2-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
Užduotis Nr. FT2-5 / 2008 10 06 – 11 02

Užduoties sąlyga / FT2-5▼

Vanduo ir smiltys tarp stiklo plokštelių

Dvi vienodos kvadrato formos stiklo plokštelės suglaudžiamos taip, kad jų plokštumos sutaptų, bet esančios tarp jų smulkios smiltelės leidžia joms suartėti tik iki atstumo l = 0,25 mm. Plokštelės kraštinė L = 10 cm. Taip suglaustos plokštelės vertikaliai įleidžiamos į didelį indą su vandeniu taip, kad viršutinės jų kraštinės lieka lygiagrečios, o šoninės – statmenos vandens paviršiui. Laikysime, kad vanduo visiškai drėkina stiklo paviršių, o vandens paviršiaus įtempties koeficientas σ = 0,0728 N/m.

1) Į kokį aukštį h pakyla vanduo tarp plokštelių, kai jos virš vandens yra iškilusios aukščiu H, lygiu: a)3 cm; b)8 cm?

2) Kokia vidutine jėga ir kokia kryptimi tada yra veikiamos plokštelės?

3) Kaip priklauso vandens tarp plokštelių viršutinio paviršiaus cilindrinio menisko kreivumo spindulys R nuo aukščio x, kuriuo plokštelės yra iškilusios virš indo vandens paviršiaus?

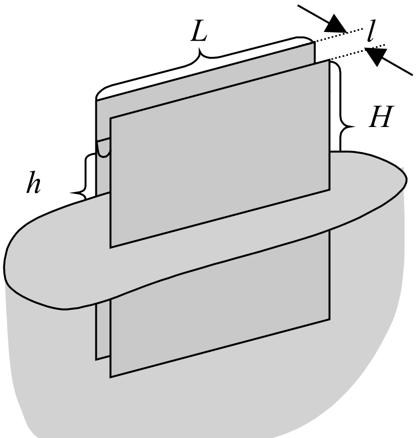
Nubrėžkite grafiką $R(x)$.

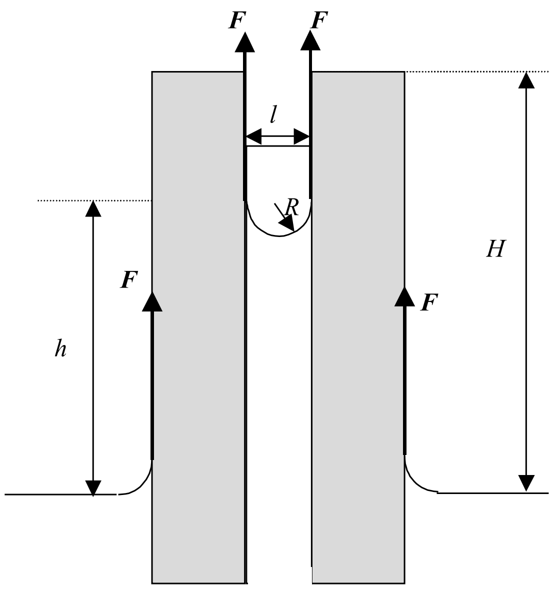
Ši užduotis yra iš prof. E.Kuokščio rengiamo bendrosios fizikos uždavinyno, numatomo išleisti 2009 m.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2008 10 06.

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT2-5▼

1)





Kairysis paveikslas rodo bendrą vaizdą, o dešinėje – parodytas plokštelių pjūvis iš galo. Stulpelis pusiausvyroje, kai jėgų, veikiančių į viršų, suma lygi stulpelio sunkiui. Jei stiklo plokštelės iškyla virš vandens indo paviršiaus tokiu aukščiu *H,* kad pakilęs vandens tarp plokštelių stulpelis nesiekia plokštelių viršutinio krašto, vertikaliai į viršų veikiančios paviršiaus įtempties jėgos toje vietoje, kur vandens stulpelis ribojasi su stiklo plokštelėmis (žr.

