) lygybės puses pagal laiką. Diferencijuodami kairę pusę gausime:

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \vec{v}_C. \qquad (8)$$

Tai **masių centro greitis.** Atlikdami veiksmus (7) dešinėje pusėje, turėsime: $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ - bet kurio sistemos taško greitis. Vietoje (7) lygybės bus:

$$\vec{v}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}. \qquad (9)$$

Diferencijuokime ir (9) lygybės abi puses pagal laiką. Gausime:

$$\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{a}_C. \qquad (10)$$

Tai jau minėtas (6) lygybėje **masių centro pagreitis.** Be to, $\frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{a}_i$ - bet kurio sistemos taško pagreitis. Taigi, iš (9) seka:

$$\vec{a}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}{M}.$$

Gavome (6) lygybę. Vadinasi, tašką C galime rasti pagal (7) lygybę, todėl (6) lygybė yra pagrįsta.

Lygybę (6) įrašome į (1). Gauname:

$$\boxed{M\vec{a}_C = \vec{R}.} \qquad (11)$$

Tai ir yra **teorema apie masių centro judėjimą.** Matematine prasme tai yra **vieno materialiojo taško judėjimo lygtis,** ko mes ir norėjome. Spręsdami (11) lygrį, mes rasime masių centro judėjimą. Tačiau (11) lygtis – tai II Niutono dėsnis kūnui, kurio masė M ir kurį veikia jėga $\vec{R}$.

Kadangi iš tikrųjų sistemos masė yra pasiskirsčiusi po visus sistemos kūnus, tai teoremą apie masių centro judėjimą galime taip suformuluoti:

Sistemos masių centras juda taip, lyg jame būtų sukaupta visa sistemos masė ir jį veiktų pagrindinis ***išorinių*** *jėgų vektorius.*

Vidinės jėgos masių centro judėjimui įtakos neturi. Tai dar viena pagrindinė sistemos dinamikos teorema.

Kai vektorius $\vec{R} = \vec{0}$, iš (11) gauname $\vec{a}_C = \vec{0}$. Todėl

$$\vec{v}_C = const = \vec{v}_{C0}. \qquad (12)$$

Čia $\vec{v}_{C0}$ - pradinis masių centro greitis.

Paskutinioji lygybė reiškia, kad **sistemos masių centras** tokiu atveju **tiesia linija ir pastoviu greičiu,** t.y. jam tinka I Niutono dėsnis. Jeigu pradinis masių centro greitis $\vec{v}_{C0}$=0, tai masių centras visą laiką nejudės, nors pačioje sistemoje vyktų patys sudėtingiausi judesiai. Todėl (12) lygybė vadinama: **sistemos masių centro tvermės dėsnis.** Jis tinka uždaroms sistemoms. Jo žodinį formulavimą jau parašėme.

Kai kuri nors pagrindinio išorinių jėgų vektoriaus projekcija, pvz., $R_x = 0$, tai iš (11) teoremos seka, kad $a_{Cx} = 0$. Todėl masių centro greičio projekcija

$$v_{Cx} = const = v_{Cx0}. \qquad (13)$$

Kai $v_{Cx0} = 0$, *tai ir* $v_{Cx} = 0$.

Žinant masių centro savybes, galima labai paprastai išreikšti sistemos judesio kiekį $\vec{K}$. Į (9) lygybę įrašykime praeito skirsnio (7) lygybę. Įrašę gauname:

$$\boxed{\vec{K} = M\vec{v}_C.} \qquad (14)$$

Žodžiais šią lygybę galima taip pasakyti:

Sistemos judesio kiekis yra lygus jos masių centro judesio kiekiui (tariant, kad masių centre sukaupta visa sistemos masė).

Kai masių centro greitis $\vec{v}_C = const$ ir judesio kiekis $\vec{K} = const$. Kai $\vec{v}_C = 0$ *ir* $\vec{K} = \vec{0}$. Taip bus, kai pvz. sistema nors ir labai greitai suksis apie nejudantį masių centrą.

Pratybos

1. Ant slidžių horizontalių grindų guli dviguba nuožulnioji plokštuma, kurios masė m_3. Jos matmenys a ir b žinomi. Ant nuožulniosios plokštumos viršūnės padėti du tašeliai, kurių masės m_1 ir m_2. Paleisti tašeliai ima slysti žemyn: pirmasis be trinties, o antrasis – su trintimi ir net šiek tiek sušyla. Ta trintis tokio didumo, kad abu tašeliai grindis pasiekia kartu. Kiek ir į kurią pusę iki to momento pasislinks nuožulnioji plokštuma?

Sprendimas

Šį kartą galima remtis (13) lygybe. Be to, $v_{Cx0} = 0$. Todėl masių centro koordinatė $x_C = const$

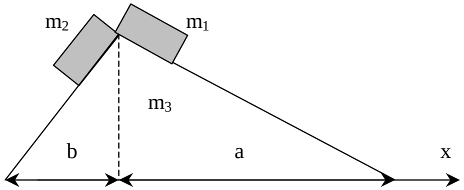
$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1(x_1 + \Delta x_1) + m_2(x_2 + \Delta x_2) + m_3(x_3 + \Delta x_3)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Gauname:

$$\left.\begin{aligned} &m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3 = 0,\\ &\Delta x_1 = a + \Delta x_3,\\ &\Delta x_2 = -b + \Delta x_3. \end{aligned}\right\}$$

Išsprendus gautą lygčių sistemą, ieškomasis $\Delta x_3 = \dfrac{m_2 b - m_1 a}{m_1 + m_2 + m_3}$.

Poslinkio kryptis priklausys nuo Δx_3 ženklo.



5 pav.

2. Granata, išmesta pradiniu greičiu v_0=19,6 m/s kampu α=30^0 į horizontą, aukščiausiame taške susprogo. Nubrėžkite granatos šukių masių centro trajektorijos grafiką.
Oro pasipriešinimo nepaisykite.
3. Tegul praeitame uždavinyje minimos granatos masė m=2 kg. Koks bus granatos šukių visas judesio kiekis, praėjus 2 s po granatos išmetimo (raskite didumą ir kryptį) (Ats.: K=mv_0).

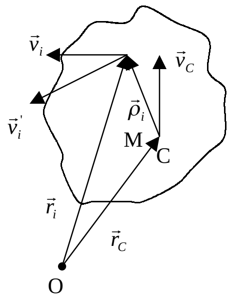
1.3 Teorema apie judesio kiekio momento kitimą

Prisiminkime kinematikos konspekto 1.5 paragrafą „Vektorinė sandauga“, kur buvo apibrėžta vektoriaus $\vec{A}$ momento sąvoka.Tai vektorinė sandauga $[\vec{r}\vec{A}]$. Todėl materialiojo taško judesio kiekio $\vec{k} = m\vec{v}$ momentas yra vektorinė sandauga $[\vec{r}, m\vec{v}]$ (žr. 6 pav.). Pažymėkime tą momentą $\vec{l}_i$. Taigi:

$$\vec{l}_i = [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]. \qquad (1)$$

Visos sistemos judesio kiekio momentas taško O atžvilgiu (jį dar vadina kinetiniu momentu) yra visų sistemos materialiųjų taškų judesio kiekio momentų vektorinė suma. Pažymėkime jį $\vec{L}$ (galima būtų žymėti $\vec{L}_0$):

$$\boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i].} \qquad (2)$$



6 pav.

Išreiškime $\vec{L}$ per masių centro savybes. Iš 6 pav. matyti, kad taško m_i spindulys vektorius

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i, \qquad (3)$$

kur $\vec{r}_C$ - sistemos masių centro spindulys vektorius, o $\vec{\rho}_i$ parodo materialiojo taško m_i padėtį masių centro atžvilgiu.

Diferencijuojame (3) abi puses pagal laiką:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i, \; \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \vec{v}_C, \; \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \vec{v}_i^{'},$$

kur $\vec{v}_i^{'}$ yra taško m_i reliatyvusis greitis masių centro atžvilgiu. Todėl

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^{'}. \qquad (4)$$

(4) ir (3) įrašome į (2):

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} [(\vec{r}_C + \vec{\rho}_i), m_i(\vec{v}_C + \vec{v}_i^{'})] = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_C, m_i\vec{v}_C] + \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_C, m_i\vec{v}_i^{'}] + \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, m_i\vec{v}_C] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, m_i\vec{v}_i^{'}].$$

Pastovius daugiklius iškeliame iš po sumavimo ženklo:

$$\vec{L} = [\vec{r}_C, (\sum_{i=1}^{n} m_i)\vec{v}_C] + [\vec{r}_C, \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i] + [(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i), \vec{v}_C] + \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, m_i\vec{v}_i^{'}]. \qquad (5)$$

Savo ruožtu $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ yra sistemos masė, pagal masių centro apibrėžimą (žr. praeito skirsnio (7)): $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{\rho}_i = M\vec{r}_C^{'} = 0$, nes $\vec{r}_C^{'}$ reiškia spindulį vektorių, išvestą iš taško C (iš masių centro) į masių centrą, ir todėl $\vec{r}_C^{'}$=0.

Atsižvelgus į pastarąsias lygybes, išraiška (5) supaprastėja. Gauname:

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}_C, M\vec{v}_C] + \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, m_i\vec{v}_i^{'}].} \qquad (6)$$

Pirmąjį narį deęinėje pusėje galima pavadinti masių centro judesio kiekio momentu. Antrasis narys dešinėje pusėje, remiantis (2), reiškia sistemos judesio kiekio momentą masių centro atžvilgiu. Pažymėkime jį $\vec{L}_C$:

$$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^{n} [\vec{\rho}_i, m_i\vec{v}_i^{'}]. \qquad (7)$$

Todėl gautąją (6) teoremą galima taip suformuluoti:

Sistemos judesio kiekio momentas kurio nors nejudančio taško O atžvilgiu yra lygus masių centro judesio kiekio momentui to paties taško atžvilgiu plius sistemos judesio kiekio momentas masių centro atžvilgiu.

Kadangi $M\vec{v}_C = \vec{K}$ (žr. praeito skirsnio (14)), tai $[\vec{r}_C, M\vec{v}_C] = [\vec{r}, \vec{K}]$. Atsižvelgus dar į (7), teoremą (6) galime trumpiau parašyti:

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}_C, \vec{K}] + \vec{L}_C.} \qquad (8)$$

Pirmąjį narį dešinėje pusėje galima dar vadinti sistemos judesio kiekio, pridėto masių centre, momentu.

Teorema (6) arba (8) buvo naudojama tarptautinės fizikos olimpiadose.

Kol kas aptarėme sistemos judesio kiekio momento sąvoką (apibrėžimą) ir įrodėme vieną teoremą apie jo skaičiavimą. Dabar pereisime prie pagrindinio klausimo – prie teoremos apie sistemos judesio kiekio momento kitimą.

Parašykime 1.1 paragrafo lygybę:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i.$$
$$(i=1,2,...,n)$$

Atsižvelgę į to paties skirsnio lygybę (3) ir į tai, kad $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt}$, turėsime:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\,v} + \vec{F}_i^{\,i}.$$

(i=1,2,...,n)

Abi šios lygybės puses padauginkime iš kairės pusės vektoriškai iš taško m_i spindulio vektoriaus $\vec{r}_i$. Gausime

$$[\vec{r}_i, m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}] = [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,v}] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,i}].$$

Kairiąją pusę galima parašyti kitaip:

$$[\vec{r}_i, m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i].$$

Mat,

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = [\frac{d\vec{r}_i}{dt}, m_i\vec{v}_i] + [\vec{r}_i, m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}] = [\vec{v}_i, m_i\vec{v}_i] + [\vec{r}_i, m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}] = m_i[\vec{v}_i, \vec{v}_i] +$$

$$+ [\vec{r}_i, m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}] = m_i \cdot 0 + [\vec{r}_i, m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}].$$

Taigi turime:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,v}] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,i}]. \qquad (9)$$

Sudėkime visas (9) lygtis panariui. Gausime:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = \sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,v}] + \sum[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,i}]. \qquad (10)$$

Kairėje pusėje išvestinių sumą galima pakeisti sumos išvestine:

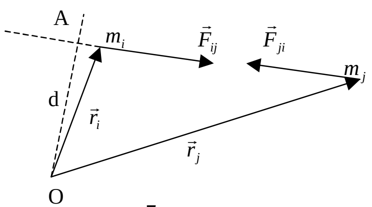
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = \frac{d\vec{L}}{dt}. \qquad (11)$$

Čia atsižvelgėme dar į (2), kur $\vec{L}$ yra sistemos judesio kiekio momentas taško O atžvilgiu.

