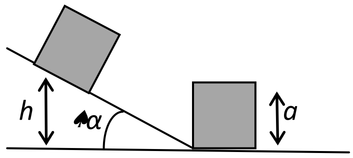
9-ASIS FIZIKOS TURNYRAS
13-oji užduotis Nr. FT9-13 / 2016 03 24 – 2016 04 21

Mažų kubelių kelionė

***Sąlyga / FT9-13* ▼**



Nuožulnioji plokštuma pereina į horizontalų paviršių, kaip parodyta pav. Nuožulniosios plokštumos paviršius ir horizontalus paviršius kieti ir plastiški. Ant nuožulniosios plokštumos ir horizontalaus paviršiaus padedami du vienodi maži kubeliai. $h = 40$ cm, $\alpha = 30°$, $a = 2$ cm, trinties koeficientas tarp paviršių ir kubelių $\mu = 0{,}2$. Paleistas be pradinio greičio kubelis slysta nuožulniąja plokštuma ir tampriai atsitrenkia į nejudantį apatinį kubelį, smūgio trukmė maža.

1) Kokie yra kubelių greičiai tuoj po smūgio?
2) Kokį atstumą po smūgio kubeliai nuslinks?

Užduotį parengė mokyklos „Fizikos olimpas" steigėjų tarybos narys, ilgametis mokyklos direktorius (11 m.) ir šio Fizikos turnyro užduočių parengimo spręsti ir jų sprendimų vertinimo komisijos pirmininkas prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2016 03 24.*

***Aiškinamasis sprendimas / FT9-13* ▼**

Kubelių mases pažymime *m*. Pirmąjį kubelį veikia trinties jėga

$$F_{tr} = \mu m g \cos\alpha, \quad F_{tr} = 0{,}2 \cdot m \cdot 9{,}8 \cos 30° = 1{,}7\ m\text{N}$$

ir nustumiančioji jėga

$$F_n = mg\sin\alpha, \quad F_n = m \cdot 9{,}8 \sin 30° = 4{,}9\ m\text{N}.$$

Kadangi $F_n > F_{tr}$, kubelis slys greitėdamas. Panaudodami energijos tvermės dėsnį nustatome pirmojo kubelio greitį prieš pat smūgį. Į kubelio matmenis neatsižvelgiame. Kubelio pradinė potencinė energija

$$E_p = mgh,$$

kubeliui slystant ji virsta kinetine energija $E_k = m{v_0}^2/2$ ir atlieka darbą nugalėdama trintį:

$$A = \mu m g \cos\alpha\, h/\sin\alpha.$$

Gauname:

$$mgh = \frac{m{v_0}^2}{2} + \mu m g \cos\alpha\, h/\sin\alpha,$$

$$v_0 = \sqrt{2gh(1 - \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}.$$

$$v_0 = \sqrt{2\text{-}9{,}8\text{-}0{,}4(1 - 0{,}2\,\mathrm{ctg}\,30)} = 2{,}3\ (\mathrm{m/s}).$$

Skaičiuodami greitį mes neatsižvelgėme į kubelio matmenis. Laikant, kad *h* yra pradinis kubelio masės centro aukštis ir atsižvelgiant į kubelio matmenis smūgio metu kubelio masės centro aukštis yra

$$h' = \frac{a}{2\cos\alpha} + \left(a\sin\alpha + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\mathrm{tg}\alpha\right)\sin\alpha = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 2\sin^2\alpha + \sin\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$

