13-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
9-oji užduotis Nr. FT13-9 / 2020 01 06 – 2020 02 02

Sąlyga / FT13-9 ▼

Skrieja ir sukasi ledo ritulys

Ledo ritulio ritulys yra homogeninis ritinys, kurio pagrindo skersmuo d = 7,62 cm. Rituliui suteikus pradinį greitį v = 3,5 m/s, nesisukantis ritulys sustoja nuslinkęs ledu atstumą l = 30 m. Ritulio ir ledo trinties koeficientas nepriklauso nuo greičio. 1) Po kiek laiko sustos vietoje besisukantis ritulys jam suteikus pradinį kampinį greitį ω = 150 s^{-1}? 2) Rituliui suteikiamas pradinis kampinis greitis ω = 150 s^{-1}, o jo centrui pradinis slenkamojo judėjimo greitis v = 3,5 m/s. Kokios formos trajektorija judės ritulys? 3) Įvertinkite pagreitį, kuriuo judės pradėjusio slinkti besisukančio ritulio masės centras. 4) Kokius atstumus nuslinks nesisukantis ir besisukantis ritulys iki sustodamas – vienodus ar nevienodus? Atsakymą pagrįskite.

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 01 06.*

Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT13-9 ▼

1) Pradiniu momentu ritulio kinetinė energija

$$E_k = mv^2/2.$$

Slystant rituliui trinties jėga iki rituliui sustojant atlieka darbą

$$A = F_{tr}l = \mu mgl,$$

$$A = E_k,$$

$$\mu mgl = \frac{mv^2}{2}$$

$$\mu = \frac{v^2}{2gl}, \quad \mu = \frac{3{,}5^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot 30} = 0{,}021.$$

Vietoje besisukantį ritulį veikia trinties jėgos sukurtas jėgos momentas N. Laikome, kad trinties jėga tolygiai pasiskirsčiusi visame ritulio ir ledo sąlyčio plote. Tada ploto vienetą veikia trinties jėga

$$f = \frac{4\mu mg}{\pi d^2}.$$

Ritulio pagrindą suskirstome koncentriniais žiedais, kurių spindulys r, plotis dr, o plotas $2\pi r dr$. Tokį žiedą veikia trinties jėga

$$dF = \frac{4\mu mg}{\pi d^2} \cdot 2\pi r dr = \frac{8\mu mg}{d^2} \cdot r dr$$

ir sukuria jėgus momentą

$$dN = r dF = \frac{8\mu mg}{d^2} \cdot r^2 dr$$

Tada

$$N = \int_0^{d/2} dN = \frac{8\mu mg}{d^2}\int_0^{d/2} r^2 dr = \frac{8\mu mg}{d^2} \cdot \frac{d^3}{3 \cdot 8} = \frac{\mu mgd}{3} = \frac{v^2 md}{6l}.$$

Toks jėgos momentas suteikia rituliui kampinį pagreitį

$$\varepsilon = \frac{N}{I},$$

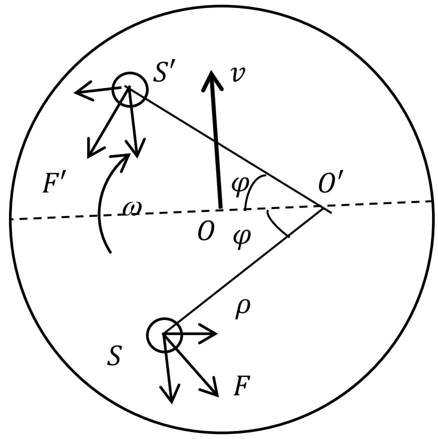
čia $I = md^2/8$ yra ritulio inercijos momentas jo simetrijos ašies atžvilgiu.

$$\varepsilon = \frac{8v^2md}{6lmd^2} = \frac{4v^2}{3ld}.$$

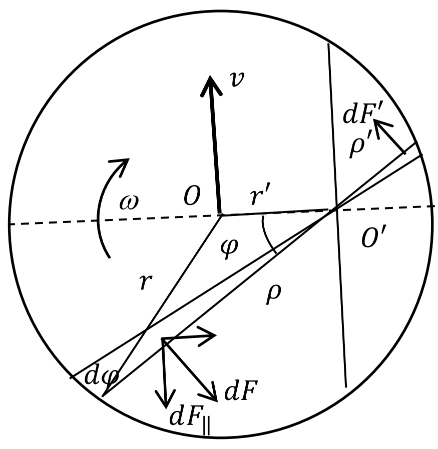
Ritulys sustos praėjus laikui

$$\tau = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{3ld\omega}{4v^2}, \quad \tau = \frac{3 \cdot 30 \cdot 0{,}0762 \cdot 150}{4 \cdot 3{,}5^2} = 21 \text{ s.}$$

2) Besisukančio ritulio pagrindo taškai slenka ledu skirtingomis kryptimis, todėl juos veikiančių trinties jėgų kryptys taip pat skiriasi. Trinties jėga visada nukreipta prieš greičio kryptį. Besisukančio ritulio centrui O judant greičiu v taškas O' nejuda, jei $v = r'\omega$. (pažymim $r' = OO'$) Parenkame du vienodus mažus ploto elementus S ir S', simetriškus tiesės OO' atžvilgiu. Juos veikia vienodo didumo, bet skirtingos krypties trinties jėgos F ir F', statmenos linijoms SO' ir $S'O'$. Lygiagrečios OO' tų jėgų dedamosios yra priešingų krypčių, jų suma lygi 0. Kadangi ritulio pagrindas simetriškas OO' atžvilgiu, lygi 0 visos trinties jėgos dedamoji, lygiagreti OO' ir statmena v. Taigi, trinties jėga nekeičia ritulio greičio krypties, jo judėjimo trajektorija – tiesė.



