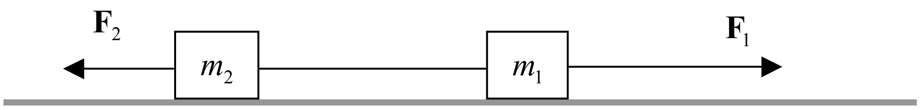
Uždaviniai
E. Kuokštis
Dinamika 1
2008 m. sausis

1.
Du masių m_1 ir m_2 tašeliai sujungti lengvu siūlu, kuris išlaiko T įtempimo jėgą. Kūnus veikia jėgos $F_1 = 3\alpha t$ ir $F_2 = \alpha t$ (čia α - pastovus koeficientas, o t – jėgų veikimo laikas). Suraskite, kuriuo laiko momentu siūlas nutrūks.



Ats.: $t = \dfrac{T(m_1 + m_2)}{\alpha(m_1 + 3m_2)}$.

Sprendimas

Užrašome antrąjį Niutono dėsnį sistemai:

$$F_1 - F_2 = (m_1 + m_2)a\,,$$

$$3\alpha t - \alpha t = (m_1 + m_2)a\,, \text{ iš čia}$$

$$a = \frac{2\alpha t}{m_1 + m_2}\,.$$

Siūlo įtempimo jėgą N surandame iš antrojo Niutono dėsnio lygties vienam iš tašelių, pvz., 1-ajam:

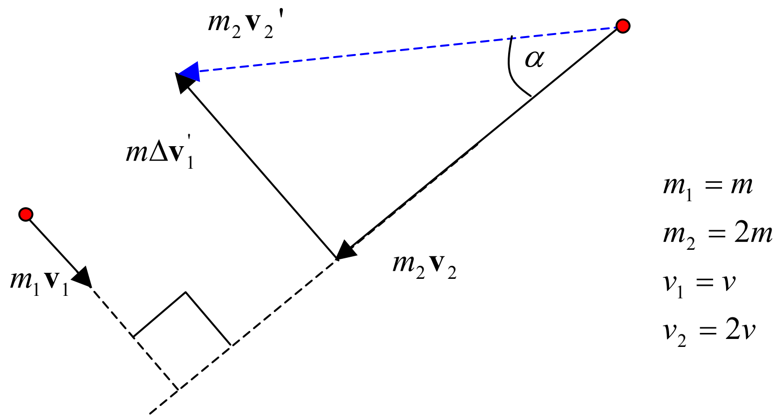
$$3\alpha t - N = m_1 a\,.$$

Įrašydami a išraišką ir maksimalią įtempimo jėgą $N = T$, gauname

$$t = \frac{T(m_1 + m_2)}{\alpha(m_1 + 3m_2)}\,.$$

2.
Dvi masių m ir $2m$ daleles, lekiančias statmenai viena į kitą atitinkamai greičiaias v ir $2v$, tam tikrą laiką veikia vienodos jėgos. Nustojus joms veikti, pirmoji dalelė juda greičiu $2v$ priešinga kryptimi. Kokiu greičiu ir kokia kryptimi juda antroji dalelė?

Sprendimas



Randame jėgą, veikiančią daleles. 1-ąją dalelę laiką Δt veikia jėgos impulsas

$$F\Delta t = m_1 \Delta v_1' = m(2v + v) = 3mv$$
$$F\Delta t = 3mv$$

2-ąją dalelę laiką Δt vekia toks pat impulsas, todėl

$$m_2 v_2' = \sqrt{(m_2 v_2)^2 + (m_1 \Delta v_1')^2}$$

Įrašę vertes gauname

$$2v_2' = v\sqrt{4^2 + 3^2}\ .$$

Taigi, $v_2' = 2{,}5v$.
Galime rasti ir kampą α :

$$\cos\alpha = \frac{2m \cdot 2v}{2m \cdot 2{,}5v} = 0{,}8 \quad \text{arba} \quad \alpha \approx 36{,}9^\circ .$$

