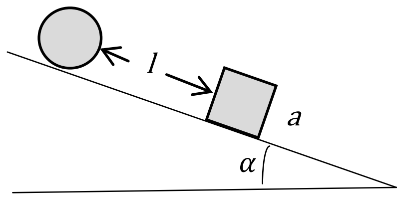
14-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
11-oji užduotis Nr. FT14-11 / 2021 02 15 – 2021 03 14

Ritinys trenkiasi į kubelį ir persirita per jį

Sąlyga / FT14-11 ▼

Ant nuožulniosios plokštumos, sudarančios kampą α = 8° su horizontu, padėtas kubelis, kurio briaunos ilgis a = 4 cm. Atstumu l nuo kubelio, nuožulniosios plokštumos aukštesnėje dalyje padedamas ritinys, kurio pagrindo skersmuo a, o masė lygi kubelio masei. Visiems paviršiams trinties koeficientas μ = 0,3. Ritinys paleidžiamas be pradinio greičio riedėti išilgai linijos, jungiančios kubelio ir ritinio masių centrus. Kokiam mažiausiam atstumui l esant ritinys persiris per kubelį, jei ritinio smūgis į kubelį plastiškas, o jo trukmė maža?



Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 02 15.*

Aiškinamasis sprendimas / FT14-11 ▼

Padėtą ant nuožulniosios plokštumos kubelį veikia nustumiančioji jėga

$$F = mg\sin\alpha.$$

Maksimali trinties jėga tarp kubelio ir nuožulniosios plokštumos

$$F_{tr} = \mu mg\cos\alpha.$$

$$\frac{F_{tr}}{F} = \mu\cot\alpha, \qquad \frac{F_{tr}}{F} = 0{,}3\cdot\cot 8\,° = 0{,}3\cdot 7{,}1 = 2{,}1.$$

Taigi, kubelis nejudės. Akivaizdu, kad ritinys iki smūgio į kubelį nuožulniąja plokštuma riedės neslysdamas. Ritinio centro greitį prieš pat smūgį į kubelį pažymime v, ritinio ir kubelio mases m. Ritinio slenkamojo judėjimo kinetinė energija

$$E' = \frac{mv^2}{2}.$$

Ritinio sukamojo judėjimo kinetinė energija

$$E" = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{\frac{mr^2}{2}\left(\frac{v}{r}\right)^2}{2}E = \frac{mv^2}{4}.$$

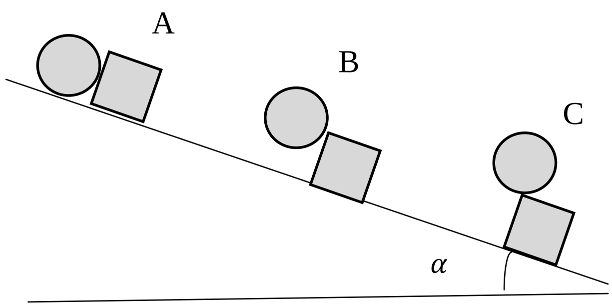
Čia $r = \frac{a}{2} = 2$ cm. Visa kinetinė energija

$$E_k = E' + E'' = \frac{3mv^2}{4}.$$

Tą energiją nustatom pagal ritinio potencinės energijos pokytį:

$$\Delta E_p = mgl\sin\alpha,$$
$$E_k = \Delta E_p,$$
$$\frac{3mv^2}{4} = mgl\sin\alpha,$$
$$v = 2\sqrt{gl\sin\alpha/3},\ \ v = 1{,}35\sqrt{l}.$$

Išskiriame ritinio persiritimo per kubelį etapus: A – ritinys tuoj po smūgio pradeda kilti slysdamas kubeliu, B – ritinio ir kubelio lietimosi taškas pasiekia kubelio viršų, C – vertikalė, einanti per ritinio ašį, pasiekia kubelio briauną, ir ritinys rieda kubelio viršum.



