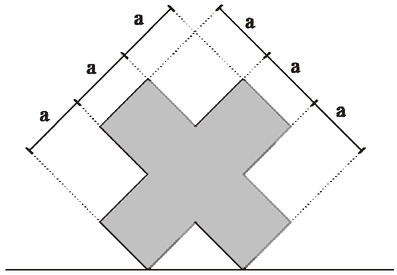
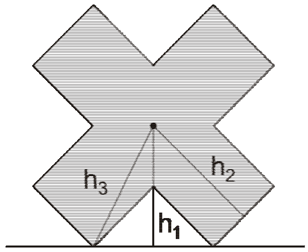
56-oji Lietuvos moksleivių fizikos olimpiada
12 klasės užduotys



1. Ilgas pliuso formos skerspjūvio strypas guli ant neslidaus ir netampraus paviršiaus, kaip parodyta brėžinyje. Apskaičiuokite darbą, kurį reikia atlikti norint strypą perritinti ant kito šono. (Strypo orientacija brėžinio plokštumoje pasisuka 90 laipsnių kampu). Strypo masė *m*, laisvojo kritimo pagreitis *g*, geometriniai matmenys parodyti brėžinyje. Tarti, kad smūgio metu mechaninė energija prarandama.

Sprendimas

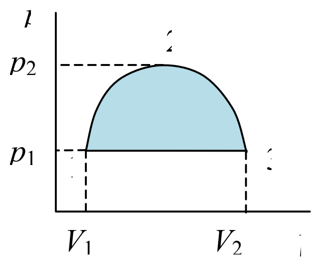
Ridenant strypą, jo masės centras pakyla iš aukščio h_1 į aukštį h_3 ir nukrenta į h_2. Tada jį vėl turime pakelti iš h_2 į h_3, o po to jis nusirita į h_1. Taigi, atliekamas darbas yra



$$A = mg(h_3 - h_1) + mg(h_3 - h_2) = mg(2h_3 - h_1 - h_2)$$

Kadangi $h_1 = \sqrt{2}a, h_2 = \frac{3}{2}a, h_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}a$, turime

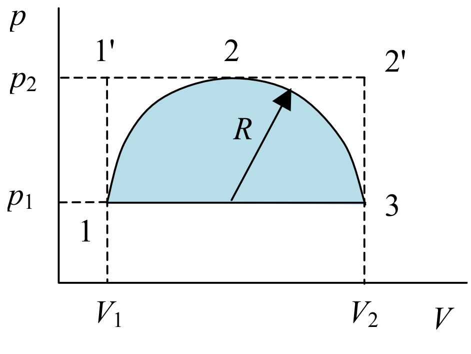
$$A = mga(\sqrt{10} - \sqrt{2} - \tfrac{3}{2}) \approx 0.248mga\,.$$



2. Brėžinyje parodytas uždaras termodinaminis ciklas 1231, kurį atlieka idealiosios dujos. p-V koordinačių plokštumoje figūra 1231 – pusskritulis. Ciklo metu šaldytuvui dujos atiduoda šilumos kiekį Q. Koks šios šiluminės mašinos n.v.k.?

Sprendimas

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{A+Q}\,.$$



p-V koordinatėse darbą *A* atitinka uždaro ciklo ribojamas plotas, t.y. pusskritulis 1231. Jo plotą galime apskaičiuoti, palygindami pusskritulio plotą ir apie jį apibrėžto stačiakampio 11'2'3 plotus. Jei pusskritulio spindulys *R*, tai

$$S_{1231} = \frac{\pi R^2}{2},\ S_{11'2'3} = 2R^2.\ \text{Taigi,}\ \frac{S_{1231}}{S_{11'2'3}} = \frac{\pi}{4}.$$

Tada $A = \frac{\pi}{4}(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$.

Tuo būdu, $\eta = \frac{\pi(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)}{\pi(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) + 4Q}$

3. Metalinį spindulio R1 rutulį ore įelektrino iki potencialo φ1 ir atjungė nuo įtampos šaltinio. Po to šis rutulys suliečiamas su kitu metaliniu spindulio R2 neįelektrintu rutuliu. Rasti: 1) pradinį pirmojo rutulio krūvį; 2) susilietusių rutulių krūvius ir potencialus; 3) kiekvieno rutulio energiją prieš ir po susilietimo; 4) susilietimo metu išsiskyrusią energiją ir paaiškinti energios išsiskyrimo priežastį. Rutulio elektrinė talpa C = 4πε0εR (SI sistemoje), čia ε0 = 8,85·10-12 F/m – vakuumo elektrinė konstanta, ε - aplinkos santykinė dielektrinė skvarba (tarti, kad orui ε ≈ 1). Apskaičiuoti visus dydžius, jei φ1 = 3000 V, R1 = 10 cm, R2 = 4 cm.