3.
Krovinys, kurio masė 1,00 kg, pakabintas ant spyruoklinių svarstyklių (dinamometro) ir keliamas į viršų. Pradžioje judėjimas tolygiai greitėjantis, po to tolygins, galiausiai tolygiai lėtėjantis. Absoliuti pagreičio, kuriuo juda krovinys, vertė vienoda ir lygi 1,00 m/s^2. Ką rodo dinamometras kiekvienu iš šių trijų etapų, jei jo skalė sugraduota jėgos kilogramais? Laisvojo kritimo pagreitį laikyti 9,81 m/s^2.

Ats.: 1,10 kG; 1,00 kG; 0,898 kG.

Sprendimas

Pastebėsime, kad jėgos kilogramas (kG) – tai jėga, kuri suteikia 1 kg masės kūnui laisvojo kritimo pagreitį g. Tuo būdu, 1 kG = 9,81 N.

Užrašome antrąjį Niutono dėsnį kiekvienam etapui. Kylant į viršų greitėjant

$T_g - mg = ma$. Iš čia $T_g = m(g+a) = 1{,}00(9{,}81+1{,}00) = 10{,}8\mathbf{N} = 1{,}10\mathbf{kG}$.

Judant tolygiai

$T_t - mg = 0$, t.y. $T_t = mg = 1{,}00 \cdot 9{,}81 = 9{,}81\mathbf{N} = 1{,}00\mathbf{kG}$.

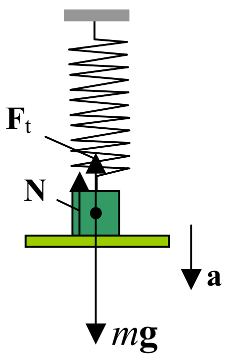
Tolygiai lėtėjančio judėjimo atveju

$mg - T_l = ma$. Iš čia

$T_l = m(g-a) = 1{,}00(9{,}81-1{,}00) = 8{,}81\mathbf{N} = 0{,}898\mathbf{kG}$

4.
Ant padėklo guli masės *m* krovinys, kuris lengva standumo *k* spyruokle pritvirtintas prie lubų. Pradiniu momentu spyruoklė neištempta. Padėklas pradedamas leisti žemyn pastoviu pagreičiu *a*. Per kiek laiko *t* krovinys atitrūksta nuo padėklo?

Sprendimas



Kol krovinys nuo padėklo dar neatitrūkęs, krovinį veikia 3 jėgos: sunkio *mg*, spyruoklės tempimo $F_t = kx$ ir padėklo reakcijos jėga *N*. Užrašome antrąjį Niutono dėsnį kroviniui:

$$mg - N - kx = ma\ .$$

Atitrūkimo momentu $N = 0$, taigi tuomet spyruoklė bus išsitempusi dydžiu x_0. Jį iš lygties nesunkiai surandame:

$$x_0 = \frac{m(g-a)}{k}.$$

Laiką, per kurį padėklas įveikia šį atstumą, randame iš lygties:

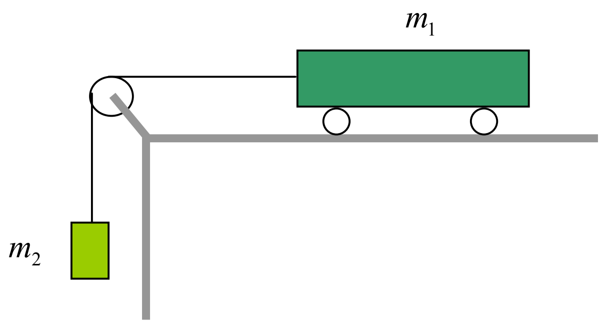
$x_0 = \dfrac{at^2}{2}$. Taigi,

$$t = \sqrt{\frac{2m(g-a)}{ka}}.$$

5.

