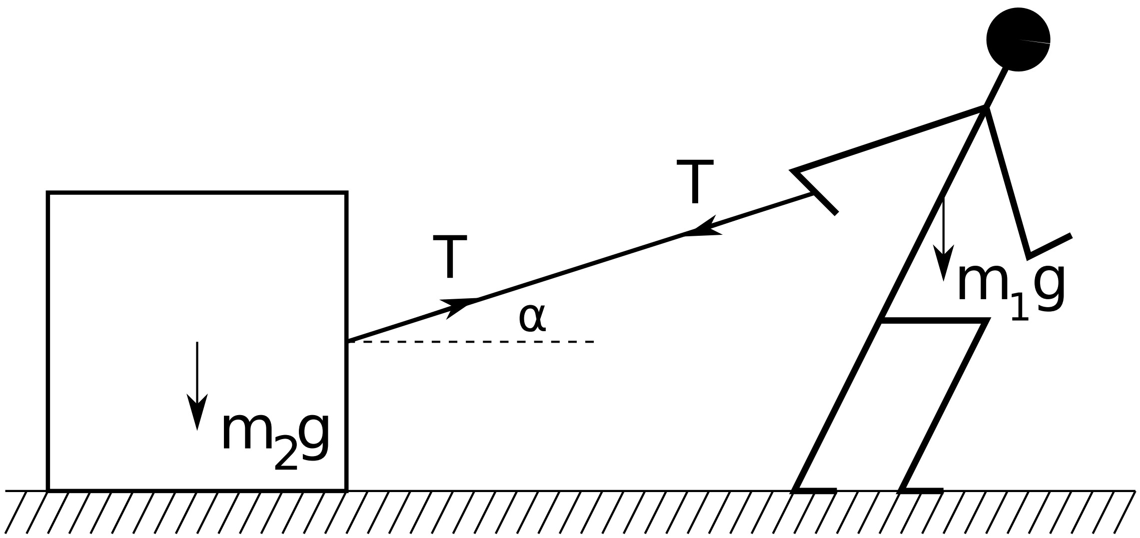
Masės m_1 žmogus, nejudėdamas iš vietos, traukia virve pririštą m_2 masės kroviny. Trinties su horizontalia plokštuma koeficientas yra μ. Kokiai mažiausiai virvės įtempimo jėgai esant kroviny įmanoma pajudinti iš vietos? Kokį kampą su horizontu tada sudarys virvė?

Sprendimas:



1 pav.: Brėžinys

Pažymėkime virvės įtempimo jėgą T, o virvės su horizontu sudaromą kampą α. Kadangi spausti dėžės žemyn link plokštumos nėra prasmės (taip būtų tik sunkiau ją pajudinti, nei, pavyzdžiui, tempiant horizontaliai), ir nesvarbu, į kurią pusę tempiame, apsiribosime atvejais kai $0 \leq \alpha < \pi/2$. Pradžioje visiškai nekreipsime dėmesio į virvę tempiantį žmogų, ir tiesiog surasime, kokia apskritai gali būti mažiausia virvės įtempimo jėga, kad dėžė pajudėtų iš vietos [1]. Dėžė pajudės, kai ją veikiančios jėgos horizontali dedamoji taps lygi maksimaliai trinties jėgos vertei

$$\begin{cases} T\cos\alpha &= \mu N \\ m_2 g &= N + T\sin\alpha \end{cases} \tag{1.1}$$

$$T\cos\alpha = \mu\left(m_2 g - T\sin\alpha\right) \qquad \Rightarrow \qquad m_2 g = T\left(\frac{\cos\alpha}{\mu} + \sin\alpha\right) \tag{1.2}$$

kur N yra dėžę veikianti plokštumos reakcijos jėga. Pasižymėkime $\xi\left(\alpha\right) = \mu^{-1}\cos\alpha + \sin\alpha$. Tada $T = m_2 g \xi^{-1}$, todėl T mažiausia kai ξ didžiausia. Randame ξ maksimumą:

$$\xi' = -\frac{\sin\alpha}{\mu} + \cos\alpha \qquad \xi'' = -\frac{\cos\alpha}{\mu} - \sin\alpha < 0 \tag{1.3}$$

Kadangi $\xi'' < 0$ visiems $0 \leq \alpha < \pi/2$, maksimumas bus pasiektas kai $\xi' = 0$, t.y. $\tan\alpha = \mu$, $\alpha = \arctan\mu$.

$$\xi\left(\alpha\right) = \frac{\cos\alpha}{\mu}\left(1 + \mu\tan\alpha\right) = \frac{1 + \mu\tan\alpha}{\mu\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} \qquad \Rightarrow \qquad \xi\left(\arctan\mu\right) = \frac{\sqrt{1 + \mu^2}}{\mu} \tag{1.4}$$

[1] Jei kam nors nepatinka, kad skaičiuoju kažką, iš ko kol kas ne visai aišku, ar bus naudos, atkreipkite dėmesį, jog šis atvejis tikrai bus aktualus bent jau tada, kai $m_2 < m_1$. Tada koks bebūtų kampas α, vis tiek žmogus slėgs plokštumą labiau nei dėžė, todėl ir jo maksimali trinties į plokštumą jėga bus didesnė, taigi tempiant virvę slys dėžė, o ne žmogus. Kokioms tiksliai sąlygoms esant šis sprendinys tinka mūsų uždaviniui, sužinosime iš atsakymo...

$$T_{\min} = \frac{\mu m_2 g}{\sqrt{1+\mu^2}} \tag{1.5}$$

Bėda su šiuo rezultatu yra ta, kad jei krovinys gerokai sunkesnis už žmogų, tai pastarasis, mėgindamas tempti ką tik apskaičiuota jėga ir kampu, gali pats pradėti slysti. Analogiškai kaip ir krovinio atveju, tik atkreipdami dėmesį, kad virvė žmogų tempia žemyn, o ne aukštyn, gauname, kad žmogus nepraslys jei

$$m_1 g \geq T\left(\frac{\cos\alpha}{\mu} - \sin\alpha\right) = \frac{T\cos\alpha}{\mu}\left(1-\mu\tan\alpha\right) \tag{1.6}$$

Įsistatę čia anksčiau gautas $T_{\min}$ ir optimalią α vertes gauname tų rezultatų galiojimo sąlygą

$$m_1 \geq m_2 \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \tag{1.7}$$

Jei ši sąlyga netenkinama, žmogus bandydamas tempti krovinį kampu $\alpha = \arctan\mu$ pats pradės slysti, o krovinys nejudės. Didinti T nekeičiant α dėl slydimo nebeįmanoma, todėl vienintelė išeitis yra didinti α (tada krovinys bus stipriau keliamas nuo žemės, o žmogus - stipriau slegiamas, kas, pakankamai padidinus α padės jam nepraslysti). Iš (1.3) matyti, kad jei $\arctan\mu < \alpha < \pi/2$, tai $\xi(\alpha)$ yra mažėjanti funkcija, taigi norint minimizuoti T reikia pasirinkti ribinį (tarp praslydimo ir nepraslydimo) α. Tokiu atveju (1.6) išraiškoje vietoj „$\geq$“ turėsime „$=$“. Pasinaudodami tuo ir prisimindami (1.2) gauname

$$\begin{cases} m_2 g = T\left(\frac{\cos\alpha}{\mu} + \sin\alpha\right) \\ m_1 g = T\left(\frac{\cos\alpha}{\mu} - \sin\alpha\right) \end{cases} \tag{1.8}$$

Padalinus pirmąją lygtį iš antrosios

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{1+\mu\tan\alpha}{1-\mu\tan\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\mu}\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right) \tag{1.9}$$