Smūgio trukmę pažymime τ, jo metu ritinį ir kubelį veika vienodo didumo priešingos krypties kintamos sąveikos jėgos $F(t)$. Kadangi smūgio trukmė maža, smūgio metu į sunkio jėgą neatsižvelgiame. Kadangi smūgio metu ritinys sukasi, tarp kubelio ir ritinio yra trintis, kubelį veikia prispaudimo prie nuožulniosios plokštumos jėga

$$F_p(t) = \mu F(t).$$

Ji sukuria kubelio ir nuožulniosios plokštumos trinties jėgą

$$F'_{tr}(t) = \mu^2 F(t).$$

Kubelio greitis tuoj po smūgio

$$v_A = \frac{1}{m}\int_0^{\tau}(F(t) - F'_{tr}(t))dt = \frac{1-\mu^2}{m}\int_0^{\tau}F(t)dt,$$
$$\frac{1}{m}\int_0^{\tau}F(t)dt = \frac{v_A}{1-\mu^2}.$$

Tokia pati yra ritinio centro greičio dedamoji, lygiagreti nuožulniajai plokštumai. Ritinio centro greičio pokytis

$$v - v_A = \frac{1}{m}\int_0^{\tau}F(t)dt,$$
$$v - v_A = \frac{v_A}{1-\mu^2},$$
$$v_A = \frac{1-\mu^2}{2-\mu^2}v = \frac{1-\mu^2}{2-\mu^2}\cdot 2\sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{3}},\ \ v_A = 0{,}642\sqrt{l}.$$
$$\frac{1}{m}\int_0^{\tau}F(t)dt = \frac{2}{2-\mu^2}\sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{3}} = 0{,}706\sqrt{l}.$$

Besisukantį ritinį smūgio metu sąlyčio su kubeliu taške veikianti trinties jėga $F_p(t)$ suteikia ritiniui statmeną nuožulniajai plokštumai greičio dedamąją

$$v'_A = \frac{\mu}{m}\int_0^{\tau} F(t)dt = \frac{2\mu}{2-\mu^2}\sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{3}}, \quad v'_A = 0{,}212\sqrt{l}.$$

Prieš pat smūgį ritinio kampinis greitis bus

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Smūgio metu ritinį jo centro atžvilgiu veiks jėgos momentas

$$N(t) = rF_p(t).$$

Tuoj po smūgio ritinio kampinis greitis bus

$$\omega_A = \omega - \frac{1}{I}\int_0^{\tau} N(t)dt.$$

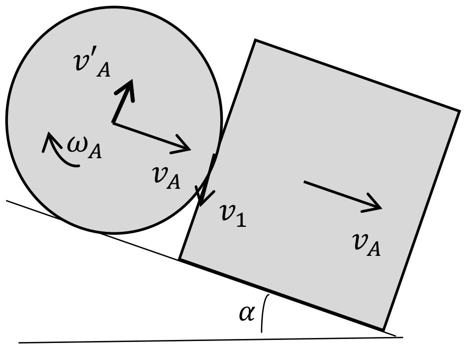
Čia $I = mr^2/2$ yra ritinio inercijos momentas centro atžvilgiu.

$$\omega_A = \omega - \frac{2}{mr^2}\int_0^{\tau} r\mu F(t)dt = \frac{v}{r} - \frac{2\mu v}{r(2-\mu^2)},$$

$$\omega_A = \frac{2-2\mu-\mu^2}{r(2-\mu^2)}\cdot 2\sqrt{\frac{gl\sin\alpha}{3}},$$

$$\omega_A = 46{,}2\sqrt{l}.$$

A



Ritinio lietimosi su kubeliu taško greitis ritinio centro atžvilgiu

$$v''_A = \omega_A r, \quad v''_A = 46{,}2\sqrt{l}\cdot 0{,}02 = 0{,}924\sqrt{l},$$

o to taško greitis kubelio atžvilgiu

$$v_1 = v''_A - v'_A = (0{,}924 - 0{,}212)\sqrt{l} = 0{,}712\sqrt{l} > 0.$$

Taigi, ritinys sukdamasis slys kubelio paviršiumi. Gauti rezultatai schematiškai pavaizduoti pav. A, mažiausias greitis v'_A.

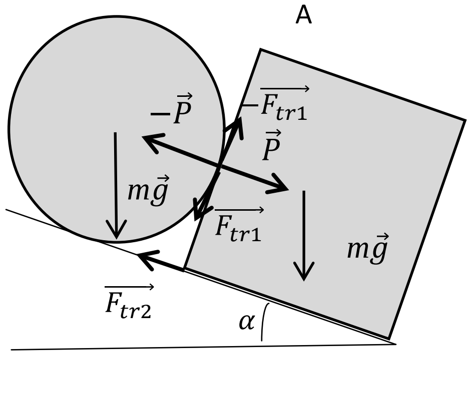
Nustatome tuoj po smūgio kubelį ir ritinį veikiančias jėgas. Kubelį ir ritinį veikia vienodos sunki jėgos $m\vec{g}$. Kubelį ir ritinį veikia vienodo didumo priešingų krypčių sąveikos jėgos $\vec{P}$ ir $-\vec{P}$. Kadangi ritinys sukasi, sąveikos jėgos sukuria trinties jėgas $\overrightarrow{F_{tr1}}$ ir $-\overrightarrow{F_{tr1}}$.