brėž.), lygios $F_{\mathrm{pl}} = 2F = 2\sigma L$ (abiejų plokštelių jėgos nukreiptos vertikaliai į viršų pagal cilindrinio menisko pusapskritimio liestinę dėl visiško drėkinimo, kiekviena plokštelė veikia jėga $F = \sigma L$). Vandens stulpelio sunkis lygus $P = hLl\rho g$. Taigi $F_{\mathrm{pl}} = P$, todėl

$$h = \frac{2\sigma}{lg\rho} = \frac{2 \cdot 0{,}0728}{2{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}81 \cdot 10^{3}} \approx 5{,}9 \text{ cm}.$$

Taigi, vanduo tarp plokštelių pakyla 5,9 cm, jei $H > 5{,}9$ cm. Jei $H < 5{,}9$ cm, vanduo pakyla iki plokštelių viršutinio krašto, t.y. į aukštį H. Tuo būdu, kai $H = 8$ cm, $h = 5{,}9$ cm; kai $H = 3$ cm, $h = H = 3$ cm.

2) Jei plokštelės nejuda, visų jas veikiančių jėgų atstojamoji lygi 0. Bendru atveju reikėtų nagrinėti visas plokšteles veikiančias jėgas, pvz., patogu išskirti 2 kryptis: vertikaliąją, kuria veikia sunkio jėga, ir horizontaliąją. Šiame uždavinyje mus domina kapiliarumo reiškiniai. Kiekvieną plokštelę dėl jos ribojimosi su drėkinančiu sieneles vandeniu veikiai jėga, kurios dydis yra apytikriai $F_t \cong 2\sigma L \approx 10^{-2}$ N (čia nekreipiame vandens ribojimąsi su plokštelių galais,nes $l << L$). Vertikaliąja kryptimi duotajame uždavinyje veikia plokštelės sunkio jėga ir priešingos krypties Archimedo jėga, bet tai žymiai didesnės jėgos, pvz., net jei plokštelės storis – keli milimetrai, tai jos svoris (šiuo atveju ir sunkis) – apie $dL^2\rho_{\mathrm{stiklo}}g \sim 1$ N $>> F_{\mathrm{t}}$. Taigi paviršiaus įtempimo jėgų čia galime nepaisyti. Tada vertikaliąja kryptimi jėgų pusiausvyrą nulemia minėtos žemyn veikiantis plokštelės svoris ir aukštyn veikianti Archimedo jėga (lygi vandens, kurį išstumia po vandeniu esanti plokštelės dalis, svoris) bei plokšteles laikanti išorinė jėga. Kadangi kapiliarumo įtaka šiuo atveju nežymi, tai galima pasitenkinti ir tokia kokybine analize (jei būtų duotas tikslus plokštelės storis arba jos masė, labai paprastai galima būtų šias jėgas apskaičiuoti).

Kur kas įdomesnės yra jėgos, atsirandančios dėl kapiliarumo horizontaliąja kryptimi. Jų poveikis labiau netiesioginis – dėl atsirandančio slėgių skirtumo skirtingose sienelės pusėse. Iš tikrųjų, esant drėkinimui, po menisku slėgis mažesnis, todėl slėgis vandens stulpelyje tarp plokštelių kinta nuo p_0 (apačioje ties indo vandens paviršiaus lygiu) iki $p_0 - \rho gh$ (vandens stulpelio viršuje). Išorėje atmosferos slėgis p_0, todėl plokštelės spaudžiamos viena į kitą dėl slėgių skirtumo (plokštelės horizontalia kryptimi nejuda, nes plokštelių horizontalios jėgos viena kitą atsveria). Slėgis kylant nuo apačios į viršų mažėja tiesiškai, todėl vidutinė jėga, spaudžianti plokšteles, lygi

$$F_{vid} = \frac{\rho gh}{2} S.$$

Čia h – vandens stulpelio aukštis, o S – vandens stulpelio tarp plokštelių plotas.