3) Per tašką O' nubrėžta lygiagreti greičiui tiesė dalina ritulio pagrindą į dvi dalis, kuriose veikiančios ploto elementus trinties jėgų dedamosios, lygiagrečios greičiui, yra priešingų krypčių .Nustatome trinties jėgos dF, veikiančios segmentą $d\varphi$, dedamąją $dF_{\|}$, lygiagrečią v. Imame $0 < \varphi < \pi/2$. Pažymime $OO'=r'$, $r = d/2$, atstumą nuo O' iki ritulio pagrindo krašto pažymime ρ.



$$dF = f\rho^2 d\varphi/2,$$

$$r^2 = \rho^2 + r'^2 - 2\rho r' \cos\varphi,$$

$$\rho^2 - 2\rho r' \cos\varphi + r'^2 - r^2 = 0,$$

$$\rho = r'\cos\varphi + \sqrt{r'^2\cos^2\varphi + r^2 - r'^2} = r'\cos\varphi + \sqrt{r^2 - r'^2\sin^2\varphi},$$

$$dF_{\|} = dF\cos\varphi = \frac{f}{2}\left(r'\cos\varphi + \sqrt{r^2 - r'^2\sin^2\varphi}\right)^2 \cos\varphi \, d\varphi.$$

Analogiškai kitoje pagrindo dalyje

$$dF'_{\|} = dF' \cos\varphi = \frac{f}{2}\left(-r'\cos\varphi + \sqrt{r^2 - r'^2 \sin^2\varphi}\right)^2 \cos\varphi\, d\varphi$$

Tada visam pagrindui imant $(0 < \varphi < \pi/2)$ ir $(0 > \varphi > -\pi/2)$ gauname (integralai abiejose srityse lygūs, o $dF_{\|}$ ir $dF'_{\|}$ yra priešingų krypčių)

$$F_{\|} = 2\left(\int_0^{\pi/2} dF_{\|} - \int_0^{\pi/2} dF'_{\|}\right) =$$

$$= f\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(r'\cos\varphi + \sqrt{r^2 - r'^2\sin^2\varphi}\right)^2 - \left(-r'\cos\varphi + \sqrt{r^2 - r'^2\sin^2\varphi}\right)^2\right]\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4f\int_0^{\frac{\pi}{2}} r'\cos^2\varphi\, \sqrt{r^2 - r'^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{4\mu m g r'^2}{\pi r^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, \sqrt{(r/r')^2 - \sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

$$a = \frac{4\mu g r'^2}{\pi r^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, \sqrt{(r/r')^2 - \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

$$a = \frac{8v^4}{\pi l d^2\omega^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, \sqrt{(d\omega/2v)^2 - \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

Integralas elementariomis funkcijomis neišreiškiamas, skaičiuojam skaitiniu metodu

$$a = 0{,}0975\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, \sqrt{2{,}67 - \sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

Pakeičiam $x = \sin\varphi$, $dx = \cos\varphi\, d\varphi$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - x^2}$,

$$a = 0{,}0975\int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)(2{,}67 - x^2)}dx,$$

Pažymim

$$y(x) = 0{,}0975\sqrt{(1 - x^2)(2{,}67 - x^2)}$$

ir sudarom lentelę

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	0,16	0,16	0,15	0,15	0,14	0,13	0,12	0,1	0,08	0,06	0

Integruojame panaudodami Simpsono formulę, gauname

$$a = 0{,}12\frac{m}{s^2}.$$

4) Per tašką O‘ nubrėžta lygiagreti greičiui tiesė dalina ritulio pagrindą į dvi dalis, kuriose veikiančios ploto elementus trinties jėgų dedamosios, lygiagrečios greičiui, yra priešingų krypčių, todėl besisukantį ritulį stabdo mažesnė jėga, ir besisukantis ritulys nuslysta didesnį atstumą. Galime pastebėti iš ankstesnės užduoties: nesisukančio ritinio slydimo pagreitis $a' = \mu g$, $a' = 0{,}021 \cdot 9{,}8 = 0{,}21\, m/s^2$ yra didesnis, t.y., nesisukančio ritulio greitis mažėja daugiau.

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt *nuolat skelbiamas nuo 2020 03 25.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT13-9 ▼

Verta atkreipti dėmesį, jog sąlygoje pateikta nuoroda „trinties koeficientas nepriklauso nuo greičio“ ir kai kurių sprendusiųjų naudota sąlyga „trinties jėga nepriklauso nuo greičio“ nėra tas pat. Jei kūnas nejuda, trinties jėga lygi nustumiančiai jėgai (gali būti ir nulis). Kūnui slenkant trinties jėga veikia priešinga greičiui kryptimi, todėl besisukančio kūno įvairūs taškai veikiami skirtingos krypties jėgomis. Nustatant atstojamąją jėgą tos jėgos turi būti sudedamos vektoriškai. Kai pereinant iš vieno taško į kitą jėgos kryptis kinta tolygiai naudojamas jėgos tankis (paviršiaus ploto vienetą veikianti jėga) ir integruojama. Analogiškai randamas ir jėgos momentas.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 03 25.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT13-9 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Rastas trinties koeficientas	1
2.	Rastas trinties jėgos sukurtas momentas	2
3.	Rasti ritulio kampinis pagreitis ir sukimosi laikas	2
4	Nustatyta ritulio trajektorija	1
5	Rasta trinties jėga, veikianti slystantį besisukantį ritulį	2
6	Rastas ritulio pagreitis	1
7	Paaiškintas trinties jėgos sumažėjimas slenkant besisukančiam rituliui	1
8.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-7)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 03 25.*