Sudėjus pirmąją ir antrąją lygtis gauname

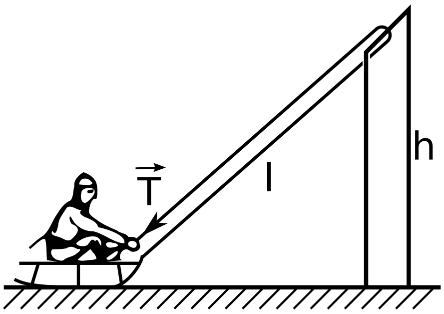
$$T_{\min} = \frac{\mu\left(m_1+m_2\right)g}{2\cos\alpha} = \frac{\mu\left(m_1+m_2\right)g}{2}\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{g}{2}\sqrt{\mu^2\left(m_1+m_2\right)^2 + \left(m_1-m_2\right)^2} \tag{1.10}$$

Atsakymas:

$$\begin{cases} \text{Jei } m_1 \geq m_2\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}, \quad \alpha = \arctan\mu,\ T_{\min} = \frac{\mu m_2 g}{\sqrt{1+\mu^2}} \\ \text{Jei } m_1 \leq m_2\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\mu}\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\right),\ T_{\min} = \frac{g}{2}\sqrt{\mu^2\left(m_1+m_2\right)^2 + \left(m_1-m_2\right)^2} \end{cases} \tag{1.11}$$

Pastaba: Uždavinyne pateikiamas kiek kitoks atsakymas antruoju atveju: $T_{\min} = \mu g\sqrt{\left(m_1^2+m_2^2\right)/2}$. Nesunku įsitikinti, kad šis atsakymas nelogiškas. Visų pirma, abiejų atvejų atsakymai turi sutapti, kai $m_1 = m_2\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$, nes $T_{\min}$ turi tolygiai priklausyti nuo kiekvienos iš masių. Čia pateiktas atsakymas tenkina šią sąlygą, o uždavinyno atsakymas - ne. Taip pat galima panagrinėti, kas vyksta, pavyzdžiui, jei $m_2 > 2m_1$, $\mu \to 0$. Tada $\alpha \to \pi/2$, t.y. virvė beveik vertikali. Pagal (1.11) gauname $T_{\min} \to \left(m_2-m_1\right)g/2$, todėl $m_1 g + T \approx m_2 g - T$. Tai logiška: žmogus ir krovinys plokštumą slegia panašiomis jėgomis, todėl ir trinties jėgos panašios, įmanoma tempti. Tačiau pagal uždavinyną gautume $T_{\min} \to 0$, t.y. žmogus kažkaip sugeba tempti dėžę, nors jo trinties į plokštumą jėga bent perpus mažesnė, nei dėžės. Taip būti negali.

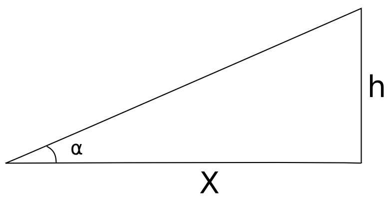
2.3.18*. Prie rogių pririšta virvė permetama per aukščio h vartų skersinį. Berniukas, sėdintis ant rogių, pradeda traukti kitą virvės galą jėga T. Koks bus rogių greitis joms pasiekus skersinį? Pradinis ištemptos virvės ilgis $2l$, rogių su berniuku masė m. Trinties galima nepaisyti.



Sprendimas

Greitį rasime iš energijos tvermės dėsnio, nes visas virvės tempimo horizontalia kryptimi darbas bus sunaudotas kinetinei energijai didinti.

$$A = \frac{mv^2}{2} \tag{1}$$



$$A = \int_0^L 2T_x \, dx \tag{2}$$

kur T_x yra tempimo jėgos horizontali projekcija, o $L = \sqrt{l^2 - h^2}$. Dvejetas atsiranda, nes yra yra du virvės galai. Kad būtų vaizdžiau, ekvivalenti situacija yra tada, jei berniuko laikoma virvė pririšta prie skersinio ir jis ją tempia jėga T, o prie rogių pririšta virvę jėga T tempia kas nors kitas, sėdintis ant skersinio.

$$T_x = T\cos\alpha \tag{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} \tag{4}$$

Įsistatome viską į integralą:

$$A = \int_0^L \frac{2Tx}{\sqrt{h^2 + x^2}} \, dx \tag{5}$$

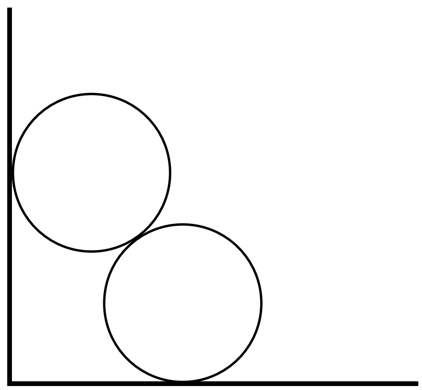
$$A = \int_0^L \frac{T}{\sqrt{h^2 + x^2}} \, dx^2 = 2T\sqrt{h^2 + x^2} \,|_0^L = 2T(l - h) \tag{6}$$

Iš (1) išsireiškiame greitį:

$$v = 2\sqrt{\frac{T(l-h)}{m}} \tag{7}$$

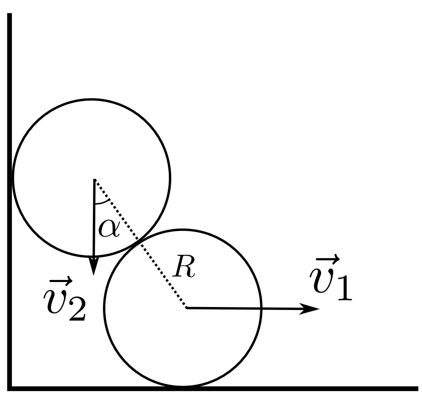
Uždavinys 2.4.12

Du vienodi glotnūs spindulio R cilindrai yra uždėti vienas ant kito ir atremti į kampą. Apatinis cilindras išslysta iš po apatinio. Raskite galutinį apatinio cilindro greitį.



1 pav.: Cilindrų išsidėstymas

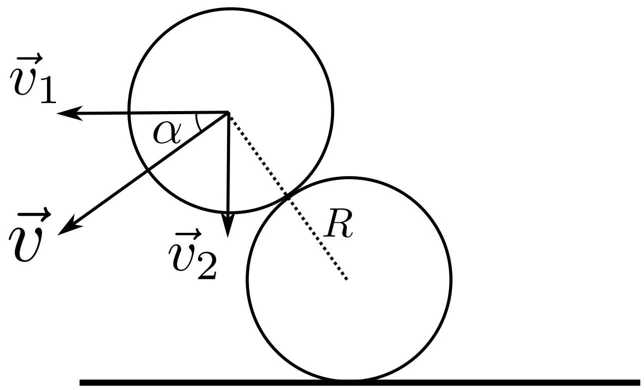
Sprendimas



2 pav.: Cilindrų išsidėstymas

Cilindrų atsiskyrimo momentu viršutinis cilindras neslėgs apatinio, todėl nesirems ir į sieną. Pereiname į atskaitos sistemą, kurioje apatinis cilindras nejuda.

Akivaizdu, kad šioje sistemoje atitrūkimo momentu viršutinis cilindro greitis bus nukreiptas tangentės kryptimi. Taigi uždavinys tampa paprastu nuslydimo nuo sferos uždaviniu.