Jei $H > 5{,}9$ cm, veikianti (spaudžianti statmena plokštelės plokštumai kryptimi) vidutinė jėga lygi

$$F_{vid} = \frac{\rho gh}{2} S = \frac{\rho g}{2} \cdot \frac{2\sigma}{\rho gl} \cdot \frac{2\sigma}{\rho gl} \cdot L = \frac{2\sigma^2 L}{\rho gl^2} = \frac{2 \cdot (0{,}0728)^2 \cdot 0{,}1}{10^3 \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}00025)^2} \approx 1{,}73 \text{ N}.$$

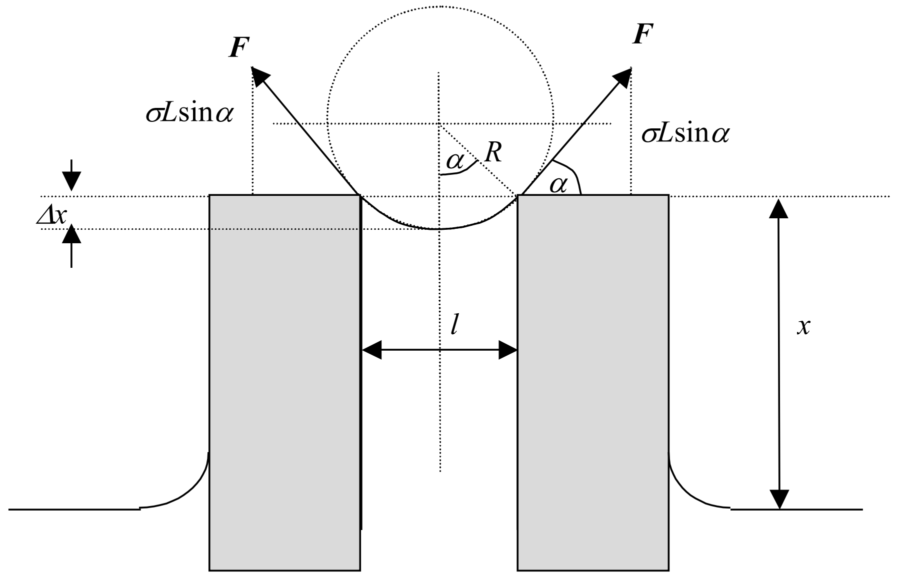
Jei $H = 3$ cm, vandens stulpelis tarp plokštelių pakyla iki pat plokštelių viršutinio krašto, t.y. aukščiu H. Taigi vidutinė jėga, veikianti plokšteles, lygi

$$F_{vid} = \frac{\rho gH}{2} \cdot HL = \frac{\rho gH^2 L}{2} = \frac{10^3 \cdot 9{,}81 \cdot (0{,}03)^2 0{,}1}{2} \approx 0{,}44 \text{ N}.$$

Vėlgi galima pastebėti, kad ir šios jėgos žymiai didesnės už tiesioginę kapiliarumo jėgą, kuri turi nežymios įtakos, kai menisko kreivumas didesnis už $l/2$ (kai $H < 5{,}9$ cm – žr. 3-ąją dalį) – tuomet atsiranda horizontalioji šios jėgos dedamoji.

3) Jei pokštelės iškilusios virš indo vandens paviršiaus aukščiu $x > h = 5{,}9$ cm, vandens tarp plokštelių cilindrinio menisko formos kreivumo spindulys lygus pusei atstumo tarp plokštelių $l/2$ ir nepriklauso nuo x.

Jei $x < h$, šis kreivumo spindulys R didėja, nes vandens tarp plokštelių stulpeliui išlaikyti reikia mažesnės jėgos. Tai iliustruoja brėžinys.