Dešinėje (10) lygybės pusėje antrasis narys $\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,i}]$, remianti kinematikos konspekto 1.5 paragrafo formule (8), yra visus sistemos taškus veikiančių visų išiorinių jėgų momentų taško O atžvilgiu vektorinė suma. Pažymėkime tą sumą $\vec{M}$:

$$\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,i}] = \vec{M}. \qquad (12)$$

Vektorius $\vec{M}$ **vadinasi pagrindiniu išorinių jėgų momentu.**



7 pav.

Dar liko panagrinėti (10) pirmasis narys dešinėje pusėje: $\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,v}]$. Jis reiškia atstojamąjį vidinių jėgų momentą. Panašiai kaip 1.1 paragrafe skaidėme vidines jėgas poromis, išskaidykime tų jėgų momentą poromis:

$$\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,v}] = \sum_{poras}([\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_i, \vec{F}_{ji}]).$$

Paimkime vienos jėgų poros atstojamąjį momentą:

$$[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}] + [\vec{r}_i, \vec{F}_{ji}] = \vec{M}_i + \vec{M}_j.$$

Pirmasis $\vec{M}_i$ (žr. 7 pav.) nukreiptas nuo mūsų, o antrasis – į mus. Gi tų momentų didumai vienodi, nes pagal III Niutono dėsnį $F_{ij} = F_{ji}$, o abiejų jųgė petys d=AO. Todėl $\vec{M}_i + \vec{M}_j = 0$ ir

$$\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\,v}] = 0. \qquad (13)$$

(11), (12) ir (13) įrašę į (10) gauname:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.} \qquad (14)$$

Tai dar viena pagrindinė sistemos dinamikos teorema. Ji vadinasi **teorema apie sistemos judesio kiekio momento kitimą.** Žodžiais jos turinį skaitome taip:

*Sistemos judesio kiekio momento kitimo greitis yra lygus pagrindiniam **išorinių** jėgų momentui.*

Vidinės jėgos sistemos judesio kiekio momento pakeisti negali.

Reikia turėti galvoje, kad sistemos judesio kiekio momentas $\vec{L}$ ir pagrindinis išorinių jėgų momentas $\vec{M}$ čia turi būti skaičiuojami to paties nejudančios taško atžvilgiu. Įrodoma, kad abu momentai $\vec{L}$ ir $\vec{M}$ gali būti skaičiuojami ir masių centro atžvilgiu, nors masių centras bendrai nėra nejudantis.

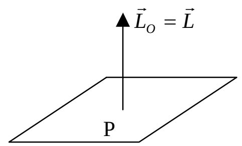
Kai $\vec{M}$ = 0, iš (14) seka, kad

$$\boxed{\vec{L} = \sum_{i=1}^{n}\vec{l}_i = \sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i] = const.} \qquad (15)$$

Tai **sistemos judesio kiekio momento tvermės dėsnis.**

*Kai pagrindinis **išorinių** jėgų momentas lygus nuliui, sistemos judesio kiekio momentas yra pastovus.*

Judesio kiekio momentas $\vec{L}$ ir pagrindinis išorinių jėgų momentas $\vec{M}$, kaip ir judesio kiekis $\vec{K}$ bei pagrindinis išorinių jėgų vektorius $\vec{R}$, yra vektorinis dydis. Išvestinė $\frac{d\vec{L}}{dt}$ - taip pat vektorius.



8 pav.

Uždaroms sistemoms visada $\vec{M}$ = 0. Taigi uždaroms sistemoms visada galioja judesio kiekio momento tvermės dėsnis: $\vec{L} = const = \vec{L}_0$, *kur* $\vec{L}_0$ - pradinis judesio kiekio momentas. Kadangi $\vec{L}$ yra vektorius, tai nekinta ne tik jo didumas, bet ir kryptis. Todėl plokštuma P, statmena vektoriui $\vec{L}$ (žr. 8 pav.), laikui bėgant nekeičia savo orientacijos erdvėje. Saulės sistema dideliu tikslumu yra uždara. Todėl jai irgi tinka aukščiau minėtos pastabos, o plokštuma P vadinama Laplaso plokštuma. Prancūzų astronomas, fizikas ir matematikas P. Laplasas gyveno 1749 – 1827 m.

Kai viena kuri pagrindinio išorinių jėgų projekcija $M_x = 0$, iš (14) gauname, kad

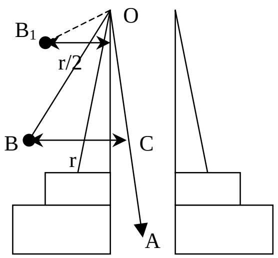
$$\boxed{L_x = const.} \qquad (16)$$

Kai pagrindinio išorinių jėgų momento projekcija į kurią nors ašį lygi nuliui, tvermės dėsnis tinka judesio kiekio momento projekcijai į tą ašį.

Judesio kiekio momentas – labai svarbus dydis, nagrinėjant besisukančių sistemų judėjimą. Judesio kiekio momento vienetas yra 1 kg·m^2/s. Savito pavadinimo jis neturi.

Pratybos

1. Svarstis B pririštas prie lengvos netąsios virvelės BOA galo. Virvelės dalis OA yra vertikaliame vamzdyje ir lėtai traukia žemyn, todėl išorinė virvelės dalis BO trumpėja (9 pav.). Svarstis B sukasi apskritimu apie vamzdžio ašį horizontalioje plokštumoje. Kai apskritimo spindulys BC=r, svarstis sukasi dažniu n=120aps/min. Koks bus apsisukimų dažnis n_1, kai apskritimo spindulys sumažės iki r/2?



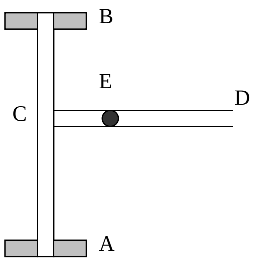
9 pav.

Sprendimas

Šiuo atveju sistemą sudaro tik vienas kūnas, ir pagrindinis išorinių jėgų vektorius $\vec{R}=\vec{F}_{ic}$, kur $\vec{F}_{ic}$ nukreipta nuo B į C. Jos momentas $\vec{M}$ taško C atžvilgiu lygus nuliui, todėl svarsčio judesio kiekio momentas $\vec{L}=[\vec{r},m\vec{v}]=const$. Čia $\vec{r}=\overrightarrow{CB}$. Kadangi $\vec{v}\perp\vec{r}$, tai: rmv=rmv_1/2, kur v_1 – svarsčio greitis, kai apskritimo spindulys lygus r/2. Gauname, kad v_1=2v. Be to, v=2πrn, v_1=2πrn_1/2. Todėl n_1=4n=480aps/min.

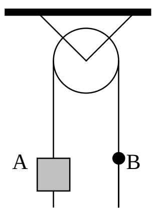
Energijos tvermės dėsniu čia remtis negalima, nes traukiant virvelės galą A žemyn, atliekamas darbas.

2. Lengvas horizontalus vamzdelis CD gali laisvai suktis apie vertikalią ašį AB. Vamzdelyje atstumu CE=l nuo sukimosi ašies yra rutuliukas (10 pav.). Vamzdelį įsuka kampiniu greičiu ω_0 ir rutuliuką atpalaiduoja. Koks bus vamzdelio kampinis greitis ω tuo metu, kai rutuliukas išlėks iš vamzdelio? Vamzdelio ilgis L. (Ats.: $\omega=\omega_0\, l^2/L^2$).



10 pav.

3. Per lengvą skridinį permesta virvė. Į tašką A įsikibo beždžionė, o taške B pririštas kūnas, kurio masė lygi beždžionės masei (11 pav.). Kaip judės kūnas B, kai beždžionė pradės lipti aukštyn greičiu v_r virvės atžvilgiu?

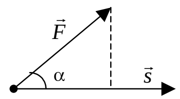


11 pav.

1.4 Jėgų darbas. Konservatyviosios jėgos. Potencinė energija, jos pavyzdžiai

Kai pastoviai jėgai $\vec{F}$ veikiant, kūnas jėgos kryptimi nueina kelią s, tai jėgos ir nueito kelio sandauga vadinasi jėgos atliktu darbu A:

$$A=Fs. \qquad (1)$$



12 pav.

Kai jėgos $\vec{F}$ ir nueito kelio $\vec{s}$ kryptys nesutampa (žr. 12 pav.), jėgos atliktas darbas yra jėgos projekcijos į kelio kryptį ir nueito kelio sandauga:

$$A=F\cos\alpha\cdot s=(\vec{F}\vec{s}). \qquad (2)$$

Čia $(\vec{F}\vec{s})$ yra skaliarinė tų vektorių sandauga (žr. Kinematikos skyriaus 1.4 paragrafą). Lygybė (1) yra lygybės (2) atskiras atvejis, kai α=0. Kai α=90^0, darbas A=0, kai $\alpha>90^0$, darbas A < 0 ir t.t.

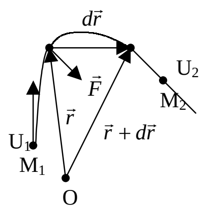
Kai jėga $\vec{F}$ yra kintama, reikia imti tokį nueitą kelią $d\vec{s}$, kuriame jėga $\vec{F}$ beveik nespėja pasikeisti. Tokiame kelyje darbas bus be galo mažas:

$$dA=(\vec{F}d\vec{s})=(\vec{F}d\vec{r}). \qquad (3)$$

Mat, $d\vec{s}=d\vec{r}$. Darbas dA vadinamas elementariu darbu.

Darbas A baigtiniame kelyje tarp taškų M_1 ir M_2, kintamai jėgai $\vec{F}$ veikiant (žr. 13 pav.), bus integralas:

$$A=\int_{M_1}^{M_2}(\vec{F}d\vec{r}). \qquad (4)$$



13 pav.

Integruoti galima ne tik išilgai tiesių, bet ir išilgai įvairių kreivių.

Darbo vienetą Jūs žinote. Tai džaulis (J).

Yra žinoma nemažai jėgų, kurių darbą galima išreikšti per naujas nustatytas skaliarines koordinačių funkcijas tokiu būdu:

$$dA=(\vec{F}d\vec{r})=-dU(x,y,z);$$

$$A=\int_{M_1}^{M_2}(\vec{F}d\vec{r})=-\int_{M_1}^{M_2}dU(x,y,z)=-(U_2-U_1)=U_1-U_2. \qquad (5)$$

Dydis (funkcija) $U(x,y,z)$ vadinasi **potencine energija.** Lygybės (5) yra potencinės energijos apibrėžimas.

Potencinė energija matuojama tais pačiais vienetais, kaip darbas.

Verta pastebėti, kad lygybėmis (5) apibrėžta ne pati potencinė energija U, o tiktai jos pokytis dU arba tiktai potencinių energijų taškuose M_1 ir M_2 skirtumas $U_1 - U_2$.

Tokias jėgas, kurių atliktą darbą galima išreikšti per potencinę energiją (5) nurodytu būdu, vadina **konservatyviosiomis jėgomis.** (5) yra ir konservatyviųjų jėgų sąvokos apibrėžimas. Kodėl tos jėgos taip pavadintos, paaiškinsime kitame skirsnyje.

Iš tų jėgų, apie kurias kalbėjome dinamikos skyriuje, konservatyviosios jėgos yra:

Tamprumo jėga $\vec{F}_t=-k\Delta\vec{l}$,

Visuotinės traukos jėga $\vec{F}_g=-G\dfrac{m_1m_2}{r^3}\vec{r}$,

$$\text{Elektrinė jėga } \vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r},$$

$$\text{Sunkio jėga } \vec{F}_s = m\vec{g}.$$

Kiekvieną tą jėgą atitinka savita potencinė energija U.

Nekonservatyvios jėgos yra: trinties, aplinkų pasipriešinimo, Archimedo, Lorenco (magnetinė) jėga.

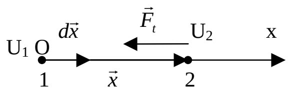
Rasime kūno ar kūnų sąveikos potencinę energiją U, kai veikia minėtos konservatyviosios jėgos. Tai bus **potencinės energijos pavyzdžiai.**

Potencinė energija veikiant tamprumo jėgai.

Kūnas, pritvirtintas prie spyruoklės, tempiamas x ašies kryptimi. Tegul taške O yra pusiausvyra. $\vec{x}$ - spyruoklės deformacija (ištempimas) (14 pav.). Tada $\vec{F}_t = -k\Delta\vec{l} = -k\vec{x}$:

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 (F_t d\vec{x}) = -\int_0^x k(\vec{x}d\vec{x}) = -k\int_0^1 x dx = -k\frac{x^2}{2};$$

$$U_1 - U_2 = -k\frac{x^2}{2}.$$



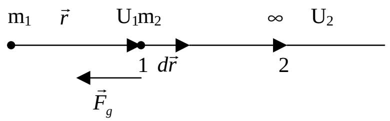
14 pav.