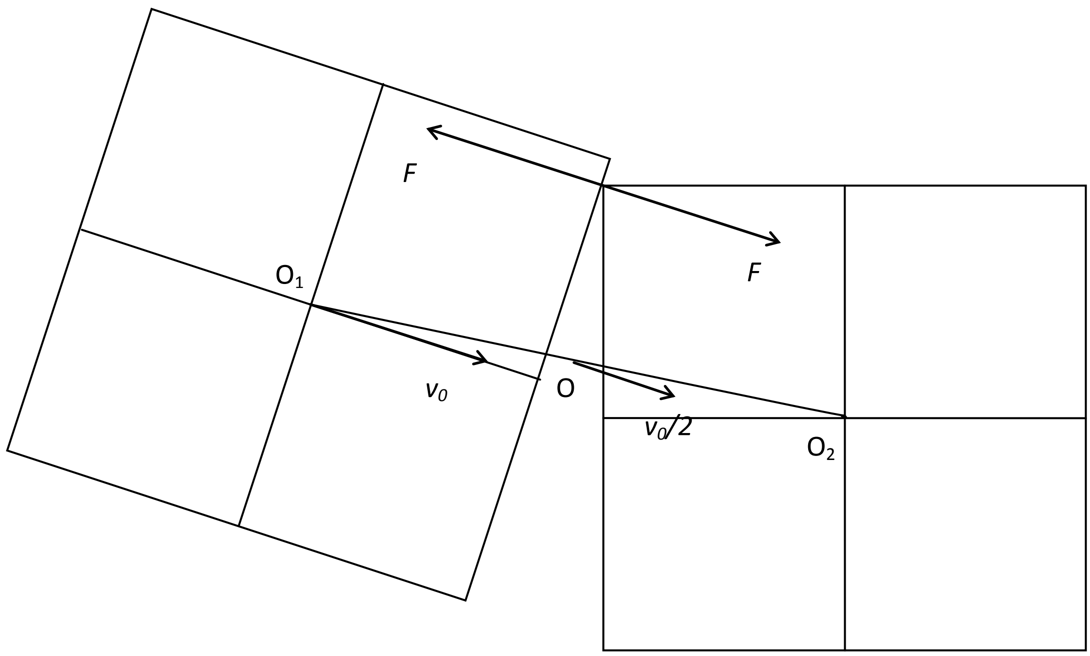
$$= \frac{a}{2}(\cos\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin\alpha),$$

$$h' = \frac{0{,}02}{2}(\cos 30 + 2\sin^2 30 + \sin 30\ ) = 0{,}019\ (\mathrm{m}).$$

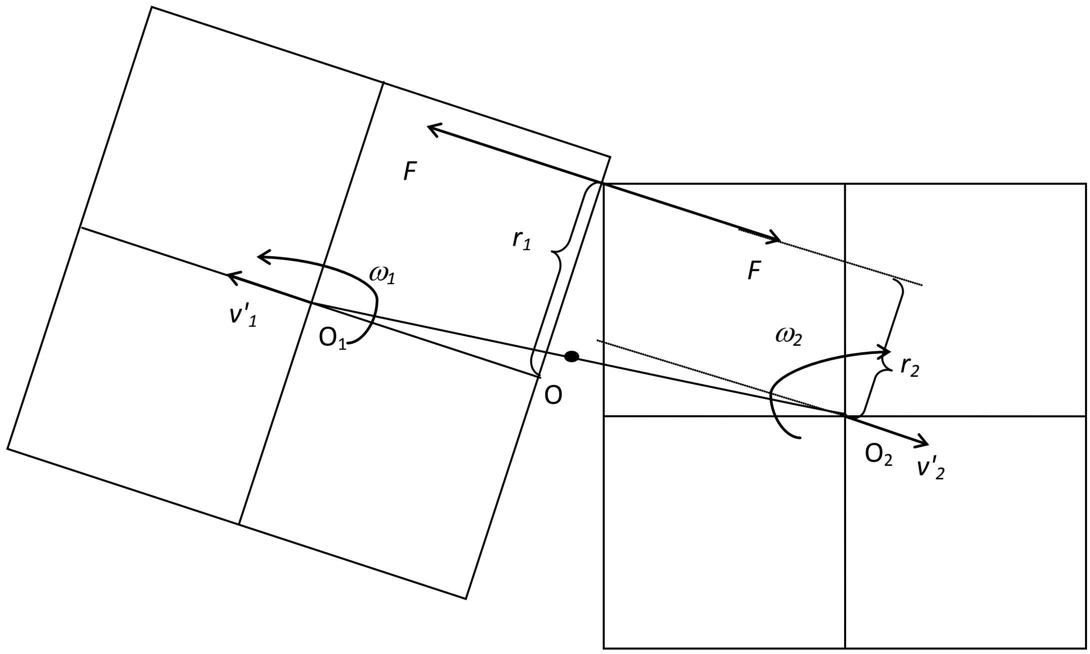
Tada

$$v_0 = \sqrt{2g(h - h')(1 - \mu \operatorname{ctg} \alpha)},$$

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9{,}8(0{,}40 - 0{,}019)(1 - 0{,}2 \operatorname{ctg} 30)} = 2{,}2\ (\mathrm{m/s}).$$