3 pav.: Cilindrų išsidėstymas

Atitrūkimo sąlyga

$$\frac{mv^2}{2R} = mg\cos\alpha$$

Energijos tvermė

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = mg2R\left(1 - \cos\alpha\right)$$

Taigi

$$v^2 = 2Rg\cos\alpha$$
$$v^2 = 4Rg\left(1 - \cos\alpha\right)$$

$$v^2 = \frac{4}{3}Rg$$

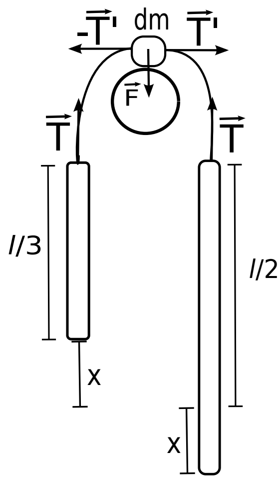
$$\cos\alpha = \frac{2}{3}$$

Apatinio cilindro greitis

$$v_1 = v\cos\alpha = \frac{4}{3\sqrt{3}}\sqrt{Rg}$$

2.4.13*. Slidi vienalytė ilgio l ir masės m virvė permesta per nedidelį skridinį taip, kad pradžioje ji pusiausvira. Virvę šiek tiek pajudinus, ji ima slysti nuo skridinio. Kokia jėga ji veikia skridinį, kai virvės ilgis viename iš skridinio galų $l/3$?

Sprendimas



Pagrindinis skirtumas tarp lengvos ir masę turinčios virvės yra tai, kad reikia įskaičiuoti jėgą F, kuri pakeičia virvės judėjimo kryptį. Jėgų atstojamąją F_a, veikiančią skridinį, rasime iš trečiojo Niutono dėsnio, kuris sako, kad ši atstojamoji jėga bus to paties modulio ir priešingos krypties virvę veikiančiai jėgai. Virvė sąveikauja su skridiniu per virvės įtempimo jėgas ir per jėgą F, keičiančią virvės judėjimo kryptį. Kadangi F veikia virvę, tai jos kryptis yra žemyn, nes ta kryptimi pakeičiamas virvės greitis. Mums reikia skridinį veikiančios jėgos, tai pagal trečią Niutono dėsnį, ši jėga bus nukreipta nuo skridinio. Iš ten atsiranda minuso ženklas:

$$F_a = 2T - F \tag{1}$$

Kadangi skridinys mažas, nereikia atsižvelgti, kaip jėga F priklauso nuo kampo.

Jėgą F rasime per impulso pokytį. Ši jėga veikia tik tą virvės dalį, kuri yra ant skridinio. Skridinys mažas, todėl imam, kad ant jo yra tik masė dm.

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{2}$$

$$dp = dm\Delta v \tag{3}$$

Virvė pakeitė greitį iš v į $-v$ (dabar ieškome tik jėgos modulio).

$$\Delta v = 2v \tag{4}$$

$$dm = \frac{m}{l}dl \tag{5}$$

$$\frac{dl}{dt} = v \tag{6}$$

Viską susistatome:

$$F = \frac{m}{l} 2v^2 \tag{7}$$

Greitį randame iš energijos tvermės dėsnio. Iš brėžinio matome, kad pasikeitė tik tai, kad x ilgio virvės gabalas iš kairės pusės perėjo į dešinę, todėl tik jo potencinės energijos pokytį skaičiuojame.

$$\frac{mv^2}{2} = m_1 g \Delta h \tag{8}$$

kur m_1 yra x ilgio virvės masė, o $\Delta h = x$.

$$m_1 = \frac{m}{l} x \tag{9}$$

Išsireiškiame greitį:

$$v^2 = \frac{2x^2 g}{l} \tag{10}$$

Sustatome į F formulę:

$$F = \frac{4mx^2 g}{l^2} \tag{11}$$

$x = l/6$

$$F = \frac{1}{9} mg \tag{12}$$

Įtempimo jėgą rasime, atskirai užrašę jėgas virvės kairiajai ir dešiniajai pusėms:

Dešinioji pusė:

$$\frac{2}{3} mg - T = \frac{2}{3} ma \tag{13}$$

Kairioji pusė:

$$T - \frac{1}{3} mg = \frac{1}{3} ma \tag{14}$$

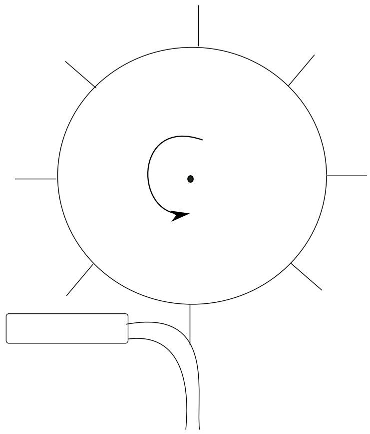
Iš jų išsireiškiame T:

$$T = \frac{4}{9} mg \tag{15}$$

Viską įsistatome į (1):

$$F_a = \frac{7}{9} mg \tag{16}$$

2.4.43*. Tankio ρ, skerspjūvio S vandens srovė, judanti greičiu v, atsitrenkia į vandens rato mentes. Po smūgio vanduo krenta vertikaliai žemyn. Raskite vandens rato galią, jei jis sukasi kampiniu greičiu ω. Rato spindulys R. Menčių pakankamai daug, kad srovė nuolat veiktų kurią nors mentę. Pokyčių, atsirandančių mentės kraštui kertant srovę, taip pat nepaisome.



Sprendimas

Galia, kurią pažymėsime P, yra rato mentės galo greičio v_m ir ratą veikiančios jėgos sandauga:

$$P = Fv_m \tag{1}$$

$$v_m = \omega R \tag{2}$$

Ratą veikiančią jėgą rasime iš vandens impulso pokyčio.

$$F = \frac{dp}{dt} \tag{3}$$

$$dp = dm\Delta v \tag{4}$$

kur Δv yra srovės pokytis vertikalioje kryptyje. Jį reikia skaičiuoti mentės atskaitos sistemoje. Mentės atžvilgiu greitis pirma buvo $v - \omega R$, o paskui 0, todėl

$$\Delta v = v - \omega R \tag{5}$$

Masę skaičiuojame mentės atskaitos sistemoje:

$$dm = S\rho(v - \omega R)dt \tag{6}$$

Sustatome viską:

$$P = S\rho(v - \omega R)^2\omega R \tag{7}$$

Uždavinys 3.3.36

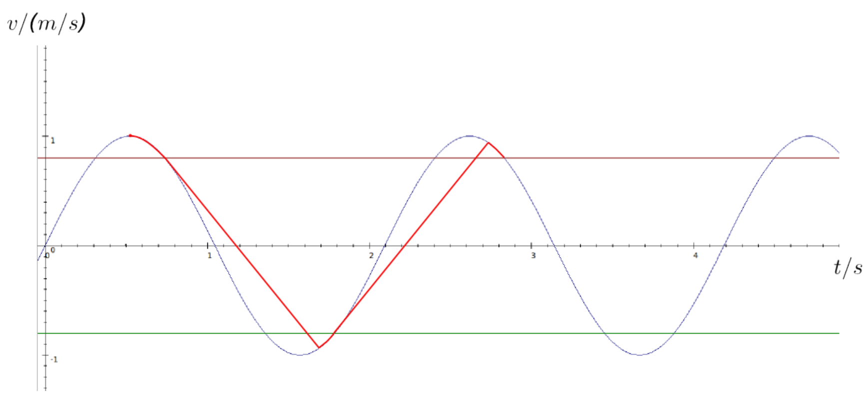
Nuožulnioji plokštuma dideliu dažniu vibruoja išilgai savo plokštumos. Koks nusistovėjęs ant jos padėto kūno judėjimas? Koks vidutinis kūno greitis, jei $\mathrm{tg}\alpha \ll \mu$, kur α yra plokštumos kampas su horizontale, μ — plokštumos trinties koeficientas, v_0 – plokštumos svyravimo amplitudinis greitis.