Norint rasti ne potencinės energijos skirtumą, o pačią potencinę energiją, **reikia papildomos prielaidos.** Ta prielaida tokia: **tegul** nedeformuotos spyruoklės potencinė energija lygi nuliui, t.y. $U_1 = 0$. Tada

$$\boxed{U_2 = U_t = k\frac{x^2}{2}.} \qquad (6)$$

Tai deformuotos spytuoklės potencinė energija.

Potencinė energija veikiant visuotinės traukos jėgai.



15 pav.

U_2 – potencinė energija begalybėje.
Remiantis 15 pav. rašome:

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 (\vec{F}_g d\vec{r}) = -\int_r^\infty F_g dr =$$

$$= -\int_r^\infty G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = -Gm_1 m_2 \int_r^\infty r^{-2}dr =$$

$$= -Gm_1 m_2 (\frac{r^{-1}}{-1})\Big|_r^\infty = Gm_1 m_2 \left|\frac{1}{r}\right|_r^\infty =$$

$$= Gm_1 m_2 (\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r};$$

$$U_1 - U_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

Tegul kūno m_2 potencinė energija be galo toli nuo kūno m_1 lygi nuliui, t.y. $U_2=0$. Tada

$$\boxed{U_1 = U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r}.} \qquad (7)$$

Tai dviejų kūnų gravitacinės sąveikos potencinė energija.

Dviejų elektros krūvių sąveikos potencinė energija.

Lygindami anksčiau parašytą visuotinės traukos jėgą $\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$, ir elektrinę jėgą $\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$, matome, kad pereinant nuo gravitacinės prie elektrinės jėgos, reikia vietoje (m_1m_2) rašyti (q_1q_2) ir vietoje (–G) rašyti $\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\right)$. Tai padarę vietoje (7) gausime:

$$\boxed{U_e - \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}.} \qquad (8)$$

Tai dviejų taškinių elektros krūvių sąveikos potencinė energija. Kai q_1 ir $q_2 > 0$ arba q_1 ir $q_2<0$, $U_e > 0$ (esant tarpusavio stūmos jėgai). Kai q_1 ir q_2 priešingų ženklų, $U_e < 0$ (esant tarpusavio traukos jėgai, kaip ir gravitacinės sąveikos atveju).

Iš (8) matyti, kad 2 elektronų, esančių vakuume (ε=1), sąveikos potencinė energija

$$U_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \text{ (stūmos jėgoms)}$$

nes elektronų $q_1 = q_2 = -e$ (elementarusis el. krūvis).

Elektrono sąveikos su atomo branduoliu potencinė energija

$$U_{br} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \text{ (traukos jėgoms)}$$

nes šiuo atveju q_1 = +Ze (branduolio krūvis), q_2 = -e, kur Z – branduolio eilės numeris cheminių elementų lentelėje. Taip pat tarėme, kad branduolys ir elektronas yra vakuume.

Aptartos konservatyviosios jėgos (tamprumo, visuotinės traukos, elektrinė) priklauso nuo nagrinėjamo kūno padėties erdvėje arba yra koordinačių funkcija $\vec{F}(x,y,z)$. Žiūrint į (5) lygybes, nesunku suprasti, kad tik nuo koordinačių priklausančios jėgos gali būti konservatyviosios.

Pratybos

1. Įkritusi į s=5m gylio duobę, m=1kg masės katė traukiama virve į viršų pastoviu greičiu v_0=1m/s greičiu. Kaip pasikeistų katei ištraukti reikalingas darbas, jeigu ji dar liptų virve i viršų a=0,1m/s^2 pagreičiu?

Sprendimas

Kai katė virve nelipa, reikalingas darbas A_1=mgs=49J.

Kai katė lipa virve pagreičiu a, T_2 – mg = ma, ir virvės įtempimas T_2 = m(g+a). Katės nueitas kelias $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Iš čia laikas $t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2as}}{a}$. Tiek laiko reikės traukti ir virvę. Virvė nueis kelią s_2 = v_0t, ir atliktas darbas A_2 = T_2s_2 = T_2v_0t. Įrašę T_2 ir t reikšmes, gauname $A_2 = m(g+a)v_0 \cdot \frac{\left(-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2as}\right)}{a} = 41J.$

Darbas sumažėtų $A_1 - A_2$ = 8 J katės energijos sąskaita.

2. Remdamiesi (5) lygybe, gaukite į nedidelį aukštį h virš Žemės paviršiaus pakelto kūno potencinę energiją U_h = mgh. Kokia papildoma prielaida (potencinės energijos atskaitymo pradžia) tam reikalinga?

3. Parodykite, kad potencinė energija U_h = mgh yra apytikrė išraiška potencinės energijos $U_g = -G\frac{m_1 m_2}{r}$.

1.5 Teorema apie sistemos kinetinės energijos kitimą. Mechaninės energijos tvermės dėsnis

Kūno, kurio masė m ir greitis $\vec{v}$, kinetine energija vadinamas dydis

$$T = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Mechaninės sistemos kinetinė energija yra lygi visų jos materialiųjų taškų kinetinių energijų sumai:

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}.} \quad (2)$$

Kinetinė energija matuojama tais pačiais vienetais kaip ir potencinė energija ir darbas.

Išreiškime kinetinę energiją T per sistemos masių centro savybes. Dar kartą pasinaudosime 1.3 paragrafo (4) lygybe:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i^{'}.$$

Įrašome šią lygybę į (2):

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_i^{'})^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_c^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^{'2} + \sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_c \cdot \vec{v}_i^{'}). \quad (3)$$

Čia

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_c^2 = v_c^2 \sum_{i=1}^{n} m_i = M v_c^2. \quad (4)$$

Pažymėkime:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^{'2} = T_c. \quad (5)$$

T_c vadinasi sistemos kinetinė energija masių centro atžvilgiu. Mat, kaip matėme 1.3 paragrafe $\vec{v}_i^{'}$ yra taško greitis masių centro atžvilgiu.

Dydis

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_c \cdot \vec{v}_i^{'}) = \left(\vec{v}_c \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^{'}\right) = \left(\vec{v}_c \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt}\right) = \left(\vec{v}_c \cdot \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i\right) = 0,$$

nes $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i = 0$ (žr. 1.3 paragrafą).

Taigi

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{v}_c \cdot \vec{v}_i^{'}) = 0. \quad (6)$$

Lygybes (4), (5) ir (6) įrašę į (3), gauname:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T_c.} \quad (7)$$

Ši išvada vadinama **Kionigo teorema.** Ją žodžiais pasakytume taip:

Sistemos kinetinė energija yra lygi masių centro kinetinei energijai plius kinetinė energija masių centro atžvilgiu.

Kionigo teorema yra analogiška 1.3 paragrafo teoremai (8) apie sistemos judesio kiekio momentą.

Vokiečių fizikas A. Kionigas gyveno 1856 – 1901 m.

Dabar pereisime prie šio skirsnio pavadinime paminėtos teoremos. Prieš tai gausime vieną pagalbinę lygybę.

Parašykime vieną kūną veikiančios jėgos $\vec{F}$ elementarųjį (be galo mažą) darbą (žr. 1.4 paragrafo (3) formulę):

$$dA = (\vec{F} d\vec{r}).$$

Pkeiskime tą išraišką

$$dA = (m\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \left(m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt\right) = m(\vec{v} \cdot d\vec{v}).$$

Parašykime dar vieną išvestinę:

$$\frac{d(\vec{v}^2)}{dt} = 2\left(\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}\right) \Rightarrow (\vec{v} \cdot d\vec{v}) = d\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Todėl $dA = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(m\frac{v^2}{2}\right)$;

arba

$$\boxed{\mathrm{dT = dA.}} \quad (8)$$

Ši lygybė reiškia teoremą apie vieno kūno kinetinės energijos kitimą. Žodžiais ją formuluokime taip:

Kūno kinetinės energijos mažas pokytis yra lygus ***kūną veikiančių jėgų*** *atliktam elementariam darbui.*

Baigtinis kinetinės energijos pokytis arba pokytis per baigtinį laiko tarpą bus lygus jėgų atliktam darbui per tą patį laiko tarpą.

Kai atliktas darbas dA > 0, kinetinė energija didėja, kai dA < 0, T mažėja, kai dA = 0, T nekinta. Ši teorema yra labai bendra, nes ji tinka visokioms jėgoms.

Matematiniai veiksmai, kuriuos atlikome, gaudami (8) lygybę, yra įrodymas, kad $T = \frac{1}{2}mv^2$, o ne kokia nors kitokia išraiška.

Grįžkime prie mechaninės sistemos.

Parašykime (8) teoremą labiau išraikštai vienam **sistemos materialiajam taškui:**

$$dT_i = dA_i^v + dA_i^i, \quad (9)$$

(i=1,2,...,n)

kur dA_i^v *ir* dA_i^i yra tašką veikiančių vidinių ir išorinių jėgų elementarusis darbas.

Sudėkime visas (9) lygybes panariui:

$$\sum_{i=1}^{n} dT_i = \sum_{i=1}^{n} dA_i^v + \sum_{i=1}^{n} dA_i^i.$$

Čia

$\sum_{i=1}^{n} dT_i = d\sum_{i=1}^{n} T_i = dT$. Tai sistemos energijos mažas pokytis.

$\sum_{i=1}^{n} dA_i^v = d\sum_{i=1}^{n} A_i^v = dA^v$. Tai visus sistemos materialiuosius taškus veikiančių visų vidinių jėgų visas elementarusis darbas. Jis nelygus nuliui, nes vidines jėgas dėstant poromis, pagal III Niutono dėsnį viena kiekvienos poros jėga veikia vieną kūną, o antra poros jėga veikia kitą kūną.

$\sum_{i=1}^{n} dA_i^i = d\sum_{i=1}^{n} A_i^i = dA^i$. Tai visų išorinių jėgų elementarusis darbas.

Todėl galime rašyti:

$$\boxed{dT = dA^v + dA^i.} \quad (10)$$

Tai **teorema apie sistemos kinetinės energijos kitimą.** Pasakysime ją žodžiais:

Sistemos kinetinės energijos mažas pokytis yra lygus visų ***vidinių ir*** *visų* ***išorinių*** *jėgų elementarių darbų sumai.*

Kinetinės energijos baigtinis pokytis per baigtinį laiko tarpą yra lygus vidinių ir išorinių jėgų darbui per tą patį laiko tarpą.

Tai ketvirtoji (paskutinė) pagrindinė sistemos dinamikos teorema. Su šia teorema susijęs labai bendras apibrėžimas, kad energija yra dydis, kurio pokytį galima išmatuoti tiktai atliktu darbu.

Kai $dA^v = 0$ ir $dA^i = 0$, sistemos kinetinė energija

$$\boxed{T = \text{const.}} \qquad (11)$$

Tai **kinetinės energijos tvermės dėsnis.** Jis apytikriai galioja, pavyzdžiui, 2 kūnų tampriam smūgiui.

Kai mechaninėje sistemoje taškų tarpusavio padėtis nekinta, sistemą vadina kietuoju kūnu. Tada vidinės jėgos darbo neatlieka, todėl $dA^v = 0$, ir iš (10) gauname:

$$\underline{dT = dA^i}. \qquad (12)$$

Tai teorema apie kinetinės energijos kitimą kietajam kūnui. Kietojo kūnop dinamiką nagrinėsime kitame skyriuje.

Pereikime prie paskutinio šio skirsnio klausimo – mechaninės sistemos energijos tvermės dėsnio.

Tegul vidinės jėgos yra konservatyvios. Tokių jėgų pavyzdžius aptarėme praeitame skirsnyje. Pagal to skirsnio (5) formulę gauname:

$$dA^v = - dU^v,$$

kur U^v – vidinė potencinė energija. Pvz., Saulės sistemos kūnų tarpusavio sąveikos energija.

Tegul išorinės jėgos yra konservatyvios. Tada

$$dA^i = - dU^i,$$

kur U^i – išorinė potencinė energija. Pvz., du surišti kūnai sunkio jėgų lauke, kur nėra oro.