$$F_{tr1} = \mu P.$$

Kubelį ta jėga spaudžia prie nuožulniosios plokštumos sukurdama papildomą trinties jėgą

$$F_{tr2} = \mu F_{tr1} = \mu^2 P.$$

A



Kubelio pagreitį pažymime w_A. Tokia pat yra ir ritinio centro pagreičio dedamoji, lygiagreti nuožulniajai plokštumai. Kubelio ir ritinio pagreičiams turime:

$$\begin{cases} w_A = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) - \dfrac{P}{m}(1-\mu^2) \\ w_A = \dfrac{P}{m} - g\sin\alpha \end{cases},$$

$$\frac{P}{m} = \frac{\mu g\cos\alpha}{2-\mu^2}, \quad \frac{P}{m} = \frac{0{,}3\cdot 9{,}8\ \cos 8°}{2-0{,}3^2} = 1{,}52\ (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}),$$

$$w_A = g\left(\frac{\mu\cos\alpha}{2-\mu^2} - \sin\alpha\right), \ \ w_A = 9{,}8\left(\frac{0{,}3\cos 8°}{2-0{,}3^2} - \sin 8°\right) = 0{,}16\ (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}).$$

Statmena nuožulniajai plokštumai kryptimi ritinio centras judės nukreiptu link nuožulniosios plokštumos pagreičiu

$$w'_A = g\cos\alpha - \mu\frac{P}{m} = \frac{2g\,(1-\mu^2)\cos\alpha}{2-\mu^2}, \qquad w'_A = \frac{2\cdot 9{,}8\,(1-0{,}3^2)\cos 8°}{2-0{,}3^2} = 9{,}2\ (\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})\,.$$

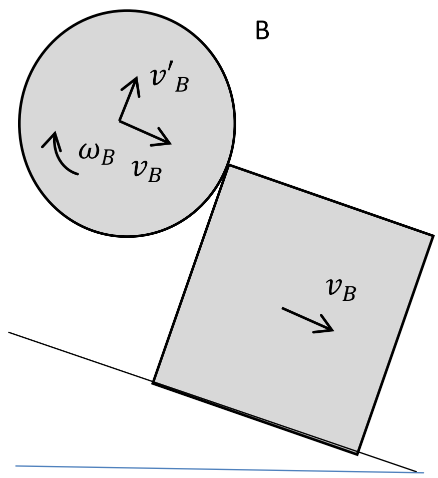
Besisukantį ritinį veikia trinties jėgos sukurtas jėgos momentas $N' = F_{tr1}r$, todėl ritinys suksis kampiniu pagreičiu

$$\varepsilon_A = \frac{N'}{I} = \frac{\mu^2 Pr}{mr^2/2} = \frac{2\mu^3 g\cos\alpha}{r(2-\mu^2)}, \ \ \varepsilon_A = \frac{2\cdot 0{,}3^3\cdot 9{,}8\cdot\cos 8°}{0{,}02\cdot(2-0{,}3^2)} = 13{,}7\ \ (\mathrm{s}^{-2}),$$

o jo lietimosi su kubeliu taškas ritinio centro atžvilgiu judės pagreičiu

$$w''_A = r\varepsilon_A, \ \ w''_A = 0{,}02\cdot 13{,}7 = 0{,}274(\frac{m}{\mathrm{s}^2}).$$

Visi pagreičiai yra nukreipti prieš judėjimo kryptį (yra neigiami). Mažiausias greitis yra v'_A, o jo pokytis didžiausias. Per laiko tarpą t_1 ritinys ir kubelis pereina į padėtį B.



$$\begin{cases} r = v'_A t_1 - \dfrac{w'_A t_1^2}{2} \\ v'_B = v'_A - w'_A t_1 \\ v_B = v_A - w_A t_1. \\ \omega_B = \omega_A - \varepsilon_A t_1 \end{cases}$$

$$t_1^2 - 2\frac{v'_A}{w'_A}t_1 + \frac{2r}{w'_A} = 0.$$

$$t_1 = \frac{v'_A}{w'_A} - \sqrt{\left(\frac{v'_A}{w'_A}\right)^2 - \frac{2r}{w'_A}}.$$

$$v'_B = \sqrt{{v'_A}^2 - 2rw'_A}.$$

$$v_B = v_A - w_A \left[\frac{v'_A}{w'_A} - \sqrt{\left(\frac{v'_A}{w'_A}\right)^2 - \frac{2r}{w'_A}} \right].$$