Sprendimas

Pirmiausia pagalvokime, kaip juda kūnas, jei plokštuma horizontali. Tokiu atveju kūnas negali judėti didesniu, nei μg pagreičiu, nes trinties maksimali trinties jėga yra μmg. Kita vertus, tokia pat trinties jėga veikia visada, kai tik plokštumos ir kūno judėjimo greitis kiek nors skiriasi (kūnas praslysta ir jo greitis turi tapti lygus plokštumos judėjimui greičiui).

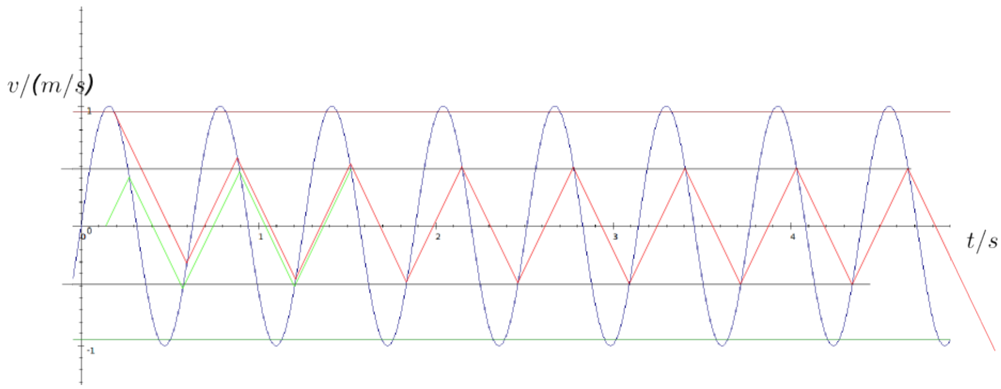
Jeigu $\mu g > a_0$, kur a_0 yra plokštumos pagreičio amplitudė, sprendinys elementarus – kūnas prikibęs prie plokštumos.

Jeigu $\mu g < a_0$, kūnas vienu metu atitrūksta nuo plokštumos ir pradeda slysti. Tačiau, net jei plokštumos judėjimo pagreitis tampa mažesnis nei μg, tai nereiškia, kad kūnas tuomet iš karto prikimba prie plokštumos. Taip neatsitiks, jei jos greitis skirsis nuo plokštumos. Geriausia dabar spręsti naudojantis greičio grafiku.



1 pav.: Nedidelio dažnio svyravimo greičio grafikas

Šiame grafike matome kaip nusistovi periodinis kūnelio judėjimas (raudona linija), kai jis paleidžiamas ant plokštumos tuo metu, kai plokštuma juda greičiausiai (pagreitis mažiausias). Kadangi pradinis kūnelio greitis lygus plokštumos greičiui, jis būna prie plokštumo prikibęs, bet kai plokštumos pagreitis tampa per didelis, jis atitrūksta ir jo greitis kinta tiese, nes trinties jėga ribota. Vėliau viskas kartojasi. Panašus vaizdas gaunamas ir kai kūnas padedamas tuo pat metu, bet be pradinio greičio. Tačiau jaučiame, kad šiek tiek pakeitus sąlygas galbūt galima gauti sudėtinga judėjimą, kai kūnas ne kaskart pasiekia mažo pagreičio zona. Bet sąlygoje minimas didelis svyravimo dažnis. Taigi pažvelkime į kitą grafiką.



2 pav.: Didelio dažnio svyravimo grafikas

Šiuo atveju, net jei kūnas paleistas su dideliu pradiniu greičiu, jis nebespėja pasiekti kitos „prilipimo“ zonos ir pradeda zigzagu svyruoti. Pastebime, kad svyravimai greitai pasidaro simetriški laiko ašies atžvilgiu. Taigi yra natūralu, nes kol kas nagrinėjame horizontalios plokštumos judėjimą, todėl viskas turi būti simetriška. Tas pats vaizdas greitai gaunamas ir kūną paleidus be pradinio greičio. Štai kodėl sąlygoje neminima, kokiu būdu kūnas padedamas ant plokštumos.

Dabar turime išsiaiškinti, ką reiškia duota sąlyga tg$\alpha \ll \mu$ (ne tg$\alpha \ll 1$, kaip įprasta). Gerai žinome, jog tg$\alpha = \mu$ yra kraštutinis kūno neslydimo ant plokštumos atvejis. Vadinasi šiame uždavinyje sunkio jėgos dedamoji išilgai plokštumos yra daug mažesnė, nei trinties jėga. Kūnui keičiant judėjimo kryptį, trinties jėga atitinkamai pasikeičia. Taigi jei kūnas juda plokštuma į viršų, jo pagreitis neviršija

$$a_1 = \mu g - \sin\alpha g$$

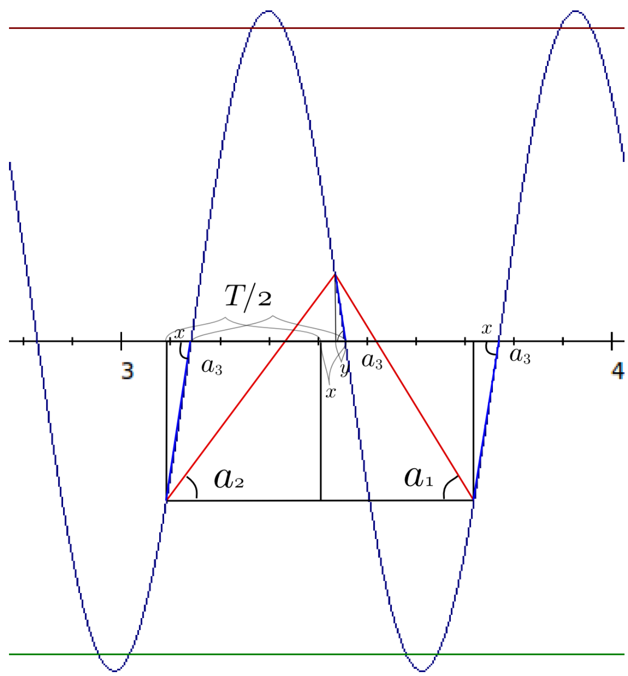
O leidžiantis žemyn.

$$a_2 = \mu g + \sin\alpha g$$

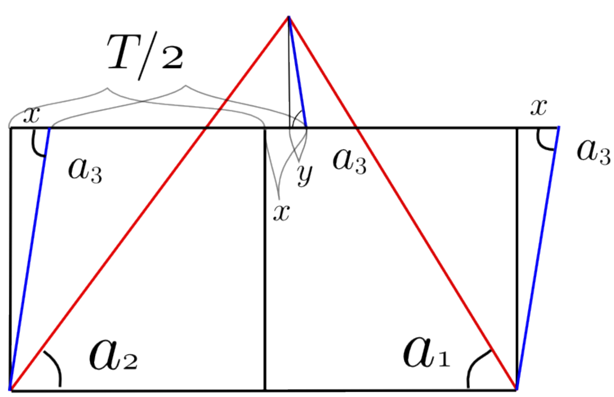
Taigi šįkart vaizdas turėtų būti panašus į antrame grafike pavaizduotą situacija, tik su šiek tiek asimetrijos. Prisimindami, kad judėjimas turi būti nusistovėjęs, jis turi būti periodiškas su periodiškumu T lygiu svyravimo periodui. O kodėl ne kitaip? Kaip minėjome, mes tik truputį perturbuojame turėtą situaciją, todėl nieko daug naujo negali atsirasti.

Supratus šiuos žingsnelius, uždavinys palieka grynai geometrinis. Tariame, kad sinuso grafiką ties kirtimosi vieta galime aprašyti tiese. Tada išskiriame vieną periodą greičio grafiko.

Mėlyna linija vaizduoja sinuso grafiko dalį, o raudona - kūnelio greitį. Mūsų tikslas rasti kūno greičio integralo vidurkį, tai yra atimti grafiko plotą virš x-ašies iš ploto po ja.