Tegul vidinės ir išorinės jėgos yra konservatyviosios. Pvz., du tamprūs rutuliai, surišti tampriu siūlu, sunkio jėgų lauke, kur nėra oro. Tada iš (10) gausime:

$$dT = - dU^v - dU^i \text{ arba}$$

$$d(T+U^v+U^i) = 0, \text{ ir}$$

$$\boxed{E = T + U^v + U^i = \text{const.}} \qquad (13)$$

Čia E yra **pilnutinė mechaninė sistemos energija** arba trumpiau – **mechaninė sistemos energija.**

Gauta (13) išvada reiškia **mechaninės energijos tvermės dėsnį.** Jį galima taip suformuluoti:

Kai visos jėgos konservatyviosios, sistemos mechaninė energija yra pastovi.

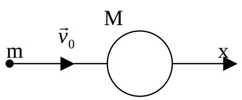
Tokios sistemos pavyzdį jau minėjome.

Lotyniškai „conservare“ reiškia išlaikyti, išsaugoti. Su tuo susijęs ir jėgų, kurioms veikiant energija išsilaiko, pavadinimas.

Tokių sistemų, kurioms tiksliai galiotų mechaninės energijos tvermės dėsnis, yra mažai, nes dauguma atvejų veikia trinties arba aplinkų pasipriešinimo jėgos, kurios nėra konservatyvios.

Visada galioja bendras energijos tvermės dėsnis, kuris apima ne tik mechaninę, bet ir visas kitas energijos rūšis – šiluminę, elektromagnetinę, branduolinę, kt.

Pratybos



16 pav.

1. Judančio elektrono ir nejudančio protono smūgis yra tamprus ir tiesioginis. Protono masė 1840 kartų didesnė už elektrono masę. Kuri dalis elektrono kinetinės energijos smūgio metu perduodama protonui?

Sprendimas

Pažymėkime elektrono ir protono masę m ir M, elektrono greitį prieš smūgį $\vec{v}_0$, o elektrono ir protono

greičio projekkcijas x ašyje v_m ir v_M. Esant tiesioginiam smūgiui, elektrono greitis $\vec{v}_0$ nukreiptas į protono centrą (16 pav.). Galioja judesio kiekio ir kinetinės energijos tvermės dėsniai:

$$mv_0 = Mv_M + mv_m,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mv_M^2}{2} + \frac{mv_m^2}{2}.$$

Iš šių lygčių randame: $v_M = \frac{2m}{m+M} v_0$.

Ieškomąją elektrono kinetinės energijos dalį pažymėkime y:

$$y = \frac{Mv_M^2}{mv_0^2} = \frac{4mM}{(m+M)^2} \approx \frac{1}{460} \approx 0{,}0022.$$

2. Neutronas lengvai praeina pro švino sluoksnį, tačiau susilaiko tokiame pat parafino, vandens arba kitos medžiagos, turinčios vandenilio, sluoksnyje. Paaiškinkite, kodėl?

3. Žiedo, kurio spindulys R, vidiniu paviršiumi juda mažas rutuliukas. Žiedo plokštuma statmena žemės paviršiui. Judėdamas rutuliukas pasiekia aukštį R/2.

Kokiu mažiausiu pastovaus didumo pagreičiu vertikalia kryptimi turi pradėti judėti žiedas, kad rutuliukas, judėdamas vidiniu žiedo paviršiumi, pasiektų jo viršutinį tašką? (Ats.: a = 4g/5, nukreiptas žemyn).

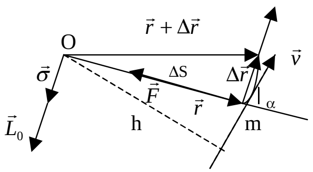
II. DANGAUS MECHANIKOS ELEMENTAI

2.1 Materialaus taško judėjimas centrinių jėgų lauke

Nagrinėjant materialaus taško judėjimą, dažni atvejai, kai tašką veikia **jėgos, kurių vektorių linijos susikerta viename, nejudančiame erdvės taške.** Jeigu be to jos dar yra atstumo nuo taško funkcijos, tai toks laukas yra vadinamas centriniu lauku, o jėgos **vadinamos centrinėmis jėgomis.** Daugelyje uždavinių veikianti jėga yra atvirkščiai proporcinga atstumo kvadratui. Tokie uždaviniai dažnai sutinkami dangaus mechanikoje (planetų judėjimas, kūnų judėjimas Žemės gravitaciniame lauke), elektrostatikoje (elektringos dalelės judėjimas kuloniniame lauke), atominėje fizikoje ir kt. Tokio tipo uždaviniai yra vadinami kepleriniais uždaviniais.

Panagrinėkime kai kuriuos materialaus taško, judančio centrinių jėgų lauke bendruosius dėsningumus.

<u>1. Taško, judančio centrinių jėgų lauke, trajektorija yra plokščia, t.y. guli pastovioje plokštumoje.</u>



17 pav.

Tegul tašką m veikia centrinė jėga $\vec{F}$, kurios veikimo linija eina per centrą O (17 pav.). Brėžinyje vektoriai $\vec{r}$ *ir* $\vec{v}$ pavaizduoti popieriaus lapo plokštumoje. Pagal teoremą apie judesio kiekio momento kitimą (žr. 1.3 paragrafo (14) formulę) galime rašyti

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F}) = 0, \qquad (1)$$

kur $\vec{L}_0$ yra judesio kiekio momentas taško O atžvilgiu (17 pav. jis nukreiptas į skaitytoją), o $\vec{M}_0(\vec{F})$ - jėgos $\vec{F}$ momentas to paties taško O atžvilgiu. Pastarasis yra lygus nuliui, nes jėgos $\vec{F}$ linija eina eina per tašką O. Iš (1) lygybės seka, kad

$$\vec{L}_0 = [\vec{r}, m\vec{v}] = const. \qquad (2)$$

Kadangi vektorius $\vec{L}_0$ yra statmenas vektoriams $\vec{r}$ *ir* $\vec{v}$ (žr. Kinematikos skyrių), tai gauname išvadą, kad taškas m judės pastovioje plokštumoje, statmenoje vektoriui $\vec{L}_0$. Tuo galima paaiškinti planetų judėjimą apie Saulę plokščiomis trajektorijomis. Panašų klausimą jau aptarėme 1.3 paragrafo pabaigoje.

<u>2. Jeigu taškas juda centrinių jėgų lauke, tai spindulys vektorius, jungiantis jėgų centrą su judančiu tašku, brėžia plotą tiesiog proporcingą laikui.</u>

Į formulę (2) įveskime naują dydį:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]. \qquad (3)$$

Jis vadinasi **sektoriniu greičiu.** Iš (2) matyti, kad sektorinio greičio kryptis sutampa su judesio kiekio momento kryptimi (17 pav.) Iš (3) ir (2) gauname:

$$\vec{L}_0 = 2m\vec{\sigma} = const. \qquad (4)$$

ir

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}] = \vec{c}, \qquad (5)$$

kur $\vec{c}$ - vektorinė ko nstanta. Sektorinio greičio modulis (žr. 17 pav.):

$$\sigma = \frac{1}{2} rv\sin\alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}r\sin\alpha\cdot\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}h\Delta r}{\Delta t}.$$

Kampas tarp $\Delta\vec{r}$ *ir* $\vec{v}$ mažas, todėl

$$\frac{1}{2}h\Delta r \approx \Delta S,$$

ΔS yra gautos figūros plotas arba plotas, kurį per laiką Δt nubrėžia spindulys vektorius r. Taigi matome, kad

$$\sigma = \lim\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = c. \qquad (6)$$

Iš (6) lygybės:

dS = cdt, o suintegravus

$$S = ct + S_0. \qquad (7)$$

Čia S – spindulio vektoriaus nubrėžtas iki laiko momento t plotas, S_0 – pradinis plotas. Paskutinioji lygybė reiškia tai, ką norėjome įrodyti.

Sektorinio greičio σ vienetas yra 1 m^2/s. Atskiro pavadinimo jis neturi.

2.2 Planetų judėjimas. Keplerio dėsniai

Lenkų astronomoas M. Kopernikas, gyvenęs 1473 – 1543 m., teigė, kad visos planetos apie Saulę juda apskritimais ir nurodė jų santykinius spindulius. Tačiau kokie yra absoliutiniai atstumai tarp Saulės ir planetų, jis nenustatė. Kitas mokslininkas, Koperniko pasekėjas, vokietis J. Kepleris (1571 – 1630m.), remdamasis Ticho Bragės (1546 – 1601 m.) ir savo paties Marso planetos stebųjimais, bandė surasti jos orbitos spindulį. Keplerio darbas buvo apvainikuotas svarbiais rezultatais – nustatyti trys planetų judėjimo dėsniai, kurie vadinami **Keplerio dėsniais.**

Pirmas dėsnis sako, kad **visos planetos apie Saulę juda elipsinėmis orbitomis, kurių viename židinyje, bendrame visoms planetoms, yra Saulė.**

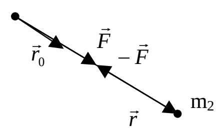
Antrąjį dėsnį nepasakę pavadinimo mes jau esame užrašę praeito skirsnio (5) arba (7) formule, kurias galima ir taip perskaityti: **planetų judėjimo apie Saulę sektoriniai greičiai yra pastovūs.**

Trečiasis Keplerio dėsnis teigia, kad **planetų apsisukimo apie Saulę periodų kvadratai yra proporcingi jų elipsinių orbitų pusašių kubams.**

Kepleris, nustatęs kinematinius planetų judėjimo dėsnius, nepaaiškino kodėl jos taip juda, nors ir įtarė, kad priežastimi yra jėga, panaši į tą, kuri veikia tarp dviejų magnetų. Puikiai šią problemą išsprendė kitas garsus mokslininkas, anglas I. Niutonas (1643 – 1727 m.).

Remdamasis Keplerio dėsniais, Niutonas nustatė labai svarbų gamtos dėsnį, vadinamą **visuotinės traukos dėsniu,** kuris yra pagrindinis dangaus mechanikos dėsnis. Pelnytai jis yra vadinamas Visatos valdovu. Aptarkime tą dėsnį.

Iš dinamikos skyriaus žinome, kad dvi taškinės masės m_1 ir m_2, tarp kurių atstumas r, traukia viena kitą jėgomis, kurių didumas



18 pav.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (1)$$

Proporcingumo koeficientas G yra vadinamas gravitacine konstanta. Jos vertė, išmatuota eksperimentiškai, šiuo metu yra žinoma tokiu tikslumu:

$$G = \left(6{,}6720\cdot 10^{-11} \pm 0{,}0041\cdot 10^{-11}\right)\frac{m^3}{kg\cdot s^2}.$$

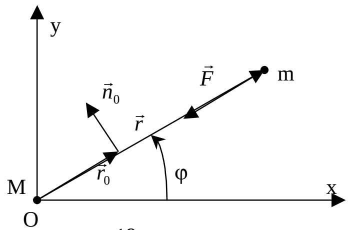
Jėgos, kuria masė m_2 traukia masę m_1, vektorius (žr. 18 pav.)

$$\boxed{\vec F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec r_0.} \qquad (2)$$

Čia $\vec r_0$ - spindulio vektoriaus $\vec r$ vienetinis vektorius (r_0=1).

Jeigu turėtume du ne taškinius kūnus, tai traukos jėga tarp jų būtų atstojamoji tų jėgų, kurios veikia tarp atskirų elementų, o atstojamosios jėgos pridėjimo taškas labai dažnai sutampa su masės centru. (1) arba (2) tiksliai tinka ir vienalyčiams rutuliams.

Naudodamasis iš Keplerio dėsnių gautą visuotinės traukos dėsnį, Niutonas išsprendė atvirkščią uždavinį, t.y. iš visuotinės traukos dėsnio matematiškai išvedė Keplerio dėsnius. Be to, tokiu būdu išvesti Keplerio dėsniai yra tikslesni. Trumpai panagrinėkime šio uždavinio sprendimą. Nuosekliai jį išspręesti negalėsime, kadangi čia yra reikalingas tam tikras matematinis pasiruošimas.



19 pav.

Tegul turime du kūnus, kurių masės yra M ir m. Koordinačių sistemos pradžią, kurios atžvilgiu nagrinėsime kūno m judėjimą, susiekime su kūnu M (19 pav.).

Parašykime taško m judėjimo lygtį koordinačių sistemoje xOy. Jėgų laukas, kuriame juda taškas m, yra centrinis, kurio centras yra koordinačių pradžioje. Masės m ir M viena kitą traukia jėga, išreiškiama pagal visuotinės traukos dėsnį (1). Todėl abu taškai judės su pagreičiu, ir mūsų pasirinktoji koordinačių sistema bus neinercinė.