$$\omega_B = \omega_A - \varepsilon_A \left[\frac{v'_A}{w'_A} - \sqrt{\left(\frac{v'_A}{w'_A}\right)^2 - \frac{2r}{w'_A}} \right].$$

$$t_1 = 0{,}023\sqrt{l} - \sqrt{0{,}000530l - 0{,}00435} = 0{,}023(\sqrt{l} - \sqrt{l - 8{,}2})$$

$$v'_B = 0{,}212\sqrt{l - 8{,}2},$$

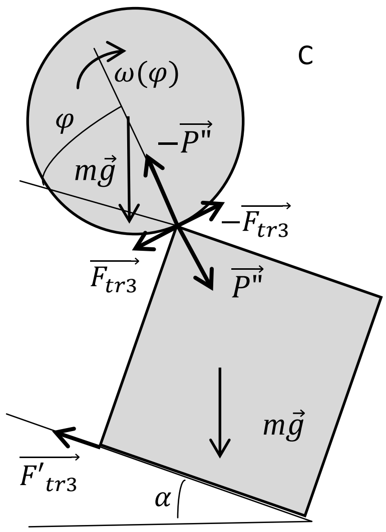
$$v_B = 0{,}605\sqrt{l} - \sqrt{0{,}0000136l - 0{,}000111} = 0{,}605\sqrt{l} - 0{,}00369\sqrt{l - 8{,}2},$$

$$\omega_B = 43{,}0\sqrt{l} - 0{,}315\sqrt{l - 8{,}2}.$$

Kad ritinys judėtų toliau, v'_B turi būti teigiamas. Todėl ir kiti greičiai bus teigiami.

Toliau ritinys remiasi į kubelio briauną ir sukasi apie kubelį. Ritiniui sukantis apie kubelį posūkio kampą pažymime φ: $0 \le \varphi \le (\frac{\pi}{2} - \alpha)$, sukimosi apie kubelį kampinį greitį $\omega(\varphi)$, kubelio pagreitį $w_C(\varphi)$. Tokiu pat pagreičiu juda ir ritinio atramos taškas.

Gauname $w_C(\varphi)$ išraišką. Kubelį ir ritinį veikia vienodos sunkio jėgos $m\vec{g}$. Kubelį ir ritinį veikia vienodo didumo priešingų krypčių sąveikos jėgos $\overrightarrow{P'(\varphi)}$ ir $-\overrightarrow{P'(\varphi)}$, statmenos ritinio paviršiui. Kadangi ritinys sukasi ir apie savo ašį kampiniu greičiu $\omega_C(\varphi)$, sąveikos jėgos sukuria trinties jėgas $\overrightarrow{F_{tr3}}$ ir $-\overrightarrow{F_{tr3}}$.



$$F_{tr3} = \mu P'.$$

Jėgų $\overrightarrow{P'}$ ir F_{tr3} dedamosios, statmenos nuožulniajai plokštumai, kubelį spaudžia prie nuožulniosios plokštumos sukurdamos papildomą trinties jėgą

$$F'_{tr3} = \mu(F_{tr3}\cos\varphi + P'\sin\varphi) = \mu P'(\varphi)(\mu\cos\varphi + \sin\varphi).$$

Ritiniui sukantis apie atramos tašką susidaro išcentrinė jėga

$$F_{iš} = mr\omega(\varphi)^2$$

Statmena nuožulniajai plokštumai kryptimi kubelį veikiančių jėgų dedamąsias kompensuoja nuožulniosios plokštumos reakcijos jėga. Dedamosios, lygiagrečios nuožulniajai plokštumai,

$$\mu mg\cos\alpha + F'_{tr3} + F_{tr3}\sin\varphi - mg\sin\alpha - P'\cos\varphi =$$

$$= \mu mg\cos\alpha + \mu P'(\varphi)(\mu\cos\varphi + \sin\varphi). + \mu P'(\varphi)\sin\varphi - mg\sin\alpha - P'\cos\varphi =$$

$$= \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha + P'(\varphi)[(\mu^2 - 1)\cos\varphi + 2\mu\sin\varphi]$$

kubeliui suteikia pagreitį

$$w_C(\varphi) = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) + \frac{P'}{m}[(\mu^2 - 1)\cos\varphi + 2\mu\sin\varphi],$$

$$P'(\varphi) = m[g\sin(\alpha + \varphi) + w_C\cos\varphi - r\omega^2(\varphi)].$$