Tokio vandens stulpelio pusiausvyros atveju galime užrašyti:

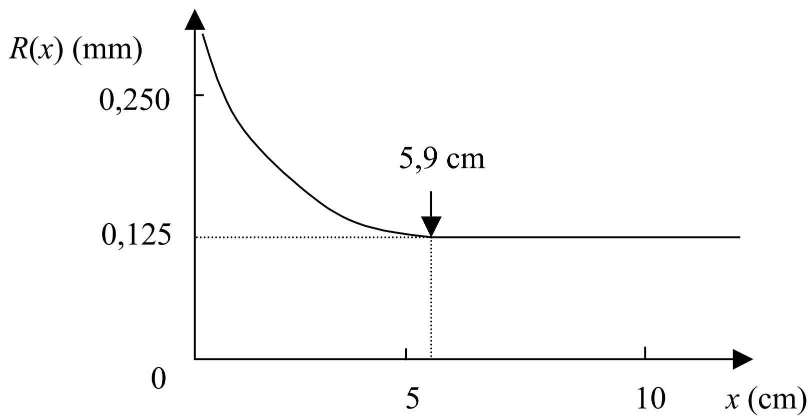
$$2\sigma L \sin\alpha = \rho g x L l \,.$$

Čia $\sin\alpha = \dfrac{l}{2R}$. Tuo būdu iš šių lygčių gauname

$$R = \frac{\sigma}{\rho g x}.$$

Galimi ir kiti samprotavimai, bet rezultatas nuo to neturi keistis.

Nubraižome $R = R(x)$.



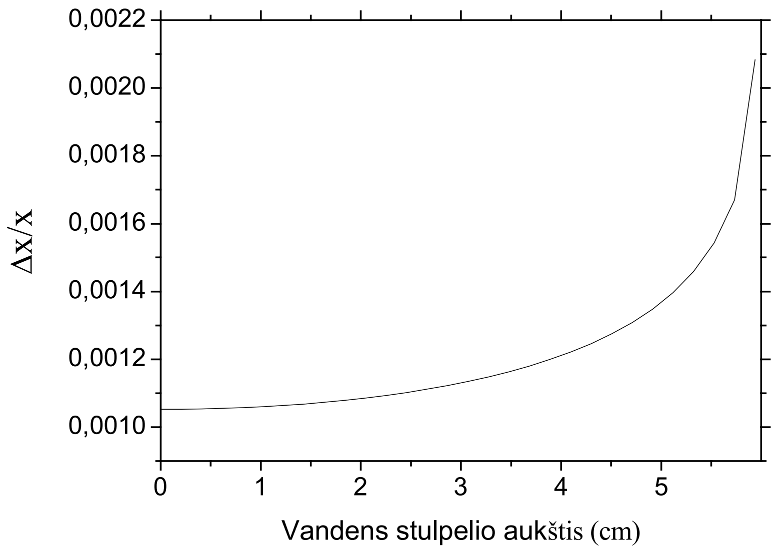
Pateiktuose skaičiavimuose nebuvo atsižvelgta į vandens cilindrinio paviršiaus menisko įdubimo Δx dydį viso stulpelio aukščio x atžvilgiu (žr. brėž.). Jei jis santykinai didelis, nėra korektiška imti stačiakampio vandens stulpelio aukštį x ir skaičiuoti jo hidrostatinį slėgį. Patikriname, kokio dydžio yra $\dfrac{\Delta x}{x}$, kai x kinta nuo 0 iki maksimalaus dydžio h , iš anksto darydami prielaidą, kad $\frac{\Delta x}{x} << 1$ (po to matysime, jei tai teisinga, tai ir mūsų skaičiavimai korektiški). Iš brėžinio matyti, kad

$\Delta x = R(1-\cos\alpha)$. Bet anksčiau buvome gavę, kad $\sin\alpha = \frac{l}{2R}$, o $R = \frac{\sigma}{\rho g x}$. Tada

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\sigma}{\rho g x^2}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\rho g l x}{2\sigma}\right)^2}\right] = \frac{7{,}42\cdot 10^{-6}}{x^2}\left(1-\sqrt{1-283{,}7x^2}\right).$$

Čia dydžiai paimti SI vienetais.