Užrašant antrąjį Niutono dėsnį (judėjimo lygtį) neinercinėje koordinačių sistemoje, reikia prie tašką m veikiančių tikrų jėgų dar pridėti inercijos jėgas. Antrąjį Niutono dėsnį taškui m reikia užrašyti taip

$$m\vec a = \vec F + \vec F_i. \qquad (3)$$

Čia $\vec a$ yra taško m pagreitis neinercinėje sistemoje, $\vec F$ - jį veikianti traukos jėga:

$$\vec F = -G\frac{Mm}{r^2}\vec r_0.$$

o $\vec F_i$ - nešimo inercijos jėjga, lygi koordinačių sistemos pagreičio ir taško masės m sandaugai su priešingu ženklu:

$$\vec F_i = -m\vec a_n = -m\cdot G\frac{mM}{r^2}\vec r_0 : M;$$

$$\vec F_i = -G\frac{m^2}{r^2}\vec r_0.$$

Taigi

$$m\vec a = -G\left(\frac{mM}{r^2}+\frac{m^2}{r^2}\right)\vec r_0 = -G\frac{m(m+M)}{r^2}\vec r_0 \qquad (4)$$

ir

$$\vec a = -G\frac{m+M}{r^2}\vec r_0. \qquad (5)$$

Kadangi $\vec a = \dfrac{d\vec v}{dt} = \dfrac{d^2\vec r}{dt^2}$, tai judėjimo lygtis vektorine forma bus tokia:

$$\frac{d^2\vec r}{dt^2} = \frac{-G(m+M)}{r^2}\vec r_0. \qquad (6)$$

Išsprendę šią lygtį, galėsim gauti Keplerio dėsnius. Lygtis paprastai sprendžiama polinėje koordinačių sistemoje r, φ. Čia φ yra kampas tarp spindulio vektoriaus $\vec r$ *ir* x ašies (19 pav.). Be įrodymo parašykime vektorinės lygties (6) projekcijas į $\vec r_0$ *ir* $\vec n_0$ kryptis:

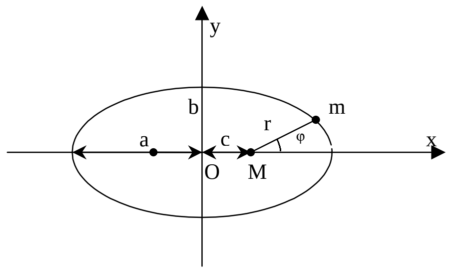
$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -G\dfrac{m+M}{r^2} \\ r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt} = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Šios lygčių sistemos sprendiniai yra tokie

$$\left.\begin{aligned} &1.\ r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}; \\ &2.\ \sigma = \frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = const; \\ &3.\ \frac{T^2(M+m)}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G} = const. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

(8) lygtys ir yra patikslinti Keplerio dėsniai.

Pirmoji (8) lygtis reiškia patikslintą pirmąjį Keplerio dėsnį. Tai antros eilės kreivės lygtis. Kokią kreivę aprašo ši lygtis, priklauso nuo parametro e, kuris vadinamas ekscentricitetu. Jeigu e<1, kreivė bus elipsė, kai e=1 – parabolė, kai e>1 – hiperbolė, ir kai e=0 – apskritimas.



20 pav.

Elipsės atveju ekscentricitetas parodo elipsės susiplojimą ir yra lygus e=c/a, kur c atstumas nuo elipsės židinio iki jos centro (20 pav.). Atstumas a yra elipsės didysis pusašis, kampas φ parodytas brėžinyje.

Antroji (8) lygtis reiškia antrąjį, mūsų jau nagrinėtą, Keplerio dėsnį.

Trečioji (8) lygtis reiškia trečiąjį patikslintą Keplerio dėsnį. Patikslinimas yras tas, kad į jo išraišką įeina abiejų kūbų masių suma. Kepleris nagrinėjo atskirą atvejį, kai M>>m. Tuomet m(8) trečiojoje lygtyje galime atmesti, ir šis dėsnis turės tą formą, kurią nustatė Kepleris. Jeigu laikysime, kad Saulės masė M_Θ = M yra daug didesnė už bet kurios planetos masę m, tai

$$\frac{T^2}{a^3}(M_\Theta + m) \approx \frac{T^2}{a^3}M_\Theta = \frac{4\pi^2}{G};\ arba\ \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_\Theta} = const.$$

2.3 Kosminiai greičiai

Paskaičiuokime vieno kūno, judančio kito kūno traukos lauke, santykinį greitį v koordinačių sistemos, susietos su antruoju kūnu atžvilgiu. Užrašykime energijos tvermės dėsnį:

$$T + U = E = \text{const.} \qquad (1)$$

Kinetinė energija

$$T = \frac{mv^2}{2}. \qquad (2)$$

Kadangi kūnai traukia vienas kitą, tai pasirinktoji koordinačių sistema judės su pagreičiu, t.y. bus neinercinė. Nagrinėjant kūno judėjimą tokioje koordinačių sistemoje, kaip matėme praeitame skirsnyje, reikia prie kūną veikiančių jėgų prisumuoti ir joje atsirandančias inercijos jėgas. Pagal 2.2 paragrafo (4) formulę sumarinė jėga

$$\vec{F} = -Gm\frac{m+M}{r^2}\vec{r}_0,$$

kur m ir M yra nagrinėjamų kūnų masės, o r – atstumas tarp jų. Pasinaudojus 1.4 paragrafe pateikta potencinės energijos skaičiavimo metodika, gausime:

$$U = \int_r^{\infty}(\vec{F}d\vec{r}) = -\int_r^{\infty} G\frac{m(m+M)}{r^2}dr = -G\frac{m(m+M)}{r}. \qquad (3)$$

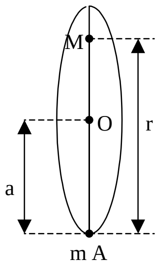
(2) ir (3) įrašę į (1), gauname:

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{m(m+M)}{r} = const. \qquad (4)$$

arba

$$\frac{v^2}{2} - G\frac{(m+M)}{r} = c, \text{ kur } c = \text{const / m}. \qquad (5)$$

Iš šios lygties galima rasti greitį v, jeigu yra žinoma konstantac. Su ta pačia energija E kūnas gali judėti įvairiomis trajektorijomis. Tegul trajektorija yra labai suplota elipsė (21 pav.), t.y. kūnas m juda beveik spindulio r kryptimi, ir tegul jo pradinis greitis buvo toks, kad tolimiausiame taške A jo greitis artimas nuliui ($v_A \approx 0$).



21 pav.

Atstumas r tame taške tarp kūnų m ir M bus apytiksliai lygus elipsės didžiajai ašiai, t.y. r=2a (21 pav.).

Įrašę šias v ir r reikšmes į (5) lygtį, gausime

$$c = -G\frac{m+M}{2a}. \qquad (6)$$

Vėl sugrįžę prie (5) lygties, galima surasti greitį

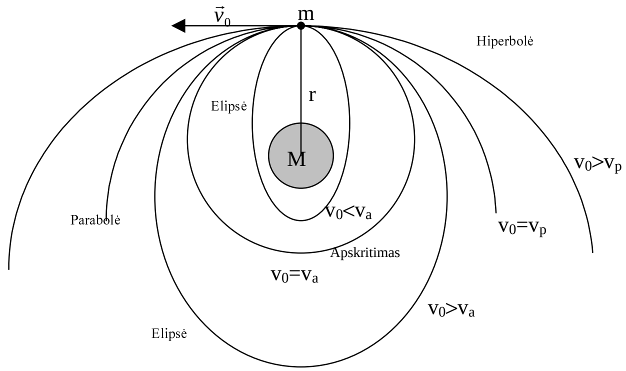
$$\boxed{v = \sqrt{G(M+m)(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})}}. \qquad (7)$$

(7) formulų duoda mums kūno m greičio priklausomybę nuo atstumo r iki centrinio kūno M. Pagal ją galime rasti greitį bet kuriame trajektorijos taške. Jeigu kuriame nors orbitos taške yra žinomas atstumas r ir greitis v, tai iš šios formulės galima rasti orbitos didįjį pusašį a.

Kai judančio kūno m orbita yra apskritimas, tai r=a ir iš (7) greitis

$$\boxed{v_a = \sqrt{G\frac{m+M}{r}}} \qquad (8)$$

vadinamas apskritiminiu greičiu. Jis visuose orbitos taškuose vienodas (22 pav.).



22 pav.

Tada, kai atstume r pradinis greitis $v_0<v_a$, kūno trajektorija bus elipsė. Elipsę turėsime ir tada, kai $v_0>v_a$. Didindami greitį galėsime pasiekti, kad trajektorija taptų parabole, t.y. a=∞. Tuomet iš (7) greitis

$$\boxed{v_p = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{r}} = \sqrt{2}v_a} \qquad (9)$$

yra vadinamas paraboliniu greičiu. Jeigu $v_0>v_p$ trajektorija bus hiperbolė.

Apskritiminis greitis, kuriuo kūnas skrieja nutolęs nuo centrinio kūno centro atstumu, lygiu to kūno spinduliui, vadinamas **pirmuoju kosminiu greičiu,** o parabolinis greitis, startuojant nuo kūno paviršiaus – **antruoju kosminiu greičiu.** Žemės atveju masė $m_ž=5{,}9742\cdot10^{24}$ kg, jos spindulys R=6738 km, tai minėti greičiai pagal (8) ir (9) formules ($M=m_ž$, $m<<m_ž$) bus tokie:

$$\boxed{\begin{aligned} v_a &= v_{1k} = \frac{\sqrt{Gm_ž}}{R} = 7{,}912\,km/s;\\ v_p &= v_{2k} = \sqrt{2}v_{1k} = 11{,}9\,km/s.\end{aligned}} \qquad (10)$$

Suteikus kūnui pirmąjį kosminį greitį arti Žemės ppaviršiaus horizontalia kryptimi, jis taps dirbtiniu Žemės palydovu, o suteikus antrąjį kosminį greitį bet kokia kryptimi – jis visam laikui paliks Žemę ir išeis į orbitą aplink Saulę, t.y. taps dirbtine planetėle.

Nagrinėdami šiuos klausimus, nekreipėme dėmesio į planetos atmosferą, kuri turi esminę įtaką judant tokiais dideliais greičiais. Dėl trinties kūnas įkaistų ir sudegtų. Todėl kosminio aparato paleidimas vyksta dviem etapais: pirmajame etape jis yra pakeliamas į aukštį, nemažesnį kaip 100 km, ir po to antrame etape jam suteikiamas reikiamas greitis. Mūsų minėti kosminiai greičiai turi daugiau teorinę prasmę.

Nūnai yra sukurtos ir paleistos kosminės stotys, kurios gali nugalėti Saulės trauką ir kažkada išeis iš Saulės sistemos ribų, toliau tęsdamos savo keliones tarpžvaigždinėje erdvėje. Surasime kokį greitį prie Žemės paviršiaus reikia suteikti kūnui, kad jis galėtų palikti Saulės sistemą. Toks greitis Žemės atžvilgiu yra vadinamas **trečiuoju kosminiu greičiu.**

Nagrinėjant tarpplanetinės stoties judėjimą, tenka atsižvelgti ir į kitų Saulės sistemos kūnų poveikį. Mūsų nagrinėtas dviejų kūnų uždavinys (arba keplerinis uuždavinys) tada bus tik apytikris. Tačiau jo atsisakyti neverta, kadangi daugeliui atvejų gaunamų rezultatų tikslumas yra pakankamai geras.

Taigi judantį kūną gali veikti ne vienas, o keli kūnai. Tačiau dalies jų sukelti trikdymai gali būti maži, ir jų galime nepaisyti. Jeigu nagrinėjamo kūno judėjimą kokioje nors erdvės dalyje nulemia tik vienas traukos centras, tai uždavinį galima laikyti kepleriniu. Tokia erdvės dalis apytikriai bus sferos viduje, kuri yra vadinama vieno kūno veikimo sfera kitų kūnų atžvilgiu.