Antrasis Niutono dėsnis dažnai iliustruojamas tokiu bandymu. Masės m_1 vežimėlis išjudinamas pradžioje masės m_2 svareliu, po to svareliu, kurio masė *n* (pvz., $n = 2$) kartų didesnė.

a) ar galima teigti, kad nesant trinties, pagreitis antruoju atveju *n* kartų didesnis, nei pirmuoju?
b) Koks pagreičių santykis, jei $m_1 = 200\mathbf{g}$, $m_2 = 30\mathbf{g}$, o trinties koeficientas tarp stalo ir vežimėlio $\mu = 0{,}10$?
c) Kokiam trinties koeficientui antruoju atveju pagreitis bus *n* kartų didesnis, nei pirmuoju?



Sprendimas

a) Užrašome antrąjį Niutono dėsnį svareliui m_2 ir nm_2:

$$m_2 g = (m_1 + m_2)a_1$$
$$nm_2 g = (m_1 + nm_2)a_2$$

Iš čia:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{n(m_1 + m_2)}{m_1 + nm_2} \neq n.$$

b) Vėlgi užrašome antrąjį Niutono dėsnį svareliui m_2 ir nm_2, kai yra trintis:

$$m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2)a_1$$
$$nm_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + nm_2)a_2$$

Iš čia

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{(nm_2 - \mu m_1)(m_1 + m_2)}{(nm_2 + m_1)(m_2 - \mu m_1)} = 3{,}54.$$

c) Iš paskutiniosios pagreičių santykio išraiškos gauname:

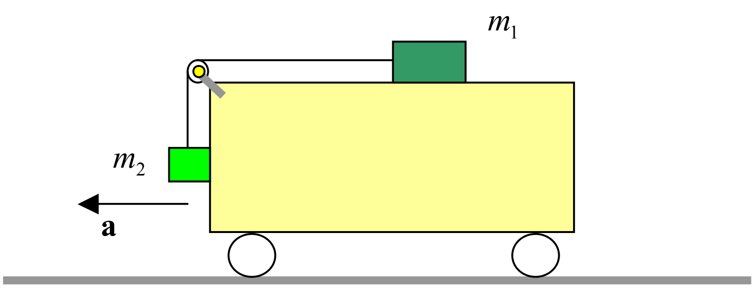
$$\frac{a_2}{a_1} = n = \frac{(nm_2 - \mu_1 m_1)(m_1 + m_2)}{(nm_2 + m_1)(m_2 - \mu_1 m_1)}.$$

Iš čia

$$\mu_1 = \frac{n m_2^2}{m_1\left[m_2(n+1)+m_1\right]} = 0{,}031.$$

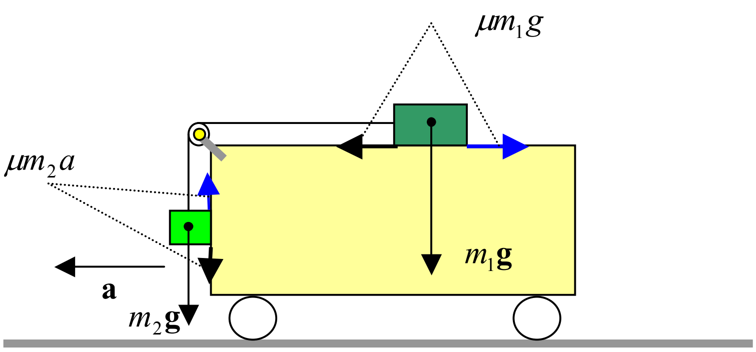
6.

Ant vežimėlio padėtas masės $m_1 = 2{,}0\,\mathbf{kg}$ kūnas, sujungtas su kitu masės $m_2 = 1{,}0\,\mathbf{kg}$ kūnu lengvu netąsiu siūlu, permestu per nejudamą skridinį, pritvirtintą prie vežimėlio (žiūr. brėž.). Kokiu pagreičiu turi judėti į kairę vežimėlis, kad kūnai išliktų nejudami vežimėlio atžvilgiu? Kūnų trinties į vežimėlį koeficientas $\mu = 0{,}10$.