Tašelių smūgis nėra centrinis, smūgio metu veikianti jėga nėra tiesėje, einančioje per kubelių masių centrus, todėl smūgio metu kubeliai įgaus ir sukamąjį judėjimą. Laikome, kad smūgio trukmė τ maža, jo metu veikiant tamprumo jėgoms $F(t), (0 < t < \tau, \overrightarrow{F(t)} = -\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_2})$, nukreiptoms lygiagrečiai v_0, kubelių poslinkiai maži, todėl į sąveiką su pagrindu ir sunkį neatsižvelgiame. Kubelių masių centrų greičius po smūgio pažymime v_1 ir v_2, kubelių kampinius greičius ω_1 ir ω_2. Naudojame kubelių masių centro koordinačių sistemą. Kadangi kubelių masės vienodos, jų bendras masių centras O yra atkarpos O_1O_2 vidurys, o jo greitis $v_0/2$. Todėl masių centro koordinačių sistemoje pirmojo kubelio masės centro greitis prieš smūgį $v_0/2$, o antrojo kubelio $-v_0/2$. Pagal judesio kiekio tvermės dėsnį po smūgio kubelių masių centrų greičiai išlieka vienodo didumo, bet priešingų krypčių, juos pažymime v'_1 ir v'_2, $v'_1 = -v'_2 = v$.



Kubelių inercijos momentai masės centro atžvilgiu $I = \frac{ma^2}{6}$, Atstumai nuo kubelių masių centrų iki jėgos kryptį atitinkančios tiesės

$$r_1 = a(\cos\alpha - 0{,}5),$$
$$r_2 = \frac{a(1-\sin\alpha)\cos\alpha}{2}.$$

Smūgio meru kubelius veikia jėgos impulsas

$$N = \int_0^\tau F(t)dt,$$

todėl jų įgaunami greičių pokyčiai

$$\Delta v = \frac{N}{m} = v + \frac{v_0}{2}, \quad N = m(v + \frac{v_0}{2}).$$

Prieš smūgį kubelių judesio kiekio momentai vienodi:

$$L_0 = m\frac{v_0}{2}\frac{r_1 - r_2}{2}.$$

Smūgio metu kubelius veikiantys jėgos momento impulsai skirtingo didumo ir priešingų krypčių,

$$M_1 = Nr_1, \;\; M_2 = Nr_2$$

jų suteikiami kiekio momentų pokyčiai

$$\Delta L_1 = M_1 = Nr_1, \;\; \Delta L_2 = M_2 = Nr_2,$$

todėl kubelių kampiniai greičiai

$$\omega_1 = \frac{L_0 + \Delta L_1}{I} = \frac{m}{I}\frac{v_0}{2}\frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{Nr_1}{I} = \frac{m}{I}\left[\frac{v_0}{2}\frac{r_1 - r_2}{2} + (v + \frac{v_0}{2})r_1\right] = \frac{m}{I}\left[vr_1 + \frac{v_0(3r_1 - r_2)}{4}\right]$$
$$\omega_2 = \frac{\Delta L_2 - L_0}{I} = \frac{m}{I}\left[vr_2 + \frac{v_0(3r_2 - r_1)}{4}\right].$$

Naudojame energijos tvermės dėsnį:

$$2\frac{mv_0{}^2}{8} = 2\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega_1{}^2}{2} + \frac{I\omega_2{}^2}{2} =$$
$$= mv^2 + \frac{m^2}{2I}\left\{\left[vr_1 + \frac{v_0(3r_1 - r_2)}{4}\right]^2 + \left[vr_2 + \frac{v_0(3r_2 - r_1)}{4}\right]^2\right\}.$$