Žemės veikimo sferos spindulys Saulės atžvilgiu yra lygus 925000 km, o Mėnulio veikimo sferos spindulys Žemės atžvilgiu – 66000 km. Kūno, nutolusio nuo Mėnulio netoliau kaip 66000km, judėjimą Mėnulio atžvilgiu nulemia tik Mėnulis

Suraskime trečiąjį kosminį greitį. Pasinaudokime energijos tvermės dėsniu. Pažymėkime trečiąjį kosminį (kosminio aparato) greitį v_{3k}, o to paties aparato greitį Žemės atžvilgiu, jam esant ant Žemės veikimo sferos paviršiaus – $v_{iš}$, kurį toliau vadinsime išėjimo greičiu. Žemės spindulį pažymėkime R, o jos sferos spindulį r. Tuomet energijos tvermės dėsnį (4) parašysime taip

$$\frac{mv_{3k}^2}{2} - G\frac{mm_ž}{R} = \frac{mv_{iš}^2}{2} - G\frac{mm_ž}{r}. \qquad (11)$$

Čia kosminio aparato masę m laikėme daug mažesne už Žemės masę ($m_ž >> m$). Kosminio aparato išėjimo greitis judančios Žemės atžvilgiu, kai jis juda ta pačia kryptimi kaip ir Žemė apie Saulę, yra lygus:

$$v_{iš} = v_p - v_a, \qquad (12)$$

kur v_a ir v_p yra apskritiminis ir parabolinis kūno greičiai Saulės atžvilgiu atstumu, lygiu vidutiniam atstumui tarp Žemės ir Saulės a. Pagal (8) ir (9) formules ($m << M = M_\Theta$)

$$v_a = \sqrt{\frac{GM_\Theta}{a}};\ v_p = \sqrt{\frac{2GM_\Theta}{a}} = \sqrt{2}v_a. \qquad (13)$$

kur M_Θ yra Saulės masė.

Iš (11):

$$v_{3k} = \sqrt{v_{iš}^2 + 2Gm_ž(\frac{1}{R} - \frac{1}{r})}.$$

Iš ankstesnio teksto matyti, kad r>>R, todėl $\frac{1}{R} >> \frac{1}{r}$, ir

$$v_{3k} = \sqrt{v_{iš}^2 + \frac{2Gm_ž}{R}} = \sqrt{v_{iš}^2 + v_{2k}^2}. \qquad (14)$$

Arba, remiantis dar (12) ir (13) gausime:

$$\boxed{v_{3k} = \sqrt{G(\frac{M_\Theta}{a}(\sqrt{2}-1)^2 + \frac{2m_ž}{R})}.} \qquad (15)$$

Šią formulę galima taikyti ir bet kuriai kitai planetai, įrašant atitinkamos planetos dydžius. Žemėje v_{3k}=16,65 km/s.

Pratybos

1. Gaukite formulę ir apskaičiuokite, koks būtų trečiasis kosminis greitis Žemėje, jeigu kosminis aparatas būtų paleidžiamas priešinga kryptimi, negu Žemės juda aplink Saulę.

Saulės masė M_Θ = 1,98·10^{30} kg. Žemės orbitos spindulys a = 150·10^{6} km, Žemės masė $m_ž$=5,97·10^{24} kg ir spindulys R = 6378 km, gravitacinė konstanta G = 6,67·10^{-11} m^3/kg.s^2. (Ats.:72,77 km/s).

2.4 Sunkio jėga

Sunkio jėga mes vadiname vektorių

$$\vec{P} = m\vec{g}, \qquad (1)$$

kur m yra kūno masė, o $\vec{g}$ - laisvojo kritimo pagreitis. Labai dažnai kūno sunkio jėga yra vadinama Žemės traukos jėga, kuria ji veikia tą kūną. Tačiau toks apibrėžimas yra apytikris ir ne visada juo galime tenkintis.

Pagreitis $\vec{g}$ priklauso ne vien tik nuo Žemės traukos jėgos, bet ir nuo kitų dangaus kūnų traukos, taip pat nuo Žemės judėjimo. Žemės sukasi apie savo ašį, ją traukia kiti dangaus kūnai ir todėl ji juda su pagreičiu. Koordinačių sistema, susieta su Žeme, griežčiau tariant, yra neinercinė. Todėl tiksliau skaičiuojant $\vec{g}$, reikia antrąjį Niutono dėsnį užrašyti neinercinėje koordinačių sistemoje ir dar pridėti sąveikos jėgas su kitais dangaus kūnais:

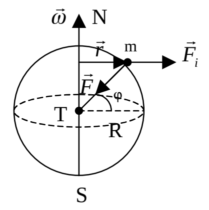
$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F} + \vec{F}_i + \vec{F}_p + ... \qquad (2)$$

Svarbiausia čia yra Žemės traukos jėga $\vec{F}$. Jėga $\vec{F}_i$ yra inercijos jėga dėl Žemės sukimosi, o jėga $\vec{F}_p$ išreiškia kitų dangaus kūnų poveikį. Jėgos $\vec{F}_i$ ir $\vec{F}_p$ - nedidelės pataisos, tačiau kai kuriems reiškiniams paaiškinti šios pataisos yra esminės.

Iš dinamikos skyriaus žinome, kad inercijos jėga dėl sukimosi yra išcentrinė jėga. Jos didumas priklauso nuo Žemės sukimosi kampinio greičio ω ir nuo kūno atstumo r iki sukimosi ašies (23 pav.). Matematiškai ši priklausomybė parašoma taip:

$$\boxed{F_i = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\varphi,} \qquad (3)$$

kur φ - geografinės platumos kampas. Vektorius $\vec{F}_i$ nukreiptas spindulio $\vec{r}$ kryptimi.



23 pav.

Kiti dangaus kūnai traukia mūsų nagrinėjamą kūną m ir taip pat Žemę, kuria suteikia pagreitį $\vec{a}_T$.

Jeigu atsižvelgsime tik į vieną dangaus kūną L šalia žemės, tai antrąjį Niutono dėsnį (2) galėsime parašyti taip:

$$\vec{P} = m\vec{g} = \vec{F} + \vec{F}_i + \vec{F}_L + \vec{F}_{TL}. \qquad (4)$$

Čia $\vec{F}_L$ yra traukos jėga, kuria L traukia mūsų kūną m, o $\vec{F}_{TL}$ - inercijos jėga, kuri atsiranda dėl to, kad kūnas L suteikia Žemei pagreitį $\vec{a}_T$. Tos jėgos yra tokios:

$$\vec{F}_L = m\vec{a}_L;\ \vec{F}_{TL} = -m\vec{a}_{TL}.$$

Jų vektorinė suma

$$\vec{F}_L + \vec{F}_{TL} = m(\vec{a}_L - \vec{a}_{TL}) = \vec{F}_p \qquad (5)$$

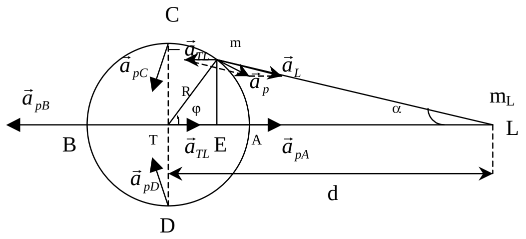
yra vadinama **potvynine jėga.** Taigi

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_i + \vec{F}_p. \qquad (6)$$

Pagreitis

$$\vec{a}_p = \vec{a}_L - \vec{a}_{TL} \qquad (7)$$

vadinamas **potvyniniu pagreičiu.** Jį galime surasti. Paimkime vieną, esantį šalia Žemės kūną (24pav.), kurio masė yra m_L, o atstumas iki Žemės centro d.



24 pav.

Kampą α tarp krypčių į žemės centrą ir kūną surasime iš $\perp\Delta TmE$ ir $\perp\Delta mLE$:

$$tg\alpha = \frac{R\sin\varphi}{d - R\cos\varphi}.$$

Kampas φ sutaptų su geografinės platumos kampu, jeigu kūnas L judėtų pusiaujo plokštumoje.

Iš trikampio, kurio kraštinės a_p, a_L ir a_{TL}, galime parašyti:

$$a_p^2 = a_L^2 + a_{TL}^2 - 2a_L a_{TL}\cos\alpha. \qquad (8)$$

Pagreičius a_L ir a_{TL} galime išreikšti taip:

$$a_{TL} = G\frac{m_L}{d^2};\; a_L = G\frac{m_L}{\left(\dfrac{d - R\cos\varphi}{\cos\alpha}\right)^2}. \qquad (9)$$

(9) įrašę į (8) ir atlikę algebrinius veiksmus gausime:

$$a_p^2 = \frac{G^2 m_L^2}{[d(d - R\cos\varphi)]^4}\left[d^4\cos^4\alpha + (d - R\cos\varphi)^4 - 2d^2(d - R\cos\varphi)^2\cos^3\alpha\right] \qquad (10)$$

Didžiausias potvyninis pagreitis bus taške A, kur φ = α = 0. Jis lygus:

$$a_{pA} = \frac{Gm_L[d^2 - (d-R)^2]}{d^2(d-R)^2} = \frac{Gm_L[2d - R]R}{d^2(d-R)^2}.$$

Jeigu kūnas L yra taip toli nuo Žemės, kad d>>R, tai

$$\boxed{a_{pA} = \frac{2Gm_L R}{d^3}.} \qquad (11)$$

Taške B (φ = 180^0, α = 0, cosφ = -1) gauname:

$$a_{pB} = -\frac{2Gm_L R}{d^3}. \qquad (12)$$

Ši lygybė reiškia vektoriaus $\vec{a}_{pB}$ projekciją, o minuso ženklas parodo kryptį. Matome, kad potvyninis pagreitis taškuose A ir B yra atvirkščiai proporcingas atstumo kubui. Abiejų pagreičių didumai yra lygūs. Jie nukreipti nuo Žemės centro.

Saulė traukia Žemę didesne jėga negu Mėnulis (tuo galite įsitikinti), bet jos sukelti potvyniniai pagreičiai yra beveik tris kartus mažesni už Mėnulio sukeltus potvyninius pagreičius. Mat atstumas iki Saulės yra daug didesnis. Taškuose A ir B potvyniniai pagreičiai (o tuo pačiu ir

jėgos) nukreipti priešingai Žemės tarukos jėgai. Todėl šiuose taškuose, neskaitant išcentrinės jėgos F_i, sunkio jėga bus lygi Žemės traukos ir potvyninės jėgų skirtumui.

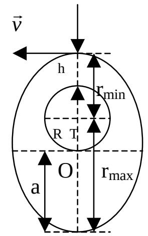
Taškų C ir D potvyniniai pagreičiai yra mažesni negu taškuose A ir B, bet nukreipti apytikriai į Žemės centrą (žr. 24 pav.). Sunkio jėga čia bus apytikriai lygi traukos ir potvyninės jėgų sumai. Taigi, taškuose A ir B tos pačios masės kūno sunkio jėga bus mažesnė negu taškuose C ir D.

Tarkime, kad Žemės padengta vandens sluoksniu. Tuomet vandens lygis taškuose A ir B bus aukštesnis negu taškuose C ir D. Taškuose A ir B bus potvyniai, o C ir D – atoslūgiai. Kadangi Žemės sukasi apie savo ašį, tai potvyniai ir atoslūgiai taškuose A ir B toje pačioje vietoje per parą pasikeis du kartus. Pakankamai dideli jie yra tik prie vandenynų krantų. Prie tokių uždarų jūrų kaip Baltijos ar Juodoji potvyniai yra maži ir paprastai nepastebimi. Potvyniniai reiškiniai vyksta ir kituose Žemės sluoksniuose – atmosferoje, plutoje. Dėl to atsiranda taip vadinama potvyninė trintis, dėl kurios lėtėja Žemės sukimasis apie ašį. Todėl para dėl šios priežasties pailgėja apie 0,0016s per šimtą metų. Yra ir daugiau priežasčių, kurios turi įtakos paros ilgiui.

Pratybos

1. Pakeltam į 200km aukštį palydovui suteikiamas horizontalia kryptimi greitis v=8,5km/s. Nustatykite koks bus jo orbitos didysis pusašis, didžiausias ir mažiausias atstumas nuo Žemės centro, apsisukimo apie Žmę periodas ir ekscentricitetas.

Žemės spindulys R=6378km, gravitacinė konstanta G=$6{,}672\cdot10^{-11}m^3/kg\cdot s^2$ ir Žemės masė $m_ž=5{,}974\cdot10^{24}$kg.



25 pav.

Sprendimas

Paga 2.3 paragrafo (7) formulę:

$$v^2 = G(m_ž + m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Iš jos galime surasti didįjį pusašį a:

$$a = \frac{Gm_ž\cdot r}{2Gm_ž - rv^2},\ nes\ m_ž >> m,$$

kur m palydovo masė, o $r=r_{min}$=R+h=6578km.