$\frac{\Delta x}{x}$ priklausomybė nuo x intervale nuo 0 iki h parodyta paveiksle. Kiap matyti, duotiems parametrams didžiausia vertė yra apie 0,21%, todėl gana dideliu tikslumu galime į vandens stulpelio paviršiaus cilindrinio menisko įdubimą nekreipti dėmesio.



Užduoties aiškinamąjį sprendimą parengė užduoties autorius prof. habil. dr. E.Kuokštis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2008 11 17.*

***Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT2-5*▼**

Visas uždavinys vertinamas maksimaliu įvertinimu 10 balų. Uždavinį sudarė 3 klausimai, kuriems buvo skirta atitinkamai 3, 3 ir 4 balai.

Žemiau trumpai aptarsime tipinės klaidas.

1 klausimas. Šį klausimą čempionato dalyviai sprendė geriausiai. Tipinės klaidos: naudojamos formulės visai nekomentuojamos (tai būdinga ir kitiems klausimams); taikoma kapiliaro formulė, o uždavinyje - plokštelės; galutinė vertė nurodoma žymiai didesniu tikslumu negu pradiniai duomenys; pasitaiko aritmetinių klaidų.

2 klausimas. Dauguma nesuvokė, kad pačios kapiliarumo jėgos tiesiogiai turi mažai įtakos; vieni dalyviai nekomentuoja jėgų, veikiančių vertikalia kryptimi, kiti – horizontalia.

3 klausimas. Dalis dalyvių nesuvokė, kad kreivumo spindulys didėja, kai plokštelės virš vandens iškilusios mažiau kaip 5,9 cm; netvarkingai pateikiami brėžiniai (nenurodyti atidėti ašyse dydžiai, neproporcingai pateikti masteliai ir kt.).

Užduoties sprendimo aptarimą parengė užduoties autorius prof. habil. dr. E.Kuokštis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2008 11 17.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT2-5▼

Lentelėje nurodyta, kiek taškų ir už ką buvo skiriama atskiruose klausimuose.

Klausimas	**Klausimo dalis**	**Skiriami taškai**	**Iš viso taškų**
1) Į kokį aukštį *h* pakyla vanduo tarp plokštelių, jei jos virš vandens iškilusios aukščiu *H*, lygiu: a) 3 cm; b) 8 cm?	Teisingai užrašyta aukščiui skaičiuoti formulė	1 taškas	3 taškai
	Išanalizuotas atvejis, kai $H = 3$ cm, teisingai apskaičiuota vertė.	1 taškas	
	Išanalizuotas atvejis, kai $H = 8$ cm, teisingai apskaičiuota vertė.	1 taškas	
2) Kokia vidutine jėga ir kokia kryptimi tada yra veikiamos plokštelės?	Aptartos jėgos, veikiančios vertikalia kryptimi.	1 taškas	3 taškai
	Tiesioginių kapiliarumo jėgų įvertinimas (užrašoma, kad vandens ir stiklo riboje jėga $F = \sigma L$).	1 taškas	
	Atlikta horizontalių jėgų analizė ir teisingai įvertinta vidutinė jėga.	1 taškas	
2) Kaip priklauso vandens tarp plokštelių viršutinio paviršiaus cilindrinio menisko kreivumo spindulys *R* nuo aukščio *x*, kuriuo plokštelės iškilusios virš indo vandens paviršiaus. Nubrėžti grafiką *R*(*x*).	Suvokė, kad esant $H > 5{,}9$ cm cilindrinio menisko kreivumas nesikeičia ir lygus $l/2$.	1 taškas	4 taškai
	Apskaičiavo menisko kreivumo priklausomybę nuo plokštelių iškilimo *H*, kai jis < 5,9 cm.	1 taškas	
	Teisingai ir korektiškai nubraižė grafiką.	1 taškas	
	Išanalizavo galimą aukščio paklaidą dėl menisko įlinkimo $\Delta x/x$.	1 taškas	
		Iš viso:	10 taškų

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Edmundas Kuokštis.

▲*Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2008 11 17.*