Ats.: $3.8\,\mathbf{m/s}^2 < a < 6{,}3\,\mathbf{m/s}^2$

Sprendimas



Kūnai išlieka nejudami vežimėlio atžvilgiu, kai pagreitis a yra iš tam tikro intervalo. Užrašome dinamikos lygtį (antrąjį Niutono dėsnį) kūnui m_1, kai pagreitis maksimalus (tai atitinka trinities jėgas, pažymėtas juodomis strėlytėmis):

$$m_1 a_{maks} = m_2 g + \mu m_2 a_{maks} + \mu m_1 g$$

Iš čia $a_{maks} = \dfrac{m_2 g + \mu m_1 g}{m_1 - \mu m_2} \approx 6{,}3\,\mathbf{m/s}^2$.

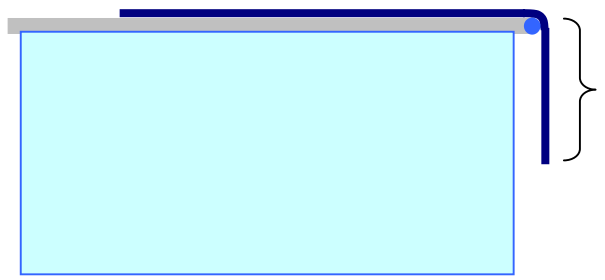
Užrašome dinamikos lygtį (antrąjį Niutono dėsnį) kūnui m_1, kai pagreitis minimalus (tai atitinka trinities jėgas, pažymėtas mėlynomis strėlytėmis):

$$m_1 a_{\min} = m_2 g - \mu m_2 a_{\min} - \mu m_1 g$$

Iš čia $a_{\min} = \dfrac{m_2 g - \mu m_1 g}{m_1 + \mu m_2} \approx 3{,}8\,\mathbf{m/s}^2$.

7.
Ant horizontalaus stalo padėta ilgia vienalytė grandinė. Ji pradeda slinkti stalu, kai jos dalis, sudaranti 20 % viso ilgio, yra nusvirusi nuo stalo krašto. Koks trinities tarp stalo ir grandinės koeficientas?

Sprendimas



Tegul $k = 20\% = 0{,}2$.
Jei trinties tarp grandinės ir stalo koeficientas μ, grandinės masė M, jos ilgis L, slydimas prasidės, kai bus tenkinama lygtis:

$$\frac{M}{L}Lk \cdot g = \mu \frac{M}{L}L(1-k)g \cdot$$

Iš čia $\mu = \dfrac{k}{1-k} = 0{,}25 \cdot$

8.
Ant stalo padėta masės m_1 = 3,0 kg lenta, ant kurios uždėtas masės m_2 = 1,0 kg tašelis. Kokia horizontalia jėga reikia veikti lentą, kad tašelis nuslystų nuo lentos? Trinties koeficientas tarp tašelio ir lentos μ_1 = 0,15, o tarp lentos ir stalo μ_2 = 0,25.

Sprendimas

Kai tašelis slysta lentos atžvilgiu, tarp lentos ir tašelio veikia trinties jėga $F_{tr1} = \mu_1 m_2 g$. Tokio dydžio jėga suteiks tašeliui pagreitį, ir tokio pat dydžio jėga priešinsis lentos judėjimui, t.y. ji bus priešingos krypties tai jėgai $\boldsymbol{F}$ (ją turime rasti), kuria veikiama lenta. Trinties jėga tarp lentos ir stalo taip pat veiks priešinga $\boldsymbol{F}$ kryptimi ir lygi $F_{tr2} = \mu_2 (m_1 + m_2)g$. Tuomet lentai galime užrašyti 2-ąjį Niutono dėsnį:

$$m_1 a_1 = F - \mu_1 m_2 g - \mu_2 (m_1 + m_2) g.$$

Šis dėsis tašeliui atrodo taip:

$m_2 a = \mu_1 m_2 g$.