Sprendimas

1) Žinome, kad $C = \frac{q}{U}$. Mūsų atveju pirmojo rutulio krūvis $q_1 = \varphi_1 C_1$ arba

$q_1 = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_1 \varphi_1 = 33{,}4\,\text{nC}$.

2) Suliestų rutulių potencialai lygūs, todėl

$\frac{q'_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$ arba $\frac{q_1 - q_2}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$, taigi $q_2 = q_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 23{,}8$ nC ir $q'_1 = q_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 9{,}54\,\text{nC}$.

Kaip minėta, sujungtų rutulių potencialai vienodi, t.y. $\varphi = \frac{q_2}{C_2} = \varphi_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2140$ V.

3) Rutulio energija $E = \frac{C\varphi^2}{2}$ arba $E = \frac{q\varphi}{2}$. Taigi pirmojo rutulio energija prieš susilietimą lygi

$E_1 = \frac{C_1\varphi_1^2}{2} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1\varphi_1^2 = 5\cdot 10^{-5}$ J. Antrojo rutulio energija prieš susilietimą lygi 0. Po

susilietimo pirmojo rutulio energija $E'_1 = \frac{C_1\varphi^2}{2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1^3\varphi_1^2}{(R_1 + R_2)^2} = 2{,}55\cdot 10^{-5}$ J, o antrojo rutulio

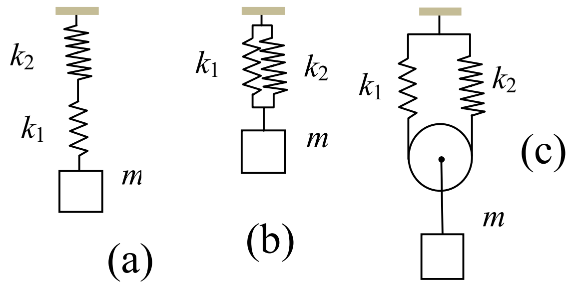
energija $E_2 = \frac{C_2\varphi^2}{2} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2 R_1^2\varphi_1^2}{(R_1 + R_2)^2} = 1{,}02\cdot 10^{-5}$ J.

4) Išsiskyrusi susilietimo metu kaip kibirkšties energija lygi

$\Delta E = \frac{C_1\varphi_1^2}{2} - \frac{C_1\varphi^2}{2} - \frac{C_2\varphi^2}{2}$. Įrašę gautas vertes randame $\Delta E = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon\varphi_1^2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1{,}43\cdot 10^{-5}$ J.

Čia nekreipėme dėmesio į rutulių elektrostatinės sąveikos energiją po susilietimo.

4. Apskaičiuoti svyravimo periodus trimis skirtingais atvejais (žr. a, b ir c brėž.). Lengvų spyruoklių standumai k1 ir k2, svyruojančio kūno masė m, o (c) atveju jungiantis spyruokles siūlas netąsus, jo ir skridinio masių galima nepaisyti.



Sprendimas

Visais atvejais naudosimės harmoninį svyravimą lemiančia lygtimi $F = -k\Delta x$, čia F – jėga, kuri grąžina („-„ ženklas būtent tai ir parodo) kūną į pusiausvyros padėtį, Δx – kūno nuokrypis nuo pusiausvyros padėties. Tuomet svyravimų periodas

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ ;$$

(a) Jei kūnas m nukrypsta nuo pusiausvyros dydžiu Δx, jį veikia jėga $-F$, kuri vienoda abiems spyruoklėms. Tuomet

$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$, bet kiekvienai spyruoklei $\Delta x_1 = \dfrac{F}{k_1}$ ir $\Delta x_2 = \dfrac{F}{k_2}$. Taigi,

$F = -\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\Delta x$. Tada svyravimo periodas $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(k_1 + k_2)m}{k_1 k_2}}$.

