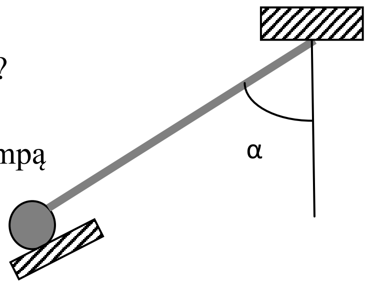
**7-ASIS FIZIKOS TURNYRAS**
**5-oji užduotis Nr. FT7-5 / 2013 09 30 – 2013 10 28**

***Sąlyga / FT7-5*** ▼

Neištemptos lengvos guminės juostelės ilgis $l = 10$ cm. Vienas juostelės galas pritvirtinamas prie nejudamo stovo, prie antro jos galo pritvirtinamas švininis rutuliukas, kurio skersmuo $d = 3$ cm. Kai rutuliukas kaba nejudėdamas, juostelės ilgis yra $l' = 15$ cm.




1) Kam lygus juostelės tamprumo koeficientas?
2) Koks kabančio rutuliuko mažų horizontalių svyravimų dažnis?
3) Koks kabančio rutuliuko mažų vertikalių svyravimų dažnis?
4) Rutuliukas paremiamas taip, kad juostelė sudarytų kampą $\alpha = 60°$ su vertikale. Kokiose ribose keisis juostelės ilgis atramą pašalinus nesuteikiant rutuliukui pradinio greičio?

*Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*
▲ *Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2013 09 30.*

***Užduoties aiškinamasis sprendimas / FT7-5*** ▼

1) Rutuliuko sunkis

$$P = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho g,$$

todėl juostelės ilgis kabant rutuliukui

$$l' = l + \frac{P}{k}, \ \ k = \frac{\pi d^3 \rho g}{6(l' - l)}, \ \ k = 31{,}4\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

2) Rutuliukas nėra mažas, todėl taikome fizikinės svyruoklės dažnio formulę:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{N}{I}},$$

čia $N = mg(l' + d/2)$, $I = m[d^2/10 + (l' + d/2)^2]$, todėl

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g(l' + d/2)}{d^2/10 + (l' + d/2)^2}}, \ \ \nu = 1{,}225 \text{ Hz}.$$

Taikant matematinės svyruoklės dažnio formulę gauname

$$\nu' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l' + \frac{d}{2}}}, \ \ \nu' = 1{,}227 \text{ Hz}.$$

Matome, kad netikslumas nežymus (~0,2 %). Jeigu neatsižvelgtume į rutuliuko matmenis, gautume

$$\nu'' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l'}}, \ \ \nu'' = 1{,}286 \text{ Hz}.$$

Čia netikslumas didesnis (~5 %). Taigi, reikia taikyti fizinės svyruoklės formulę.

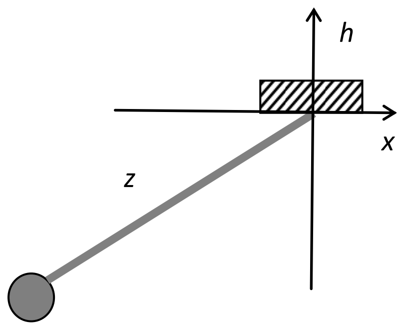
3) Taikome tamprumo jėgos veikiamo rutuliuko svyravimo dažnio formulę:

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l' - l}}\ , \ \ \nu_1 = 2{,}23 \text{ Hz.}$$

4) Rutuliuką paleidus jis greitėdamas leidžiasi lanku žemyn ištempdamas juostelę. Rutuliuko judėjimas aprašomas sudedant du statmenus svyravimus: išilgai juostelės, veikiant juostelės tamprumo jėgai ir išilgai juostelės nukreiptai sunkio jėgos dedamajai, ir statmena juostelei kryptimi, veikiant sunkio jėgos tos krypties dedamajai. Svyravimai nėra harmoniniai, nes kinta juostelės ilgis ir sunkio jėgos dedamųjų dydis, svyravimų dažniai tarpusavyje nesusieti, todėl rutuliuko judėjimo trajektorija panaši į sudėtingą *Lissajous* (Lisažu) figūrą. Laikome, kad rutuliukas judėdamas gali patekti į bet kurį tašką tam tikros formos plote. Rutuliuko judėjimą riboja energijos tvermės dėsnis:

$$E_k + E_t + E_g = \text{const.}$$

Čia $E_k = mv(t)^2/2$ – rutuliuko kinetinė energija,
$v(t)$ – kintamas rutuliuko greitis,
$E_t = k(z(t) - l)^2/2$ – juostelės įtempimo energija,
$z(t)$ – kintamas juostelės ilgis,
$E_g = mgh(t)$ – rutuliuko gravitacinė energija,
$h(t)$ – kintamas rutuliuko aukštis.