Gauname lygtį

$$v^2\left[1 + \frac{m(r_1{}^2 + r_2{}^2)}{2I}\right] + v\frac{m}{I}\left[\frac{v_0 r_1(3r_1 - r_2)}{4} + \frac{v_0 r_2(3r_2 - r_1)}{4}\right]$$
$$+ \frac{m}{2I}\left\{\left[\frac{v_0(3r_1 - r_2)}{4}\right]^2 + \left[\frac{v_0(3r_2 - r_1)}{4}\right]^2\right\} - \frac{v_0{}^2}{4} = 0,$$

$$v^2(a^2 + 3r_1{}^2 + 3r_2{}^2) + 3vv_0\frac{3r_1{}^2 - 2r_1 r_2 + 3r_2{}^2}{4} + v_0{}^2\frac{15r_1{}^2 - 18\,r_1 r_2 + 15r_2{}^2 - 2a^2}{8} = 0,$$

$$v^2 + 3vv_0\frac{3r_1{}^2 - 2r_1 r_2 + 3r_2{}^2}{4(a^2 + 3r_1{}^2 + 3r_2{}^2)} + v_0{}^2\frac{15r_1{}^2 - 18\,r_1 r_2 + 15r_2{}^2 - 2a^2}{8(a^2 + 3r_1{}^2 + 3r_2{}^2)} = 0.$$

Lygtis gan griozdiška, sprendžiame įrašę skaitines vertes

$$r_1 = 0{,}02(\cos 30° - 0{,}5) = 0{,}0073 \;\; (\text{m}),$$
$$r_2 = \frac{0{,}02(1 - \sin 30°)\cos 30°}{2} = 0{,}0043 \;\; (\text{m}),$$

$$v^2 + 0{,}423 \cdot v - 0{,}296 = 0$$

$$v = 0{,}37\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\omega_1 = \frac{6}{a^2}\left[vr_1 + \frac{v_0(3r_1 - r_2)}{4}\right],$$

$$\omega_1 = \frac{6}{0{,}02^2}\left[0{,}37 \cdot 0{,}0073 + \frac{2{,}3 \cdot (3 \cdot 0{,}0073 - 0{,}0043)}{4}\right] = 192\ (\text{s}^{-1}),$$

$$\omega_2 = \frac{6}{a^2}\left[vr_2 + \frac{v_0(3r_2 - r_1)}{4}\right],$$

$$\omega_2 = \frac{6}{0{,}02^2}\left[0{,}37 \cdot 0{,}0043 + \frac{2{,}3 \cdot (3 \cdot 0{,}0043 - 0{,}0073)}{4}\right] = 72\ (\text{s}^{-1}).$$

Taigi, tuoj po smūgio kubelių masių centrų greičiai

$$v_1 = \frac{v_0}{2} - v,\ \ v_1 = \frac{2{,}3}{2} - 0{,}37 = 0{,}76\ (\text{m/s}),$$

$$v_2 = \frac{v_0}{2} + v,\ \ v_2 = \frac{2{,}3}{2} + 0{,}37 = 1{,}5\ (\text{m/s}),$$

o kubelių kampiniai greičiai

$$\omega_1 = 192\ \text{s}^{-1},$$

$$\omega_2 = 72\ \text{s}^{-1}.$$

Po smūgio kubeliai atsiskiria, nes antrojo kubelio greitis didesnis už pirmojo greitį. Laikome, kad laikai τ_1 ir τ_2, per kuriuos įvyksta kubelių greičio pokyčiai, sukelti pagrindo plastinės deformacijos jėgų, yra maži, ir į sunkio jėgas neatsižvelgiame. Pirmąjį kubelį kairiajame apatiniame taške veikia statmena nuožulniosios plokštumos paviršiui pagrindo plastinės deformacijos sukurta jėga $F_1(t)$, $(0 \le t \le \tau_1)$, jos sukurtas jėgos momento impulsas sustabdo kubelio sukimąsi:

$$\frac{a}{2}\int_0^{\tau_1} F_1(t)dt = I\omega_1.$$

Jėga $F_1(t)$ sukuria trinties jėgą

$$F_{tr1}(t) = \mu F_1(t),$$

kuri keičia kubelio slenkamojo judėjimo greitį. Didžiausias galimas pokytis

$$\Delta v'_1 = \frac{1}{m}\int_0^{\tau_1} \mu F_1(t)dt = \frac{2\mu I\omega_1}{ma} = \frac{\mu a\omega_1}{3},$$

$$\Delta v'_1 = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}02 \cdot 192}{3} = 0{,}26\ (\text{m/s}).$$