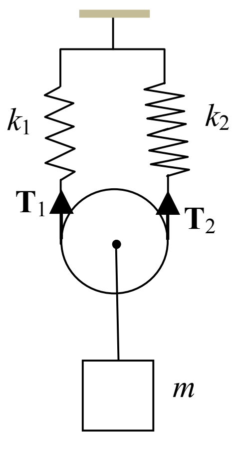
(b) Jei kūnas m nukrypsta nuo pusiausvyros dydžiu Δx, kiekviena spyruoklė pailgėja šiuo dydžiu, todėl kūną veikia jėga $-F$, kuri lygi keikvienos spyruoklės jėgų sumai, t.y.

$F = T_1 + T_2$. Bet $T_1 = -k_1\Delta x$ ir $T_2 = -k_2\Delta x$. Tuo būdu, $F = -(k_1 + k_2)\Delta x$, todėl

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}\ .$$

(c) Šiuo atveju spyruoklių tempimo jėga vienoda ($T_1 = T_2 = T$), bet kūnas, būdamas sujungtas su spyruoklėmis per skridinį, yra veikiams jėga $F = T_1 + T_2 = 2T$ (žr. brėž.). Kiekvienos spyruoklės pailgėjimas lygus: $\Delta x_1 = \dfrac{T}{k_1}$ ir $\Delta x_2 = \dfrac{T}{k_2}$ (čia mus domina tik modulis, todėl „-„ praleidžiame).

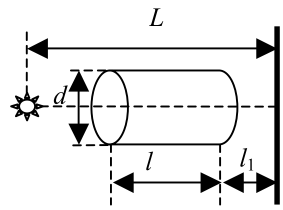
Jei kūnas nukrypsta nuo pusiausvyros dydžiu Δx, jis lygus abiejų spyruoklių pailgėjimų sumai,



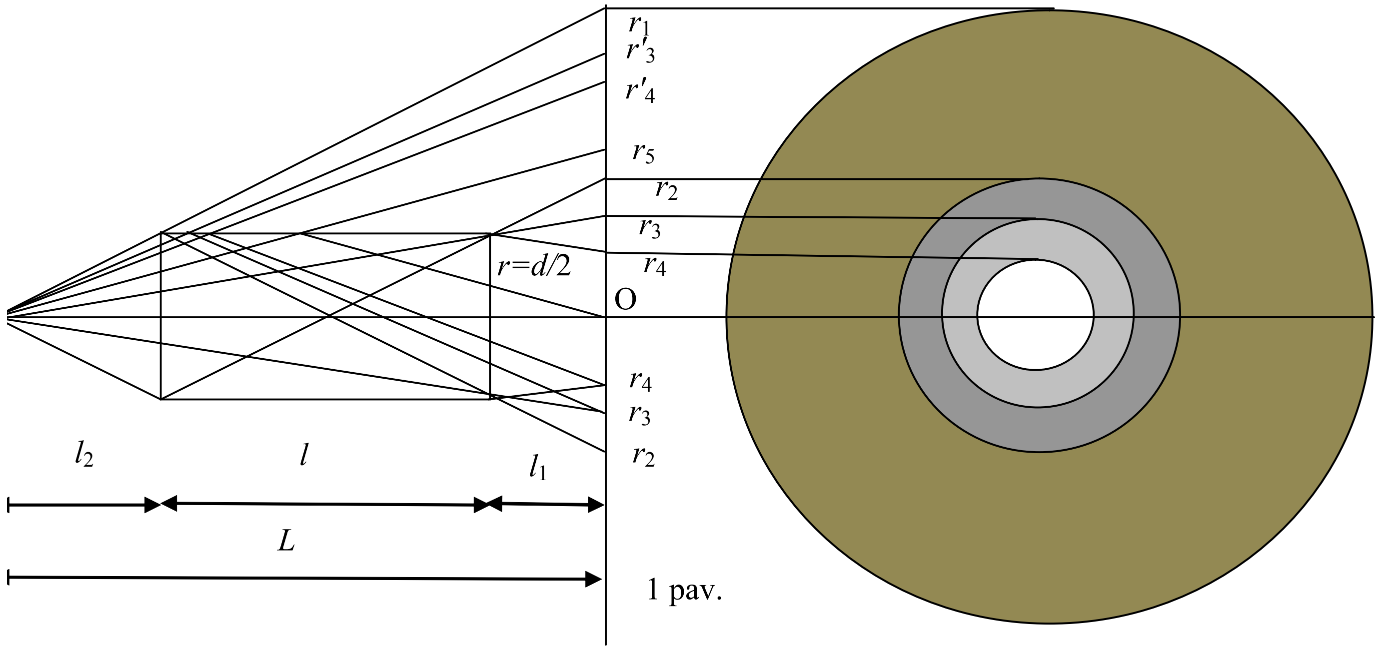
t.y. $2\Delta x = T\left(\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}\right)$. Iš čia $T = \dfrac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}\Delta x$. Priėmę domėn jėgos ir nuokrypio ženklus, galiausiai kūnui m gauname:

$F = 2T = -\dfrac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}\Delta x$. Tuomet $T = \pi\sqrt{\dfrac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$.