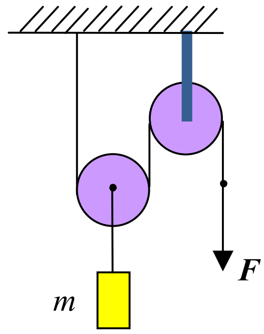
Kad tašelis nuslystų nuo lentos, būtina, kad $a_1 > a$. Ribiniu atveju, kai $a_1 = a$,

$\mu_1 m_1 g = F - \mu_1 m_2 g - \mu_2(m_1 + m_2)g$.

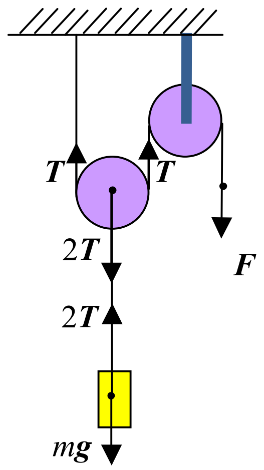
Išsprendę gauname

$F > (\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)g = 15{,}7\text{N}$.

9.
Krovinys, kurio masė m = 40,0 kg, keliamas į viršų sistema, kurią sudaro judamas ir nejudamas skridiniai (žiūr. brėž.). Rasti pagreitį, kuriuo juda krovinys, ji virvės, permestos per nejudamą skridinį, galą veikia jėga F = 250 N. Į virvės ir skridinių masę nekreipti dėmesio.



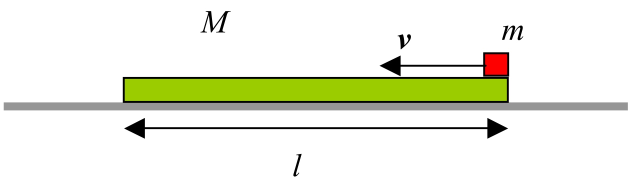
Sprendimas



Pastebėję, kad $T = F$, užrašome 2-ąjį Niutono dėsnį kroviniui:
$2F - mg = ma$.
Iš čia surandame pagreitį a:
$a = \frac{2F}{m} - g = \frac{2 \cdot 250}{40{,}0} - 9{,}8 = 2{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

10.
Gulinčios ant lygaus horizontalaus stalo masės M ir ilgio l lentos galo padėtas nedidelis masės m kūnas. Kokį horizontalų greitį v reikia suteikti smūgiu kūnui m (žiūr. brėž.), kad jis nuslystų nuo lentos? Trinties koeficientas tarp lentos ir kūno μ, o trinties į stalą galima nepaisyti.

Ats.: $v = \sqrt{2\mu g l\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$.



Sprendimas

Imdami ribinį atvejį, kai kūnas m yra pačiame lentos gale ir ten sustoja, galime taikyti kūno m ir lentos M uždarajai sistemai judesio kiekio ir energijos tvermės dėsnius:

$$\begin{cases} mv = (M+m)u \\ \mu m g l = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{(M+m)u^2}{2} \end{cases}.$$