Įrašę duotas reikšmes rasime:

$$a = \frac{6{,}672\cdot10^{-11}\cdot5{,}974\cdot10^{24}\cdot6{,}578\cdot10^6}{2\cdot6{,}672\cdot10^{-11}\cdot5{,}974\cdot10^{24} - 6{,}578\cdot10^6\cdot(8{,}5\cdot10^3)^2} =$$

$$= 8{,}11\cdot10^6(m) = 8110(km),$$

$$r_{max} = 2a - r_{min} = 9640(km)\ (25\ pav.).$$

Ekscentricitetas

$$e = \frac{OT}{a} = 1 - \frac{r_{min}}{a} = 0{,}189.$$

Paga trečiąjį Keplerio dėsnį (2.2 paragrafo (8) lygtis) rašome:

$$\frac{T^2 m_ž}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{Gm_ž}} = 7266s = 2{,}02\,val.$$

2. Apskaičiuokite trečiąjį kosminį greitį Veneroje, jeigu Saulės masė $M_\Theta=1{,}98\cdot10^{30}$kg, gravitacinė konstanta G=$6{,}672\cdot10^{-11}m^3/kg\cdot s^2$, Veneros orbitos vidutinis spindulys a_v=0,723a.v., Veneros masė $m_v=4{,}87\cdot10^{24}$kg ir Veneros spindulys R_v=6050km (1a.v.≈$150\cdot10^6$km).

3. Iš Žemės į Marsą puselipsine orbita skrenda kosminis laivas. Nustatykite jo orbitos didįjį pusašį, ekscentricitetą, skridimo laiką ir paleidimo greitį, jeigu Marso vidutinis atstumas nuo Saulės lygus 1,52a.v., Žemės orbitinis apskritiminis greitis – 29,8km/s, Žemės masė $m_Ž=5{,}974\cdot10^{24}$kg ir spindulys R=6378km, Saulės masė $m_s=333000\cdot m_Ž$ ir $G=6{,}672\cdot10^{-11}m^3/kg\cdot s^2$.
4. Iš Veneros puselipse orbita į Jupiterį yra paleidžiama kosminė stotis. Nustatykite kokiu greičiu Veneros atžvilgiu turi būti paleista kosminė stotis, per kiek laiko ji pasieks Jupiterį, koks orbitos didysis pusašis ir ekscentricitetas.

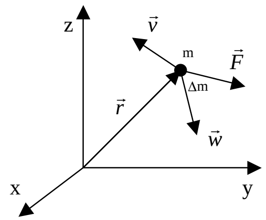
Veneros vidutinis atstumas nuo Saulės $a_v=0{,}723$a.v., o Jupiterio: $a_j=5{,}203$a.v. Saulės masė $m_s=333000\ m_Ž$, Veneros masė $m_v=4{,}87\cdot10^{24}$kg, jos spindulys $R_v=6050$km ir $G=6{,}672\cdot 10^{-11}m^3/kg\cdot s^2$.
5. Raskite iš Marso į Žemę paleisto puselipsine orbita kosminio laivo greitį ir reikiamą Žemės konfigūraciją. Marso vidutinis atstumas nuo Saulės centro 1,524a.v., Marso masė $0{,}107m_Ž$ ir spindulys $R_M=0{,}533R_Ž$. Žemės duomenis paimkite iš 1 uždavinio.
6. Suraskite Marso masę pagal jo palydovo Deimo ir dirbtinio Marso palydovo „Marsas – 5“ (1974.02.12) judėjimą.

Deimas apie planetą apsisuka per 1,262v.s.p. (vidutinės Saulės paros), esant vidutiniam atstumui nuo planetos 23500km, o „Marsas – 5“ apsisuka per 25val, esant mažiausiam atstumui nuo planetos paviršiaus 1760km ir didžiausiam atstumui – 32500km. Marso spindulys $R_M=3400$km.
7. Halio kometa 1986m. Vasario 9 d. Praėjo perihelį atstumu nuo Saulės q=0,5871a.v., greičiu v=54,52km/s. Kokia orbita judėjo kometa ir kada ji vėl grįš prie Saulės? Gravitacinės konstantos ir Saulės masės sandauga $GM_s=13{,}3\cdot10^{10}km^3/s^2$.
8. Raskite Saulės ir Mėnulio sukeltus potvyninius pagreičius Žemėje artimiausiame ir tolimiausiame nuo jų taškuose. Saulės masė $M_s=1{,}98\cdot10^{30}$kg, Mėnulio masė $m_L=m_Ž/81$, Žemės spindulys $R_Ž=6378$km, Žemės masė $m_Ž=5{,}974\cdot10^{24}$kg, atstumas nuo Saulės centro iki Žemės $d_s=1{,}496\cdot10^8$km ir nuo Žemės iki Mėnulio: $d_L=384{,}4\cdot10^3$km. Gravitacinė konstanta $G=6{,}672\cdot 10^{-11}m^3/kg\cdot s^2$.

III. KINTAMOS MASĖS KŪNŲ MECHANIKA

3.1 Reaktyvinis kūnų su kintama mase judėjimas

Technikoje ir moksle dažnai tenka spręsti uždavinius, kai keičiasi judančio kūno masė. Pavyzdžiui, galime paminėti Žemės masės didėjimą dėl ant jos krintančių meteoritų, atmosferoje judančio meteorito masės mažėjimą dėl garavimo ir dalelių sudegimo, lekiančios raketos masės mažėjimą dėl sudegusio kuro išmetimo ir t.t. Į judančio kūno masės kitimą reikia atsižvelgti jau uždavinio sprendimo pradžioje, rašant judėjimo lygtį. Nuo to ir pradėkime šios temos nagrinėjimą.



26 pav.

Kūno masę laikysime tolydine laiko funkcija. Jeigu masė kinta šuoliškai, tai tokį uždavinį galima nagrinėti kaip eilę smūgių, įvykusių per tam tikrą laiką.

Tegul laiko momentu t kūno masė buvo m(t), o greitis nejudančios atskaitos sistemos atžvilgiu - $\vec v$ (26 pav.). Be to, kūną veikia jėga $\vec F$ ir per mažą laiko tarpą Δt prie kūno prisijungė arba atitrūko masė Δm santykiniu greičiu $\vec w$. Tarkime, kad masei prisijungiant Δm>0, o atsiskiriant Δm<0.

Jeigu kūno masė m būtų pastovi, tai galėtume rašyti, kad judesio kiekio pokytis

$$\Delta\vec k = \Delta(m\vec v) = \vec F\Delta t.$$

Bet šiuo atveju kūno judesio kiekis kinta ne tik dėl to, kad veikia jėga $\vec F$, o ir dėl to, kad pritampanti arba atsiskirianti masė Δm papildomai prideda arba atima judesio kiekį $\Delta m(\vec v+\vec w)=\Delta m\vec u,\ kur\ \vec u=\vec v+\vec w$ yra masės Δm absoliutinis greitis. Taigi reikia rašyti

$$\Delta(m\vec v)=\vec F\Delta t+\Delta m(\vec v+\vec w). \qquad (1)$$

Be to, į judesio kiekio išraišką įeinantys abu dydžiai yra kintami, tai

$$\Delta(m\vec v)=m\Delta\vec v+\vec v\Delta m. \qquad (2)$$

Palyginame (1) ir (2) dešiniąsias puses:

$$\vec F\Delta t+\Delta m\vec v+\Delta m\vec w=m\Delta\vec v+\vec v\Delta m.$$

Sutraukę vienodus narius, abi puses padaliję iš Δt ir perėję prie ribos, kai Δt→0, gausime:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d\vec v}{dt}&=\vec F+\frac{dm}{dt}\vec w\\ m\frac{d\vec v}{dt}&=\vec F+\frac{dm}{dt}(\vec u-\vec v).\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Dydis dm/dt nusako masės kitimo greitį, o $\vec\Phi=\dfrac{dm}{dt}\vec w$ (4) yra vadinama **reaktyviąja jėga.** Tada (3) lygtį galime perrašyti taip:

$$\boxed{m\frac{d\vec v}{dt}=\vec F+\vec\Phi.} \qquad (5)$$

(5) lygtis yra vadinama kintamosios masės kūno judėjimo lygtimi arba **Meščerskio lygtimi.** Tai antrasis Niutono dėsnis kintamosios masės kūnui. Ji buvo gauta 1897m. Taigi iš (5) lygties seka, kad **kintamos masės ir pagreičio sandauga lygi tašką veikiančių išorinių jėgų ir reaktyviųjų jėgų vektorinei sumai.** Kai reaktyvioji jėga $\vec\Phi$ gretinama su išorine jėga $\vec F$, pastaroji dar vadinama aktyviąja jėga.

Jeigu atsiskiriančių arba prisijungiančių dalelių absoliutiniai greičiai $\vec u=0$, tai Meščerskio lygtis (3) atrodys taip:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}-\frac{dm}{dt}\vec{v}\;\; arba$$
$$\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{F}. \qquad (6)$$

Tuo atveju kai santykinis greitis $\vec{w}=0$, Meščerskio lygtis:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F} \qquad (7)$$

turi įorastą antrojo Niutono dėsnio formą, tačiau masė m čia yra kintama.

Vektorines judėjimo lygtis galime parašyti ir skaliariškai. Projektuodami (5) į nejudančios koordinačių sistemos O,x,y,z ašis, gausime $\left(\frac{dv_x}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}\right)$:

$$\boxed{\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt}=F_x+\Phi_x; \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=F_y+\Phi_y; \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=F_z+\Phi_z. \end{cases}} \qquad (8)$$

Jau matėme, kad (3), (5) ir (8) lygtys tinka tuomet, kai vyksta dalelių prisijungimas arba atsiskyrimas. Jeigu tuo pat metu vyksta abu procesai, tai vietoje (3) ir (4) lygčių turėsime analogiškas lygtis. Jos užrašomos taip:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\frac{dm_1}{dt}(\vec{u}_1-\vec{v})+\frac{dm_2}{dt}(\vec{u}_2-\vec{v}), \qquad (9)$$

kur $\vec{u}_1$ tegul yra prisijungiančių dalelių greitis, o $\vec{u}_2$ - atsiskiriančių dalelių greitis.

Vektoriai $\vec{w}_1=\vec{u}_1-\vec{v}_1; \vec{w}_2=\vec{u}_2-\vec{v}_2$ (10) – prisinungiančių ir atsiskiriančių dalelių santykiniai greičiai (atžvilgiu kūno m).

Pažymėkime $\vec{\Phi}_1=\frac{dm_1}{dt}\vec{w}_1 \;\; ir \;\; \vec{\Phi}_2=\frac{dm_2}{dt}\vec{w}_2 \;\; ir$ (11)

pavadinkime jas kaip ir anksčiau, reaktyviosiomis jėgomis. Prisijungiančioms dalelėms $\frac{dm_1}{dt}>0,$ o atsiskiriančioms $\frac{dm_2}{dt}<0.$

Jėga $\vec{\Phi}_1$ dažniausiai stabdo kūną, todėl ją dar vadina stabdančiąja jėga.

Taigi bendruoju atveju lygtis (9) atrodys taip:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+\vec{\Phi}_1+\vec{\Phi}_2. \qquad (12)$$

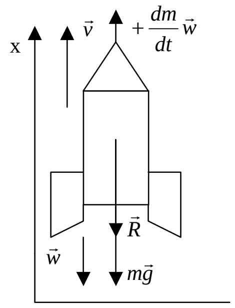
Šią lygtį vadina **apibendrintąja Meščerskio lygtimi.** Ji buvo gauta 1898m.

Suprojektavę į koordinačių ašis, gausime tris skaliarines lygtis:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt}=F_x+\Phi_{1x}+\Phi_{2x}; \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2}=F_y+\Phi_{1y}+\Phi_{2y}; \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2}=F_z+\Phi_{1z}+\Phi_{2z}. \end{cases} \qquad (13)$$

Rusas Meščerskis gyveno 1859 – 1935 m.

3.2 Vertikaliai aukštyn gravitaciniame lauke atmosferoje kylanti raketa



27 pav.

Parašykime raketos judėjimo lygtį. Raketą veikianti sunkio jėga $m\vec{g}$, oro pasipriešinimo jėga $\vec{R}$ ir reaktyvioji jėga $\vec{\Phi}$ parodytos 27 pav. apsiribosime mažais greičiais. Tada $\vec{R}=-b\vec{v}$, kur b – konstanta. Pagal praeito skirsnio (8) pirmąją lygtį rašome ($w_x=-w$):

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg-R-\frac{dm}{dt}w. \qquad (1)$$

Tegul w yra pastovus ir kuras raketoje dega tolygiai. Tuomet raketos masė kis pagal dėsnį:

$$m=m_0(1-\alpha t),$$

kur α pastovus dydis, m_0 – raketos pradinė masė, $\frac{dm}{dt}=-\alpha m_0.$

Įrašę tas reikšmes į (1) lygtį turėsime:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg-b\frac{dx}{dt}+\alpha m_0 w$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)+\frac{b}{m}\frac{dx}{dt}=-g-\alpha\frac{m_0}{m}w.$$

Dar atsižvelgę į masės priklausomybę nuo laiko, gauname:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)+\frac{b}{m_0(1-\alpha t)}\frac{dx}{dt}=-g+\frac{\alpha w}{1-\alpha t}. \qquad (2)$$

Vieną kartą integruodami (2) lygtį surasime greitį $v=\frac{dx}{dt}$, o antrą kartą suintegravę gausime koordinatę (aukštį) x bet kuriuo laiko momentu. Tačiau tai sudėtingas uždavinys, nes ir g bendru atveju priklauso nuo x.