5. Taškinis šviesos šaltinis yra L = 11 cm atstumu nuo plokščio ekrano. Tarp šaltinio ir ekrano yra plonasienis metalinis vamzdelis veidrodiniu vidiniu paviršiumi. Vamzdelio ilgis l = 6 cm, skersmuo d = 3 cm, jo simetrijos ašis yra statmenyje, nuleistame iš šviesos šaltinio į ekraną, o atstumas nuo ekrano iki jam artimesnio vamzdelio galo l1 = 2 cm. Nubraižykite ir aprašykite ekrane susidariusį vaizdą.



Sprendimas



1 pav.

Gaunamas vaizdas su atitinkamais pažymėjimais pateiktas 1 pav. Panaudojant geometrinės optikos atspindžio dėsnį gauname 5 skirtingo apšviestumo zonas su ryškiom ribom, kurias charakterizuoja r_1, r_2, r_3 ir r_4 (žr. brėž.)

$$r_1 = Ld/2(L-l-l_1),\ r_1 = 5{,}5\,\text{cm},\ r_2 = d(l+2l_1)/2l,\ r_2 = 2{,}5\,\text{cm},$$
$$r_3 = Ld/2(L-l_1),\ r_3 \approx 1{,}83\,\text{cm},\ r_4 = d(L-2l_1)/2(L-l_1),\ r_4 \approx 1{,}17\,\text{cm}.$$

Vaizdo zonų apšviestumui įvertinti panaudojame nustatytą fotometrijoje taškinio šviesos šaltinio sukuriamo apšviestumo išraišką $E = I\cos\alpha / y^2$ (čia I – šviesos stiptumas, α - šviesos kritimo kampas, y – atstumas nuo šaltinio iki ekrano). Jei nesant vamzdelio didžiausią ekrano apšviestumą taške O pažymėsime E_0, tai ekrano taške, x atstumu nutolusiame nuo O, apšviestumas būtų $E = E_0 \dfrac{L^3}{(L^2+x^2)^{3/2}}$. Tai pavaizduota 2 pav.

Pastačius vamzdelį šviesos srautai persiskirsto.

Pažymime zonų apšviestumus su indeksais, nusakančiais atitinkamų zonų spindulius, t.y. E_{23}, E_{34} ir E_{04}. Patogu naudoti šviesos srautą Φ. Tada apšviestumas $E = d\Phi / dS$.

$$E_{r_3<x<r_2} = \frac{d\Phi_{r_3<x<r_2}}{2\pi x dx}; \quad d\Phi_{r_3<x<r_2} = d\Phi_{r_3'<x'<r_1};$$

$$E_{r_3<x<r_2} = \frac{E_{r_3'<x'<r_1} 2\pi x' \mathrm{d}x'}{2\pi x \mathrm{d}x} = \frac{E_0 L^3 x' \mathrm{d}x'}{(L^2 + x'^2)^{3/2} x \mathrm{d}x};$$

$$x' = x + d; \quad \mathrm{d}x' = \mathrm{d}x;$$

$$E_{r_3<x<r_2} = \frac{E_0 L^3 (x+d)}{(L^2 + (x+d)^2)^{3/2} x} = \frac{E_0 L^3 (x+d)}{[L^2 + (x+d)^2]^{3/2} x}.$$

Analogiškai ir E_{34}:

$$E_{r_4<x<r_3} = E_x + \frac{d\Phi_{r_4<x<r_3}}{2\pi x \mathrm{d}x}; \quad d\Phi_{r_4<x<r_3} = d\Phi_{r_4'<x<r_3'};$$

$$E_{r_4<x<r_3} = E_x + \frac{E_0 L^3 (x+d)}{(L^2 + (x+d)^2)^{3/2} x} = E_0 \left(\frac{L^3}{(L^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{L^3 (x+d)}{[L^2 + (x+d)^2]^{3/2} x} \right).$$