3 pav.: Greičių trikampis



4 pav.: Greičių trikampiai

Šiek tiek klaidinančiai pažymėjome kampus. Iš tiesų pagreitis yra lygus liestinės kampo tangentui. Šitą mes ir naudosime, tiesiog įsivesti dar ir kampų žymėjimą būtų nepatogu.

Kadangi greitis pakinta vienodai, tai yra raudona linija baigiasi ties tuo pačiu greičiui, kaip ir prasidėjo, galima rašyti

$$a_2\left(\frac{T}{2}+x-y\right)=a_1\left(\frac{T}{2}-x+y\right)=a_3\left(x+y\right)$$

Mūsų tikslas yra rasti

$$S=\frac{\left(xa_3\right)^2}{2a_2}+\frac{\left(xa_3\right)^2}{2a_1}-\frac{\left(ya_3\right)^2}{2a_2}-\frac{\left(ya_3\right)^2}{2a_1}=\frac{a_3^2}{2}\left(\frac{x^2-y^2}{a_2}+\frac{x^2-y^2}{a_1}\right)$$

Pasižymime $x-y=u$ ir $x+y=w$, tada turimos lygtys atrodo taip

$$a_2\left(\frac{T}{2}+u\right)=a_1\left(\frac{T}{2}-u\right)=a_3w$$

$$S=\frac{a_3^2}{2}\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_1}\right)uw$$

Nesunkiai randame, kad

$$u=\frac{T}{2}\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}$$

$$w=T\frac{a_1a_2}{\left(a_1+a_2\right)a_3}$$

Taigi

$$S=\frac{a_3^2}{2}\frac{a_1+a_2}{a_1a_2}\frac{T}{2}\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}T\frac{a_1a_2}{\left(a_1+a_2\right)a_3}=\frac{T^2}{4}\left(\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}\right)a_3$$

Vidutinis kūno judėjimo greitis yra

$$v=\frac{S}{T}=\frac{T}{4}\frac{a_1-a_2}{a_1+a_2}a_3$$

Prisimename, kad a_3 yra plokštumos pagreitis, kai jos greitis yra nedidelis. O tai juk lygu pagreičio amplitudei, todėl $a_3=\frac{2\pi}{T}v_0$

Taigi

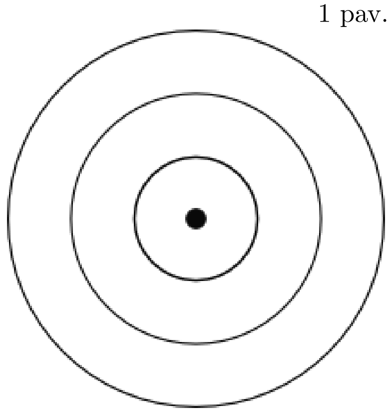
$$v=\frac{T}{4}\left(\frac{2g\sin\alpha}{2g\mu\cos\alpha}\right)\frac{2\pi}{T}v_0=v_0\frac{\mathrm{tg}\alpha}{2\mu}$$

Deja, šiuo atveju, kokių nors įdomių atvejų patikrinančių formulę, rasti negalime. Gerai bent tiek, kad vienetai sutampa.

Uždavinys 5.11.13

Spindulio r kaitinamasis siūlas yra apsuptas trimis ekranuojančiais cilindriniais skydais. Skydų spinduliai yra R, $2R$, $3R$. Siūlo temperatūra T_0. Kokia yra

1 pav.: Ekranuotas siūlas



išorinio ekrano temperatūra? Visi šie kūnai spinduliuoja kaip absoliučiai juodas kūnas $\varepsilon = 1$.

Sprendimas

Cilindrinio paviršiaus visa išspinduliuota šviesa yra sugeriama, jei ji spinduliuojama į išorę. Abi ekranų pusės spinduliuoja vienodu intensyvumu, bet dalis spinduliuotės yra sugeriama viduje esančio cilindro (ar siūlo). Nustatė šilumos mainų pusiausvyros lygtis išspręsime uždavinį.

Pirmiausia prisimename Lamberto kosinuso dėsnį (*angl. Lambert's cosine law*): spinduliuotės intensyvumas iš Lambertinio paviršiaus[1] yra tiesiog proporcingas kosinusui kampo, kurį sudaro stebėtoją ir šaltinį jungianti tiesė su paviršiaus normale.

$$I = I_0 \cos\theta$$

Intensyvumas yra spinduliavimo galia iš vienetinio ploto tenkantis vienetiniam erdviniam kampui. Taigi

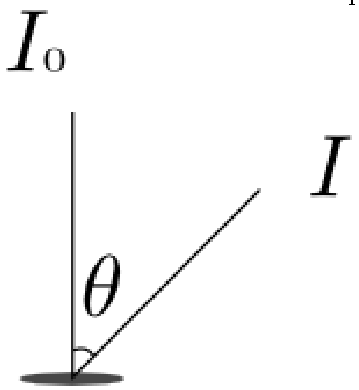
$$\mathrm{d}P = I \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}A$$

Pagal Stefano-Bolcmano dėsnį žinome, jog pilnutinė galia ploteliui dA yra

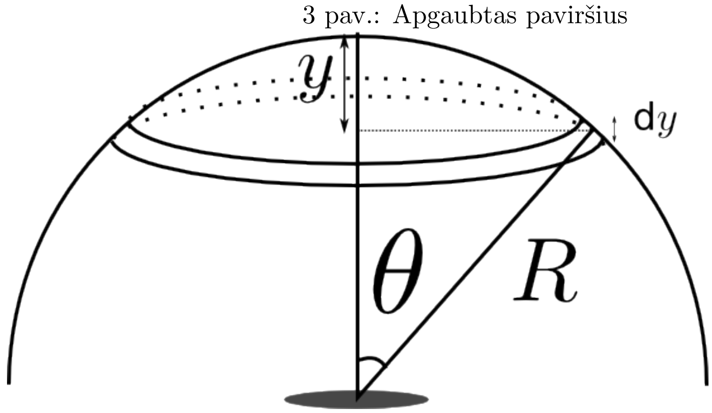
$$P_{\mathrm{d}A} = \varepsilon\sigma T^4 \mathrm{d}A$$

$$P = \mathrm{d}A \int I \mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}A \int I_0 \cos\theta \mathrm{d}\Omega$$

2 pav.: Kosinuso dėsnis



3 pav.: Apgaubtas paviršius



Nagrinėkime spindulio R pussferę gaubiančią nedidelį paviršiaus plotelį.

$$\int I_0 \cos\theta \mathrm{d}\Omega = \int I_0 \cos\theta \frac{\mathrm{d}S}{R^2}$$

Imame žiedinį paviršių. Jo plotas yra proporcingas atstumui dy (vienodo storio sferos sluoksniai turi vienodą išorinį paviršiaus plotą).

$$\int I_0 \cos\theta \mathrm{d}\Omega = \int_0^R I_0 \frac{R-y}{R} \frac{\mathrm{d}y}{R^2} \frac{4\pi R^2}{2R} = \int_0^R \frac{2\pi I_0}{R^2} (R-y)\, \mathrm{d}y = \frac{2\pi I_0}{R^2} \left(R^2 - \frac{R^2}{2} \right) = \pi I_0$$