Parenkame koordinačių sistemą, kurios pradžia yra juostelės pakabinimo taškas, vertikalioji ašis $h$, horizontalioji ašis $x$, ir laikome, kad $E_g = 0$ kai $h = 0$. Tada

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{k(\sqrt{x^2 + h^2} - l)^2}{2} + mgh = \text{const.}$$

Konstantai nustatyti panaudojame pradinę sąlygą. Imame $v = 0$, pradinis juostelės ilgis

$$l" = l + \frac{mg}{k}\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha) + l'\cos\alpha\,, \qquad l" = 0{,}125 \text{ m.}$$

Pradinis rutuliuko aukštis $h = -l"\cos\alpha$. Tada

$$\text{const.} = \frac{k(l" - l)^2}{2} - mgl"\cos\alpha\,,\ \ \text{const.} = -0{,}088 \text{ J.}$$

Visas galimas rutuliuko padėtis apriboja sąlyga

$$\frac{k(\sqrt{x^2 + h^2} - l)^2}{2} + mgh = \text{const.}$$

Įstatę parametrų vertes gauname

$$(\sqrt{x^2 + h^2} - 0{,}1)^2 + 0{,}1h + 0{,}005625 = 0.$$

Jei skliausteliuose esantis reiškinys lygus 0, t.y., jei $z = l$, gauname maksimalią $h$ vertę $h_{max} = -0{,}05625$ m. Tokį rutuliuko aukštį atitinka daug padėčių: $-0{,}083<x<0{,}083$, tačiau jas atitiks tas pats minimalus juostelės ilgis $z = 0{,}1$ m, juostelė bus sulinkusi, o rutuliukas judės kaip kampu į horizontą mestas kūnas. Didžiausias juostelės ilgis atitinka žemiausią rutuliuko padėtį, kai gravitacinė energija mažiausia, o kinetinė energija lygi 0. Jei į ribos sąlygą įrašytume $x = 0$, atsižvelgdami į tai, kad $h$ neigiamas maksimaliam juostelės ilgiui $l_{max} = -h$ gautume

$$l_{max}^2 - 0{,}3l_{max} + 0{,}005625 = 0,\ \ l_{max} = 0{,}233 \text{ m.}$$

Taigi, rutuliukui svyruojant juostelės ilgis kinta nuo 0,125 m iki 0,233 m.

*Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ *Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2013 12 02.*

***Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT7-5*** ▼

1) Dauguma sprendusiųjų šią užduoties dalį išsprendė teisingai.
2) Tik trys sprendusieji panaudojo fizikinės svyruoklės formulę. Kiti naudojo matematinės spyruoklės formulę, imdami ilgį $l' + d/2$ arba $l'$.
3) Dauguma sprendusiųjų šią užduoties dalį išsprendė teisingai.
4) Tik du sprendusieji pastebėjo, kad rutuliuko judėjimas aprašomas dviejų svyravimų sudėtimi.

*Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ *Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2013 12 02.*

***Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT7-5*** ▼

| **Nr.** | **Sprendimų vertinimo kriterijus** | **Vertė balais** |
|---|---|---|
| 1. | Nustatytas juostelės tamprumo koeficientas | 1 |
| 2.1. | Panaudota fizikinės svyruoklės dažnio formulė | 1 |
| 2.2. | Nustatytas svyruoklės inercijos momentas | 1 |
| 2.3 | Nustatytas svyruoklės dažnis: | 1 |
| 2.3.1. | Dažnis nustatytas taikant matematinės svyruoklės dažnio formulę | 2 |
| 2.3.2 | Dažnis nustatytas neatsižvelgiant į rutuliuko matmenis | 1 |
| 3. | Nustatytas tamprumo jėgos veikiamo rutuliuko svyravimo dažnis | 1 |
| 4.1 | Aprašytas rutuliuko judėjimo dėsningumas | 2 |
| 4.2. | Nustatytas pradinis juostelės ilgis | 1 |
| 4.3. | Nustatytas mažiausias juostelės ilgis | 1 |
| 4.4. | Nustatytas maksimalus juostelės ilgis | 1 |
| Didžiausias galimas sprendimo įvertinimas | | 10 |

*Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.*

▲ *Šis tekstas svetainėje [www.olimpas.lt](http://www.olimpas.lt) nuolat skelbiamas nuo 2013 12 02.*