Dydžiui E_{04} gauname (čia aišku, kad $r_5 = d$):

$$E_{0<x<r_4} = E_x + \frac{\mathrm{d}\Phi_{r_5<x'<r_4'}}{2\pi x \mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\Phi_{r_2<x''<r_5}}{2\pi x \mathrm{d}x}; \quad x' = x + d; \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}x'; \quad x'' = d - x; \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}x''.$$

Paimti vienodi ženklai, nes augant x, srautas $\mathrm{d}\Phi_{r_2<x''<r_5}$ šiuo atveju didėja, o visais kitais atvejais mažėja. Taip pat aišku, kad plotai negali būti neigiami. taigi

$$E_{0<x<r_4} = E_x + \frac{E_{x'} 2\pi x' \mathrm{d}x'}{2\pi x \mathrm{d}x} + \frac{E_{x''} 2\pi x'' \mathrm{d}x''}{2\pi x \mathrm{d}x} = E_x + \frac{E_{x'} x'}{x} + \frac{E_{x''} x''}{x} =$$

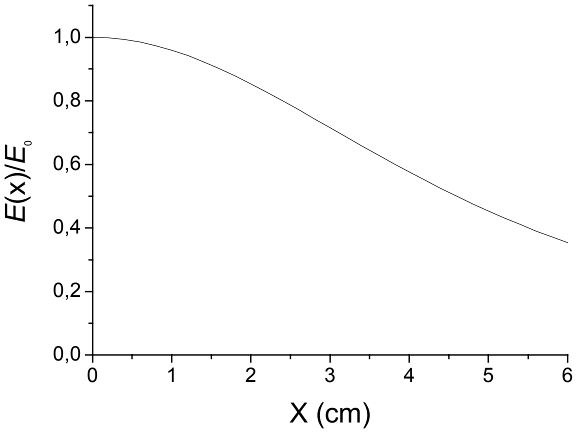
$$= E_x + \frac{E_0 L^3 (x+d)}{[L^2 + (d+x)^2]^{3/2} x} + \frac{E_0 L^3 (d-x)}{[L^2 + (d-x)^2]^{3/2} x}$$

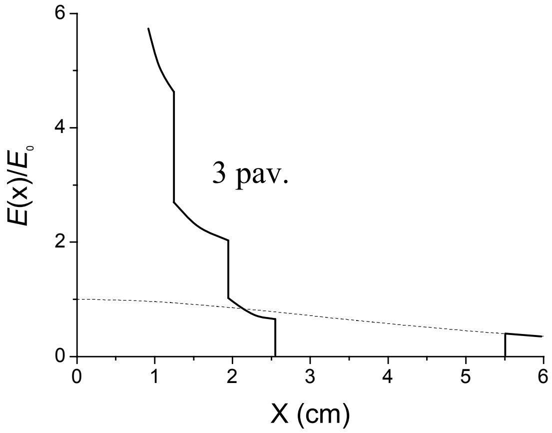
$$E_{0<x<r_4} = E_0 \left(\frac{L^3}{(L^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{L^3 (x+d)}{[L^2 + (d+x)^2]^{3/2} x} + \frac{L^3 (d-x)}{[L^2 + (d-x)^2]^{3/2} x} \right);$$

$$E_{0<x<r_4} = E_0 \left(\frac{L^3}{(L^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{L^3 (x+d)}{[L^2 + (d+x)^2]^{3/2} x} + \frac{L^3 (d-x)}{[L^2 + (d-x)^2]^{3/2} x} \right).$$

Pateiktoji formulė netenka prasmės kai $x \to 0$. Fizikiniu požiūriu taškinis šviesos šaltinis tėra matematinė abstrakcija, ji tinka, kai šviesos šaltinio matmenys maži lyginant su kitais sistemos matmenimis. Kai $x \to 0$ turėtume nagrinėti ne taškinio šviesos šaltinio, o baigtinių matmenų šviesos šaltinio sukurtą apšviestumą. 3 pav. pateiktas apšviestumo pasiskirstymas kai $0{,}6 \leq x \leq 6\ \mathrm{cm}$, laikant, kad šviesos šaltinio matmenys žymiai mažesni už 0,1 cm (punktyrinė linija atitinka 2 pav. pateiktą apšviestumą).

2 pav.





3 pav.

Ši informacija interneto svetainėje www.olimpas.lt skelbiama nuo 2008 05 08.