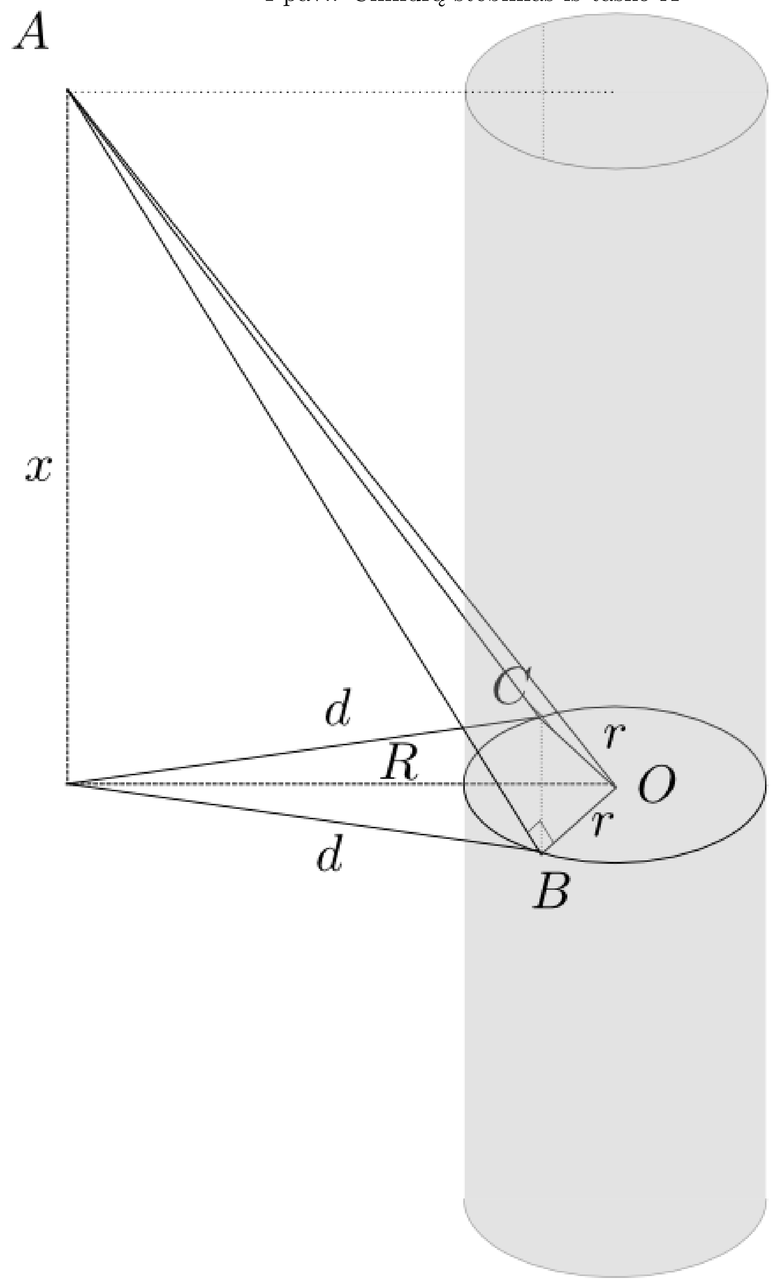
Palyginę su Stefano-Bolcmano dėsniu gauname

$$I_0 = \frac{\varepsilon \sigma T^4}{\pi}$$

[1]Absoliučiai juodas kūnas yra idealus Lambertinis paviršius

Dabar galime rasti kokia energijos dalis grįžta į tą patį cilindrą (spindulys R), jei jo viduje yra kitas spindulio r cilindras. Tam tikslui nagrinėsime vieną cilindro plotelį.

4 pav.: Cilindrą stebimas iš taško A



Svarbu pastebėti, kad sujungus bet kuriuos du išorinio ir vidinio cilindro taškus, jungianti tiesė nekirs išorinio paviršiaus. Taigi galime nebijodami skaičiuoti spinduliuotę, kurią sugeria vidinis cilindras.

Iš taško A sklindantys ir vis dar sugeriami spinduliai liečią vidinio cilindro paviršių.

Pagal Pitagoro teoremą

$$AO^2 = x^2 + R^2$$

$$AB^2 = AC^2 = x^2 + R^2 - r^2$$

ir

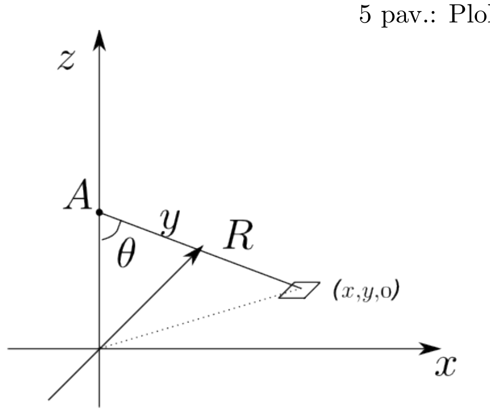
$$d^2 = x^2 + R^2 - r^2 - x^2 = R^2 - r^2$$

Taigi matome, jog atkarpa d pagal Pitagoro teoremą turi būti statmena cilindro spinduliui r.

Vadinasi cilindrą galime pakeisti plokštele, kuri yra $z = d\frac{d}{R} = \frac{R^2-r^2}{R}$ atstumu nuo spinduliuojančio taško.

Dabar nagrinėkime plotelį $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ esantys x-y plokštumoje su koordinatėmis $(x, y, 0)$. Šaltinis yra taške $A = (0, 0, z)$

5 pav.: Plokštuma



Tada minėtas plotelis matomas kampu

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\cos\theta \mathrm{d}S}{R^2} = \frac{\cos\theta \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{R^2}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{R}$$

Todėl tam ploteliui tenkantis spinduliavimo galingumas iš vienetinio ploto yra lygus

$$\mathrm{d}\left(\frac{P_{\mathrm{d}A}}{\mathrm{d}A}\right) = I_0 \cos\theta \mathrm{d}\Omega = I_0 \cos^2\theta \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{R^2} = I_0 z^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{R^4} = I_0 z^2 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Bendras galingumas

$$\left(\frac{P_{\mathrm{d}A}}{\mathrm{d}A}\right) = \int\limits_{-y_0}^{y_0} \mathrm{d}y \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_0 z^2 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} =$$

$$= \int\limits_{-y_0}^{y_0} I_0 z^2 \mathrm{d}y \left(\frac{x}{2\left(y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)} + \frac{\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)}{2\left(y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \int\limits_{-y_0}^{y_0} \frac{I_0 \pi z^2}{2\left(y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{I_0 \pi z^2}{2} \frac{y}{z^2\sqrt{y^2+z^2}}\Bigg|_{-y_0}^{y_0} = \frac{I_0 \pi y_0}{\sqrt{y_0^2+z^2}} = \frac{I_0 \pi \frac{r}{R}\sqrt{R^2-r^2}}{\sqrt{R^2-r^2}} = \frac{I_0 \pi r}{R}$$

Taigi vidinis cilindras sugeria $\frac{r}{R}$ išorinio cilindro į vidų skleidžiamos šviesos. Tą patį atsakymą gautume jeigu naudodamiesi cilindrine simetrija skaičiuotume

$$\frac{\int_{-\arcsin\frac{r}{R}}^{\arcsin\frac{r}{R}} \cos\theta \mathrm{d}\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \mathrm{d}\theta}$$

Vadinasi visai pagrįstai galėjome uždavinį supaprastinti.