3.3 Raketos judėjimas tarpplanetinėje erdvėje

Tegul tarpplanetinėje erdvėje juda raketa, kuri išmeta sudegusias daleles pastoviu santykiniu greičiu $\vec{w}$ priešinga raketos judėjimui kryptimi. Aplinkos pasipriešinimo bei kitų išorinių jėgų nepaisykime.

Rasime raketos greitį v ir nueitą kelią s.

Parašykime raketos judėjimo lygtį, pasinaudoję Meščerskio lygtimi (3.1 paragrafo (5) lygtis):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{w}, \qquad (1)$$

Suprojektavę šią lygtį į greičio $\vec{v}$ kryptį gausime:

$$m\frac{dv}{dt}=-\frac{dm}{dt}w \qquad (2)$$

arba $$\frac{dv}{w}=-\frac{dm}{m}.$$

Integruodami šią lygtį gausime:

$$v = -w\ln m + c, \qquad (3)$$

kur c – integravimo konstanta.

Tegul pradiniu laiko momentu t=0 raketos greitis $v=v_0$. Tuomet iš (3):

$$v_0 = -w\ln m_0 + c;$$

$$c = v_0 + w\ln m_0.$$

Įrašę šią reikšmę į (3) gausime:

$$\boxed{v = v_0 + w\ln\frac{m_0}{m}.} \qquad (4)$$

Šią formulę gavo rusas K. E. Ciolkovskis (gyveno 1857 – 1935 m.) ir ji vadinama jo vardu. Gauta formulė rodo, kad raketos galinis greitis nepriklauso nuo masės kitimo dėsnio, o priklauso tik nuo sudegusio kuro kiekio (m_0 – m).

Ciolkovskio formulę parašykime kitu pavidalu:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + w\ln\frac{m_0}{m}$$

arba

$$ds = v_0 dt + w\ln\frac{m_0}{m}dt.$$

Integruodami šią lygtį gausime:

$$s = s_0 + w\int_0^t \ln\frac{m_0}{m}dt + v_0 t. \qquad (5)$$

Tegul raketos masė kinta pagal dėsnį:

$$m = m_0 f(t). \qquad (6)$$

Praeitame skirsnyje minėtas masės kitimo dėsnis $m=m_0(1-\alpha t)$ yra atskiras (6) atvejis, kai $f(t)=1-\alpha t$. f(0)=1, nes pradiniu momentu t=0 masė $m=m_0$.

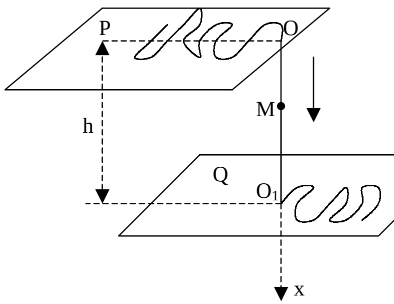
Santykis $m_0/m=1/f(t)$. Įrašę jį į (5) lygtį gausime:

$$s = s_0 + v_0 t - w\int_0^t \ln f(t)dt. \qquad (7)$$

Jeigu išmetamų dalelių santykinis greitis $w=0$, tai

$$s = s_0 + v_0 t.$$

3.4 Krintanti grandinė



28 pav.

Nukarusi vienalytė grandinė krinta žemyn nuo horizontalios plokštumos P ant horizontalios plokštumos Q.

Atstumas tarp plokštumų lygus h. Ant plokštumos P guli dalis nenukritusios grandinės, o plokštumą Q grandinė arba liečia savo apatiniu galu, arba ant jos guli nukritusios grandinės dalis. Kažkuriuo momentu nejudanti grandinė paleidžiama judėti ir ji nuo viršutinės plokštumos krinta ant apatinės.

Nustatysime grandinės judėjimą.

Grandinė yra lanksti ir netampri. Judančios grandinės dalies ilgis yra

pastovus ir lygus h iki to momento t_1, kai jos viršutinis galas sutaps su tašku O. Po šio momento judančios grandinės dalis pradės mažėti ir taps lygus nuliui kai viršutinis grandinės galas pasieks apatinę plokštumą.

Pradžioje panagrinėkime atvejį kai dalis grandinės guli ant viršutinės ir kita dalis ant apatinės plokštumų ($0\le t \le t_1$). Šiuo atveju prie judančios grandinės dalies OO_1 viršuje prisijungs dalelės santykiniu greičiu w_1, kurio didumas lygus judančios grandinės taškų greičiui ir atsiskirs dalelės ant apatinės plokštumos santykiniu greičiu $w_2 = 0$.

Panagrinėkime taško M judųjimą, kuris laiko momentu t=0 yra ant viršutinės plokštumos krašto. Taške O pasirinkime koordinačių pradžią, o x ašį nukreipkime vertikaliai žemyn.

Bet kuriuo laiko momentu t prisijungiančių ir atsiskiriančių nuo judančios grandinės dalies dalelių masės yra vienodos ir lygios:

$$dm_1 = |dm_2| = \rho dx,$$

kur ρ - grandinės ilginis tankis (ilgio vieneto masė). Be to, $w_1 = -\frac{dx}{dt}$, $w_2 = 0$, o visa judančios grandinės dalies masė $m=\rho h$.

Pasinaudoję 3.1 paragrafo (13) lygčių pirmąja lygtimi gausime:

$$\rho h\frac{d^2x}{dt^2} = \rho g h - \rho\left(\frac{dx}{dt}\right)^2;$$

arba

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{1}{h}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = g - \frac{1}{h}z^2, \qquad (1)$$

kur pažymėjome $\frac{dx}{dt} = z.$ Tuomet

$$\frac{dz}{dt} = g - \frac{1}{h}z^2,\ arba$$

$$dt = \frac{dz}{g-\frac{1}{h}z^2} = \frac{hdz}{(\sqrt{gh})^2 - z^2} = \frac{h}{2\sqrt{gh}}\left(\frac{1}{\sqrt{gh}+z} + \frac{1}{\sqrt{gh}-z}\right)dz.$$

Integruodami paskutinę lygybę gausime:

$$2\sqrt{\frac{g}{h}}t = \ln(\sqrt{gh}+z) - \ln(\sqrt{gh}-z) + C;$$

$$2\sqrt{\frac{g}{h}}t = \ln\frac{\left(\sqrt{gh}+z\right)}{\left(\sqrt{gh}-z\right)} + C,$$

kur C yra integravimo konstanta, nustatoma iš pradinių sąlygų. Kai t=0, z=v=0. Todėl C=0.

Į paskutinę lygtį įrašę gautą C ir z vertes galėsime surasti greitį v:

$$\left.\begin{aligned} e^{2\sqrt{\frac{g}{h}}t} &= \frac{\sqrt{gh}+v}{\sqrt{gh}-v}; \\ v &= \sqrt{gh}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{g}{h}}t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{g}{h}}t}+1}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Paskutinę lygybę dar kartą integruokime pagal laiką, prieš tai perdirbdami lygtį taip:

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{gh}\,\frac{e^{2\sqrt{\frac{g}{h}}t}-1}{e^{2\sqrt{\frac{g}{h}}t}+1}=\sqrt{gh}\left[\frac{\dfrac{e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}}{e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}}-1}{\dfrac{e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}}{e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}}+1}\right]=\sqrt{gh}\,\frac{e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}-e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}}{e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}}.$$

$$x=\sqrt{gh}\int\frac{e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}-e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}}{e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}}dt.$$

Vėl pakeiskime kintamąjį:

$$e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}=z;\ dz=\sqrt{\frac{g}{h}}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}-e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}\right)dt;$$

(Čia z yra visai kitas dydis, negu anksčiau naudotas z=v).

$$dt=\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{dz}{e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}-e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}};$$

$$x=\sqrt{gh}\sqrt{\frac{h}{g}}\int\frac{dz}{z}=h\ln z+c=h\ln\left(e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}\right)+c.$$

Naują integravimo konstantą c rasime iš pradinių sąlygų: kai t=0, x=0. Įrašę šias reikšmes į paskutinę lygtį, gausime:

h ln2 + c = 0, c = - h ln2.

Įrašę c reikšmę gausime galutinę x išraišką:

$$x=h\ln\left(\frac{e^{\sqrt{\frac{g}{h}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{h}}t}}{2}\right).\qquad(3)$$

Dar gausime, kaip greitis v priklauso nuo x. (1) lygtį perrašykime taip:

$$v\frac{dv}{dx}=g-\frac{v^2}{h}.\qquad(4)$$

(Mat, $v\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$).

Dar pakeiskime kintamąjį:

$$g-\frac{v^2}{h}=z;\ dz=-\frac{2}{h}vdv;\ dv=-\frac{hdz}{2v}.$$

Čia z vėl visai naujas dydis.

Dabar (4) lygtį galėsime parašyti taip:

$$z=-\frac{hdz}{2dx};\ \frac{dz}{z}=-\frac{2dx}{h}.$$

Suintegravę šią lygtį gausime:

$$\ln z=-\frac{2x}{h}+c,$$

kur c – dar viena integravimo konstanta.

Įrašę z reikšmę, paskutinę lygtį galėsime perrašyti taip:

$$\ln\left(g-\frac{v^2}{h}\right)=-\frac{2x}{h}+c.$$

Integravimo konstantą rasime iš pradinių sąlygų: kai t=0, v=0. Todėl

c = lng.

Įrašykime integravimo konstantos reikšmę į paskutinę lygtį:

$$\ln\left(g-\frac{v^2}{h}\right)=-\frac{2x}{h}+\ln g,$$

$$\ln\left(1-\frac{v^2}{gh}\right)=-\frac{2x}{h},$$

$$1-\frac{v^2}{gh}=e^{-\frac{2x}{h}}.$$

Iš šios lygties galime surasti greitį v:

$$v=\sqrt{gh(1-e^{-\frac{2x}{h}})}.\qquad(5)$$

Formulės (2), (3) ir (5) yra analohiškos formulėms, aprašančioms judėjimą pastovios masės kūno, krintančio klampioje aplinkoje. Todėl galime padaryti tokias išvadas.

1) Krintančios grandinės greitis, parinkus atitinkamą h. Yra lygus krintančio pastovios masės kūno greičiui, kai kūnas pradeda kristi tuo pat metu, kaip ir grandinė, be pradinio greičio aplinkoje, kurioje pasipriešinimo jėga yra proporcinga greičio kvadratui.
2) Nukritusios per laiką t_1 nuo viršutinės plokštumos grandinės ilgis yra lygus pastovios masės taško kritimo aukščiui klampioje aplinkoje per tą patį laiką.

Panagrinėkime dar atvejį, kai t > t_1, t.y. kai visa grandinė nuslydo nuo viršutinės plokštumos, ir jos viršutinis galas iš pradžių yra aukštyje h. Parašykime judėjimo lygtį grandinės viršutiniam galui. Judančios grandinės dalies masė m=(h – x)ρ, $|dm_2|$=ρdx, dm_1=0, kur x yra viršutinio grandinės galo atstumas nuo viršutinės plokštumos.

Kadangi atsiskiriančių apačioje dalelių santykinis greitis $w_2=0.$ tai pasinaudoję 3.1 paragrafo (13) lygčių pirmąja lygtimi, galėsime parašyti šiam atvejui judėjimo lygtį:

$$(h-x)\rho\frac{d^2x}{dt^2}=(h-x)\rho g.$$

Iš čia gausime:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g.\qquad(6)$$

Iš (6) lygties matyti, kad po laiko momento t_1 grandinė kris pagreičiu g, kaip laisvai krintantis kūnas.

Pagrindinė literatūra

1. О. В. Голубева. Теоретическая механика-Москва, 1961.
2. А. А. Космодемъянский. Курс теоретической механики- Москва, 1955.
3. Г. М. Финкельштейн. Курс теоретической механики- Москва, 1959.
4. S. F. Trišas ir A. V. Timoreva. Bendrosios fizikos kursas, I tomas – Vilnius, 1955.

Turinys

Pastaba: ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2004 05 19.