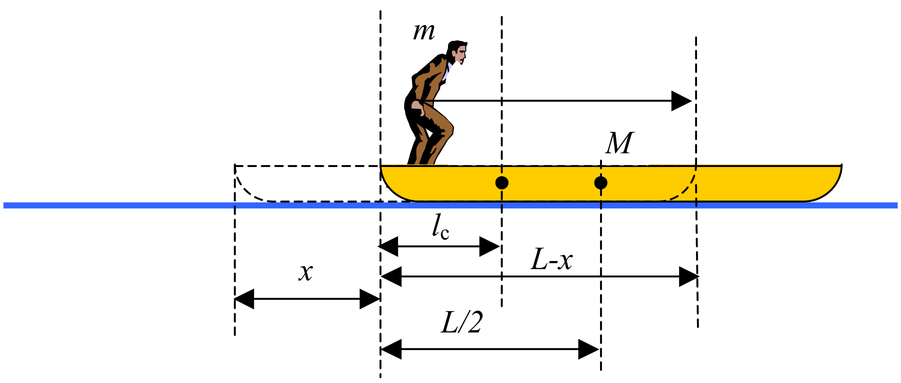
Iš šių lygčių eliminavę u, gauname

$$v = \sqrt{2\mu g l\left(1 + \frac{m}{M}\right)}.$$

11.
Valtis su žmogumi stovi nejudėdama ežere. Rasti, kiek pasislenka valtis žmogui pereinant iš vieno valties galo į kitą. Žmogaus masė $m = 80\,\mathbf{kg}$, valties masė $M = 150\,\mathbf{kg}$, o jos ilgis $L = 4{,}0\,\mathbf{m}$.

Sprendimas

Tegul pradžioje žmogus yra kairėje valties pusėje.



Pasirinkę atskaitos tašką kairįjį valties kraštą, randame valties ir žmogaus sistemos masių centrą:

$$M\frac{L}{2}+m\cdot 0=(m+M)l_c,$$

iš čia $l_c=\frac{M}{2(M+m)}L$.

Žmogui pereinant iš vieno valties galo į kitą, masių cantro padėtis nekinta, nes trintis tarp valties ir vandens labai maža, ir nagrinėjama sistema gali būti laikoma kaip uždaroji. Taigi, dabar masių centro padėtį galima nusakyti lygtimi:

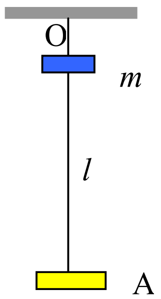
$$(m+M)l_c=m(l-x)+M\left(\frac{L}{2}-x\right).$$

Iš šių dviejų lygčių gauname

$$x=\frac{m}{m+M}L=1{,}4\,\mathbf{m}.$$

12.

Lygios ilgio *l* ir standumo *k* gumos atkarpa vienu galu pritvirtinta taške O. Kitame jos gale yra pritvirtintas ribotuvas A. Iš taško O gumos atkarpa pradeda kristi masės *m* žiedas. Rasti didžiausią gumos pailgėjimą, jei į gumos ir ribotuvo mases bei trintį galima neatsižvelgti.



Sprendimas

Užrašome energijos tvermės dėsnį dviem kraštinėms žiedo padėtims:

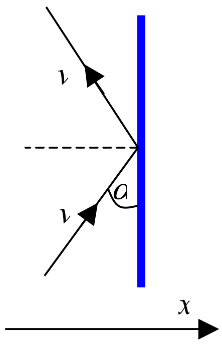
$$mg(l+x)=\frac{kx^2}{2}.$$

Iš čia $x=\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+2\frac{kl}{mg}}\right)$.

13.

Vandens čiurkšlė, kurios skerspjūvis $S = 6{,}0\,\mathbf{cm}^2$, atsitrenkia į sieną kampu $\alpha = 30°$ ir tampriai atšoka, neprarasdama greičio. Rati jėgą, kuria veikiama siena, jei čiurkšlės greitis $v = 12{,}0\,\mathbf{m/s}$.

Sprendimas



Jei nagrinėtume čiurkšlės trajektoriją kaip parodyta brėžinyje, x-kryptimi judesio kiekio pokytis lygus

$$\Delta p = 2\Delta m v \sin\alpha .$$

Jėga, veikianti sieną, atsiranda dėl to, kad šis judesio pokytis įvyksta per tam tikrą laiką Δt, t.y.

$$F\Delta t = 2\Delta m v \sin\alpha . \text{ Taigi } F = 2\frac{\Delta m v \sin\alpha}{\Delta t}.$$

Bet $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{S\Delta x\rho}{\Delta t} = Sv\rho$ (čia ρ - vandens tankis). Tuomet $F = 2Sv^2\rho\sin\alpha \approx 86{,}4\mathbf{N}$

14.