Siūle išsiskirianti redukuota[2] galia yra

$$P_{\mathrm{r}} = \frac{P}{2\pi l\sigma} = T_0^4 r - \frac{r}{R} T_1^4 R$$

Pirmasis cilindras gauna energijos iš siūlo, antro cilindro ir dalis jo išspinduliuotos energijos grįžta pas jį patį.

$$2T_1^4 R = T_0^4 r + \frac{R}{2R} T_2^4 2R + \left(1 - \frac{r}{R}\right) T_1^4 R$$

Antram cilindrui

$$2T_2^4 2R = T_1^4 R + \left(1 - \frac{R}{2R}\right) T_2^4 2R + \frac{2R}{3R} T_3^4 3R$$

Trečiam

$$2T_3^4 3R = T_2^4 2R + \left(1 - \frac{2R}{3R}\right) T_3^4 3R$$

Pagal energijos tvermės dėsni trečiasis ekranas į išorę išspinduliuoja tiek energijos, kiek jos tiekiama siūlui.

$$T_3^4 3R = P_r = T_0^4 r - \frac{r}{R} T_1^4 R$$

Taigi turime lygčių sistemą

[2] redukuota reiškia, kad padalinta iš visiems cilindrams vienodų dydžių

$$T_3^4 3R = \left(T_0^4 - T_1^4\right) r$$

$$T_1^4 \left(R + r\right) = T_0^4 r + T_2^4 R$$

$$T_2^4 3 = T_1^4 + T_3^4 2$$

$$T_3^4 5 = T_2^4 2$$

Turime keturias lygtis ir tris nežinomuosius. Viena lygtis yra perteklinė. Išties, jei iš antros atimtume pirmą, gautume:

$$T_1^4 \left(R + r\right) - T_3^4 3R = T_1^4 r + T_2^4 R$$

$$T_1^4 - T_3^4 3 = T_2^4$$

Ir pridėję trečią lygtį gauname

$$T_1^4 - T_3^4 3 + T_2^4 3 = T_2^4 + T_1^4 + T_3^4 2$$

$$T_2^4 2 = T_3^4 5$$

Kas ir yra ketvirtoji lygtis.

Sustatė lygtis vieną į kitą gauname gauname, kad

$$T_3^4 3R = \left(T_0^4 - \frac{T_0^4 r + T_3^4 \frac{5}{2} R}{R + r}\right) r$$

$$T_3^4 3 = \left(\frac{T_0^4 + T_3^4 \frac{5}{2}}{R + r}\right) r$$

$$T_3^4 3R + T_3^4 3r = T_0^4 r + T_3^4 \frac{5}{2} r$$

$$T_3^4 \left(3R + \frac{1}{2} r\right) = T_0^4 r$$

$$T_3 = \frac{T_0}{\sqrt[4]{\frac{1}{2} + \frac{3R}{r}}}$$

Gautas atsakymas skiriasi nuo knygoje pateikto $T_3 = \frac{T_0}{\sqrt[4]{6{,}5 + \frac{4R}{r}}}$. Tačiau patikrinti pagal paprastesnius atvejus, pavyzdžiui, kai $r = R$, negalime, nes vis tiek tektų šiek tiek skaičiuoti savais metodais.

Elektrinis slėgis. Elektrinio lauko energija

6.5.30*. Nustatykite jėgą, kuri veikia taškinį krūvį q, esantį izoliuotos metalinės sferos centre, jei toje sferoje yra nedidelė spindulio r ertmė. Sferos spindulys yra R, o storis — Δ. Be to, $\Delta \ll r \ll R$.

Sprendimas

◊ **6.5.30*.** Indukuotų krūvių kuriamas elektrinio lauko stipris sferos centre būtų lygus nuliui, jei sfera būtų uždara. Tai galima išreikšti kaip sferos su ertme ir trūkstamos sferos dalies – kamščio – kuriamų elektrinių laukų kompensacija

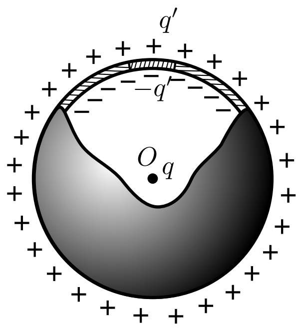
$$E_0 = E_{\text{kamštis}} + E_{\text{sfera su ertme}} = 0. \tag{1}$$

Kai $\Delta \ll r \ll R$ kamštį galima laikyti elektriniu dipoliu, kuris taške O kuria $E(0) = q'\Delta/(2\pi\varepsilon_0 R^3)$ stiprio elektrinį lauką. Atskyrus kamštį nuo sferos, indukuoti krūviai persiskirsto, bet kai $\Delta \ll r$, to galime nepaisyti ir ieškomas elektrinio lauko stipris yra apytiksliai

$$E(0) = E_{\text{sfera su ertme}} \approx -E_{\text{kamštis}} = -q'\Delta/(2\pi\varepsilon_0 R^3). \tag{2}$$

Pagal Gauso teoremą $q' = -qr^2/(4R^2)$. Taigi

$$E(0) = q^2 r^2 \Delta/(8\pi\varepsilon_0 R^5). \tag{3}$$



6.5.30 uždaviniui

Uždavinys 8.2.18

Raskite varžą tarp dviejų metalinių $D = 30$ cm skersmens sferų panardintų į $H = 60$ m gylį, kai atstumas tarp sferų yra $s = 300$ m. Vandens savitasis laidumas $\lambda = 4$ S/m

Sprendimas

Varžą apibrėžiame kaip potencialų skirtumo tarp taškų iš kurių srovė išteka ir į kuriuos įteka bei tekančios srovės stiprio santykį

$$R = \frac{\Delta\varphi}{I}$$

Žinome, kad srovė yra srovės tankio integralas apie kurį nors vieną iš srovės šaltinių

$$I = \int_S \vec{J}\mathrm{d}\vec{S} = \int_S \lambda\vec{E}\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}}$$

Bet jei laidumas yra pastovus, tada elektrinio lauko integralas gerai žinomas

$$I = \lambda\int_S \vec{E}\mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \lambda\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Įdomu kokią fizikinę prasmę turi ε laidininke, kuriame teka srovė.

Tik reikia laikyti, kad abu srovės šaltiniai turi vienodo didumo krūvį (taip galime daryti, nes sferos turi pastovų potencialą tarsi būtų įelektrintos) , nes laikome, jog apgaubus abu srovės šaltinius, gausime nulinę srovę.

Vienos sferos vandenyne atveju galėtume laikyti, kad ją gaubia didžiulė kita sfera. Potencialų skirtumas tada yra lygus

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

Apgaubę vieną šaltinį gausime krūvį q

Taigi varža tarp sferos ir begalybės yra

$$R = \frac{\Delta\varphi}{I} = \frac{1}{\lambda 4\pi r}$$

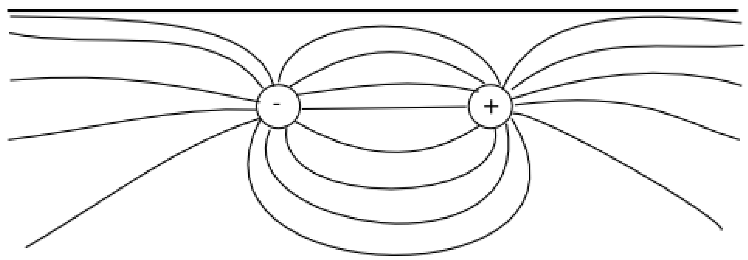
Ką gauname ir įprastai integruojant varžą mažais sluoksniais.