$$w_C = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) + [g\sin(\alpha + \varphi) + w_C\cos\varphi - r\omega^2(\varphi)]\,[(\mu^2 - 1)\cos\varphi + 2\mu\sin\varphi]$$

$$w_C(1-\cos\varphi[(\mu^2-1)\cos\varphi+2\mu\sin\varphi])=$$

$$=g(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)+[g\sin(\alpha+\varphi)-r\omega^2(\varphi)][(\mu^2-1)\cos\varphi+2\mu\sin\varphi],$$

$$w_C(\varphi)=\frac{g\{\mu\cos\alpha-\sin\alpha+\sin(\alpha+\varphi)\,[(\mu^2-1)\cos\varphi+2\mu\sin\varphi]\}-r\omega^2(\varphi)}{1-\cos\varphi[(\mu^2-1)\cos\varphi+2\mu\sin\varphi]}.$$

Besiremiantį į kubelio briauną ritinį veikia jėgos momentas

$$N(\varphi)=rm[g\cos(\alpha+\varphi)-w_C(\varphi)\sin\varphi].$$

Ritinys suksis apie kubelį kampiniu pagreičiu

$$\varepsilon_C(\varphi)=\frac{N(\varphi)}{I}=\frac{2[g\cos(\alpha+\varphi)-w_C(\varphi)\sin\varphi]}{3r}.$$

Ritinys toliau riedėtų savaime ir persiristų per kubelį jei esant $\varphi=\beta\le\frac{\pi}{2}-\alpha$ būtų $N(\beta)$ lygus nuliui.

Nustatome, kokiai β vertei galioja sąlyga $N(\beta)=0$. Kadangi ritiniui sukantis apie kubelį $\omega(\varphi)$ mažėja, ribiniu atveju $\omega(\beta)=0$, gauname lygtį

$$w_C(\beta)\sin\beta=g\cos(\alpha+\beta),$$

$$\frac{\mu\cos\alpha-\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)\,[(\mu^2-1)\cos\beta+2\mu\sin\beta]}{1-\cos\beta[(\mu^2-1)\cos\beta+2\mu\sin\beta]}\sin\beta=\cos(\alpha+\beta),$$

Gauname transcendentinę lygtį. Įrašome skaičius (kampus radianais) ir sprendžiame apytiksliai stygų metodu.

$$\frac{[0{,}158+\sin(0{,}14+\beta)\,(-0{,}91\cos\beta+0{,}6\sin\beta)]\sin\beta}{1-\cos\beta(-0{,}91\cos\beta+0{,}6\sin\beta)}-\cos(0{,}14+\beta)=0,$$

$$\frac{[0{,}158+\sin(0{,}14+\beta)\,(-0{,}91\cos\beta+0{,}6\sin\beta)]\sin\beta}{1-\cos\beta(-0{,}91\cos\beta+0{,}6\sin\beta]}-\cos(0{,}14+\beta)=X(\beta),$$

β	0	1,43	0,86	1,11	1,13
$X(\beta)$	–0,99	0,66	–0,52	–0,05	0

Gauname, kad kampui φ didėjant nuo 0 ik 1,13 ritinio sukimosi apie kubelį greitis mažėja nuo maksimalios vertės $\omega(0)=v'_B/r$ iki 0, o ritinį veikiantis jėgos momentas $N(\varphi)$ taip pat mažėja nuo $N(0)=rmg\cos\alpha$ iki 0. Iš energijos tvermės dėsnio turime

$$\frac{3mr^2{v'_B}^2}{2\cdot 2r^2}=\beta rmg\cos\alpha/2,$$

$$\frac{3}{2}0{,}212^2(l-8{,}2)=1{,}13\cdot 0{,}02\cdot 9{,}8\cos 8°,\ l=11{,}5\text{ m}.$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 07 21.*

Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT14-11 ▼

Sprendusieji nesuprato, kad besisukančiam ritiniui prispaudimo jėga smūgio metu suteikia judesio kiekį, statmeną pradiniam ritinio judesio kiekiui.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 07 21.*

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT14-11 ▼

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Nustatyta, kad kubelis neslysta, o ritinys rieda nepraslysdamas	1
2.	Ritinio greitis prieš smūgį į kubelį	1
3.	Aprašyti skirtingi jų judėjimo etapai	1
4.	Kubelio ir ritinio greičiai tuoj po smūgio	2
5.	Ritinio greitis slystant kubelio šonu	2
6.	Ritinio greitis sukantis apie kubelio briauną	2
7.	Mažiausias atstumas	1
8.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-7)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2021 07 21.*