Kam lygus matematinės svyruoklės, kurios ilgis l, svyravimo periodas šiais atvejais: 1) lifte, kuris kyla su pagreičiu a; 2) lifte, kuris leidžiasi su pagreičiu a; 3) vagone, judančiame horizontalia kryptimi su pagreičiu a; 4) vežimėlyje, kuris be trinties leidžiasi nuožulniąja plokštuma, sudarančia kampą α su horizontu?

Ats.: 1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$; 3) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$; 4) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$.

Sprendimas

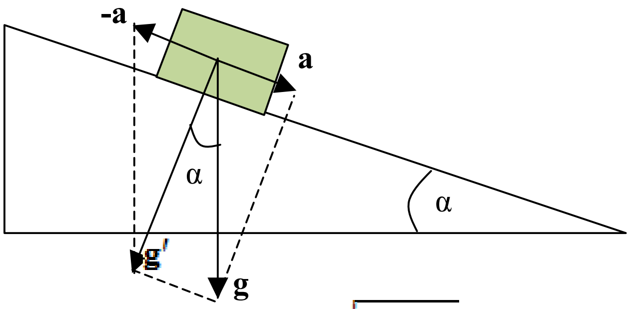
Visais atvejais matematinė svyruoklė svyruoja neinercinėje sistemoje, kurioje reiškinius galime aprašyti inercinės sitemos lygtimis, bet naudoti charakteringą pagreitį $\boldsymbol{g}'$. Pagal Dalambero principą šis pagreitis $\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$, čia $\boldsymbol{a}$ – neinercinės sistemos pagreitis inercinės sistemos atžvilgiu.

1 – uoju atveju $g' = g + a$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$.

$2-$ uoju atveju $g' = g - a$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$.

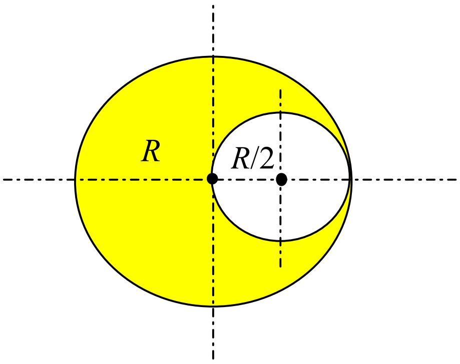
$3-$ uoju atveju $g' = \sqrt{g^2+a^2}$,todėl $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$.

4-uoju atveju vežimėlis juda su pagreičiu $a = g\sin\alpha$.

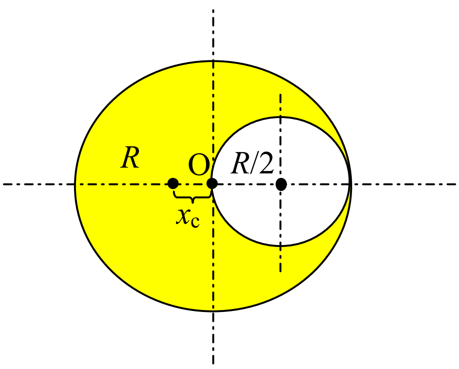


Taigi, $g' = g\cos\alpha$, todėl $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}}$.

15.
Rasti vienalyčio spindulio R disko, turinčio spindulio $R/2$ kiaurymę, kurios centras yra atstumu $R/2$ nuo disko centro, masių centrą.



Sprendimas



Galime įsivaizduoti, kad užpildome kiaurymę iki vienalyčio disko, kurio masių centras yra geometrinis skritulio centras O.
Užrašome jėgos momentų lygybę disko centro O atžvilgiu kiaurymės formos figūrai ir ieškomai figūrai:

$$\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left[\pi R^2 - \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right]\cdot x_c \ .$$

Iš čia $x_c = \frac{R}{6}$.

Ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2008 02 12.