Duota sistema yra sudėtingesnė, tačiau galime pasinaudoti analogija su krūviais. Tiesiog patalpiname papildomus menamuosius krūvius. Potencialų skirtumas tarp realiųjų sferų bus lygus[1]

$$\Delta\varphi = \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 2H} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{(2H)^2 + s^2}}\right) - \left(-\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\varepsilon r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 2H} + \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{(2H)^2 + s^2}}\right) =$$

[1] Iš ties sferuose krūviai yra šiek tiek poliarizuoti, tačiau sferos yra pakankamai toli viena nuo kitos, kad galėtume į tai nekreipti dėmesio

1 pav.: Sferų išsidėstymas



$$= 2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 2H} - \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{(2H)^2 + s^2}}\right)$$

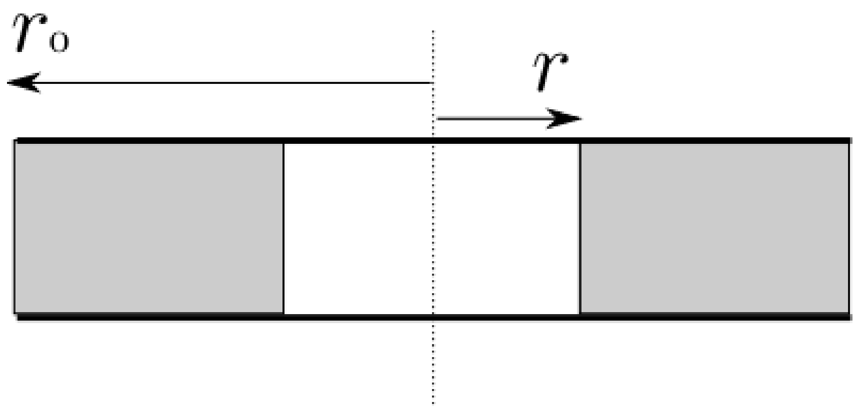
Ieškoma varža yra lygi

$$R = \frac{\Delta\varphi}{I} = \frac{1}{2\pi\lambda}\left(\frac{2}{D} + \frac{1}{2H} - \frac{1}{\sqrt{(2H)^2 + s^2}}\right) \approx 0{,}265\ \Omega$$

Gauta visiškai kitokia, nei atsakyme pateikta $R = 0{,}14\ \Omega$ vertė.

Tačiau galima nesunkiai įsitikinti, kad pateiktas atsakymas neteisingas. Vienos sferos begalybės atžvilgiu varža yra apie $0{,}13\ \Omega$. Duotos dvi sferos ir jos yra ganėtinai toli viena nuo kitos ir ganėtinai giliai, todėl varžas galime sumuoti. Taigi varža bus dviguba, kas yra apytiksliai lygu mūsų atveju, nes kiti atstumai labai dideli ir turi labai mažą efektą.

Įdomu pastebėti, kad kadangi laikome, jog pertekliniai krūviai kaupiasi paviršiuje, tai išorėje „matysime“ dvi dvigubo krūvio sferas



1 pav.: Kondensatoriaus pjūvis

Uždavinys 11.6.12

Plokščiasis kondensatorius, kurio plokštelės yra spindulio r_0 skrituliai, yra užpildytas tam tikra medžiaga taip, kad centrinė, cilindrinė, spindulio r sritys lieka tuščia. Kondensatorius išsikrauna per tą medžiagą, o išsikrovimo srovė yra I. Raskite ir nubrėžkite magnetinio lauko stiprio priklausomybę nuo atstumo iki kondensatoriaus ašies.

Sprendimas

Uždavinį išspręsime dviem būdais: sudėtingu ir paprastesniu.

Sudėtingas būdas

Maksvelo ketvirtoji lygtis yra

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Kur $\vec{J}$ yra srovės tankio vektorius, o $\nabla \times$ atitinka rotoriaus operatorių (tam tikras diferencijavimo veiksmų algoritmas parodantis vektorinio lauko sūkuriškumą).

Pagal Gauso (divergencijos teoremą), bet kokiam tolygiam paviršiui S, kuris yra aprėžtas kontūru C (ir apibrėžtoms funkcijom) galioja lygybė

$$\int_S \nabla \times \vec{B} \, \cdot \, \mathrm{d}\vec{s} = \int_C \vec{B} \, \cdot \, \mathrm{d}\vec{l}$$

Iš simetrijos ir magnetinio lauko savybių aišku, kad jis šiuo atveju gali būti tik cilindriškai sūkurinis. Jei parinksime apskritiminį, spindulio x kontūrą, o paviršiaus tegu būna aprėžto skritulio plotas, tada integralas supaprastėja, nes dešinės pusės skaliarinė sandauga virsta paprasta sandauga (magnetinis laukas lygiagretus apskritimo liestinei).

$$\int_S \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = B2\pi x$$

Tariame, kad plokštelės išsielektrina tolygiai (krūvio tankis visur vienodas. Taigi

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\frac{Q}{Cd}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_0 S_0}{d} d} \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{I}{\varepsilon_0 S_0}$$

Srovės tekėjimo tankį irgi laikoma pastoviu

$$J = \frac{I}{S_0 - S}$$

Nesunku įsitikinti, kad kairės pusėje skaliarinę sandaugą galime irgi pakeisti paprasta sandauga, tik elektrinio lauko kitimo ir srovės tankio vektoriaus kryptys priešingos. Tarkime, kad el. lauko kitimo vektoriaus kryptis teigiama.

Taigi

$$\int_S \mu_0 \left(-\frac{I}{S_0 - S} + \frac{I}{S}\right) \cdot \mathrm{d}s = B2\pi x$$

Integruojamos konstantos.

Kai $x < r$

$$\mu_0 \frac{I}{S_0} \cdot \pi x^2 = B2\pi x$$

$$B = \frac{\mu_0 I x}{2\pi r_0^2}$$

Kai $r < x < r_0$

$$\mu_0 \cdot I \left(\frac{x^2}{r_0^2} - \frac{x^2 - r^2}{r_0^2 - r^2}\right) = B2\pi x$$

$$\mu_0 \cdot I \left(\frac{x^2\left(r_0^2 - r^2\right) - r_0^2\left(x^2 - r^2\right)}{r_0^2\left(r_0^2 - r^2\right)}\right) = B2\pi x$$

$$\mu_0 \cdot I \left(\frac{r^2\left(r_0^2 - x^2\right)}{r_0^2\left(r_0^2 - r^2\right)}\right) = B2\pi x$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi x} \frac{r^2\left(r_0^2 - x^2\right)}{r_0^2\left(r_0^2 - r^2\right)}$$

Kai $x > r_0$ magnetinio lauko nėra.

Grafikas sutampa su knygoje duotu.

Paprastas būdas

Gerai žinome, kad kintant magnetiniui laukui susidaro sūkurinis elektrinis laukas. Jo stiprumą mokame apskaičiuoti. Tačiau retai pasitaiko skaičiuoti atvirkščią dalyką. Kaip tai padaryti?

Žinome, kokį magnetinį lauką sukuria stiprio I srovė tekanti laidu. Nėra jokių priežasčių magnetiniam laukui pasikeisti, jei grandinėje yra kondensatorius. Iš šito galime rasti magnetinio lauko stiprumo priklausomybę nuo elektrinio lauko.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} = \frac{\mu_0}{2\pi x}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0}{2\pi x}\frac{\mathrm{d}CU}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0}{2\pi x}\frac{\mathrm{d}\frac{\varepsilon_0 S_0}{d}Ed}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0\varepsilon_0 S_0}{2\pi x}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

Bet tiesą sakant, to mums net nereikia. Juk jei žinome, kad elektrinio lauko kitimas tolygus srovės tekėjimui, tai jau iš to galime rasti magnetinio lauko stiprį. Įprastai per kondensatorių tekant srovei, ji „ateina“ iš begalybės ir vėl nutolsta. Tačiau šiuo atveju matome, kad toks srovės yra priešingu krypčių, nes kondensatorius išsikrauna pats per save. Todėl uždavinį galima pakeisti dviejų vienodo stiprio srovių tenkančiu per nevienodo ploto laidus priešingomis kryptimis uždavinį. O tokį uždavinį išspręsti jau visai lengva.

Uždavinio „plonybės“

Nagrinėdami uždavinį nekreipėme dėmesio į panaudotos medžiagos magnetinę ir dielektrinę skvarbą, o tai gali turėti įtakos uždavinio atsakymui. Taip pat, kondensatoriaus išsikrovimas realybėje turbūt nebūtų tolygus. Be to, jeigu ir turėtume labai simetrinį išsikrovimą, tai iš kondensatoriaus plokštelėse susidarytų srovelės tekančios išilgai plokštelių spindulių. Ko gero jų sukeliamas magnetinis laukas išsiprastina, tai tas gerai.