Pirmojo kubelio masės centro greitis po tampraus smūgio yra $v_1 = 0{,}76\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, todėl paveikus jėgai F_{tr1} kubelio greitis bus

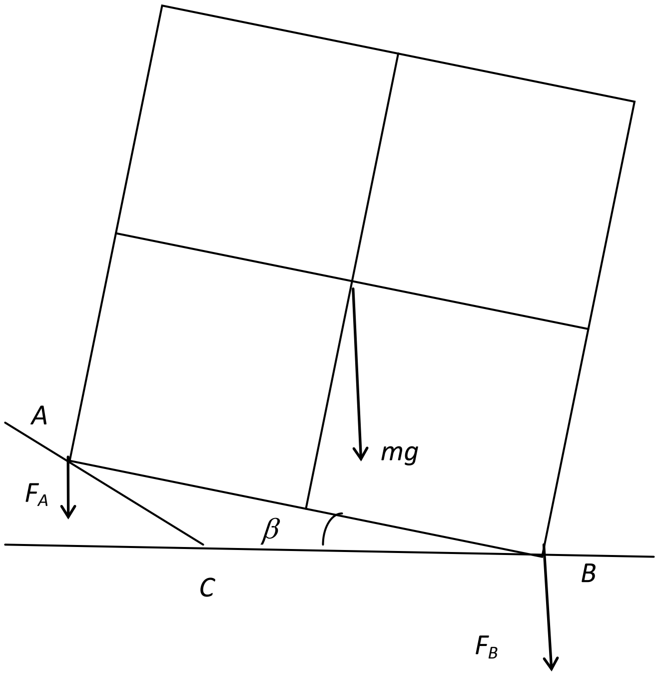
$$v'_{01} = v_1 - \Delta v'_1 = 0{,}76 - 0{,}26 = 0{,}50\ (\text{m/s}).$$

Toliau kubelis judės veikiamas sunkio jėgos ir jos sukurtos trinties jėgos. Kubeliui slystant nuožulniąja plokštuma trinties jėga atlieka darbą

$$A_1 = \mu mg\cos\alpha \cdot a\sin\alpha,$$

$$\frac{A_1}{m} = \mu ag\cos\alpha\sin\alpha,\ \ \frac{A_1}{m} = 0{,}2 \cdot 0{,}02 \cdot 9{,}8\cos 30\sin 30 = 0{,}017\ \text{J/kg}.$$

Kai kubelio apatinis kampas pasieks horizontalų paviršių, kubelis toliau slinks sukdamasis ir remdamasis kampais A ir B į nuožulniąją plokštumą ir horizontalų paviršių. Kubelio sukis sukuria prispaudimo jėgas



$$F_A = mg\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{4}+\beta)}{a\cos\beta} = mg\frac{1-\operatorname{tg}\beta}{2},$$

$$F_B = mg\frac{1+\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

Tos jėgos sukuria trinties jėgą

$$F'_{tr}(\beta) = \mu(F_A\cos\alpha + F_B) =$$
$$= \frac{\mu mg[1+\cos\alpha+(1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

Atstumą BC nustatome iš sinusų teoremos:

$$BC = x(\beta) = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\pi-\alpha)}.$$

Tada trinties jėgos atliktas darbas kubeliui nuslenkant nuo nuožulniosios plokštumos ant horizontalaus paviršiaus

$$A'_1 = \int_\alpha^0 F'_{tr}(\beta)dx(\beta) = \int_\alpha^0 \frac{\mu mg[1+\cos\alpha+(1-\cos\alpha)\operatorname{tg}\beta}{2}\frac{a\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}(-d\beta) =$$

$$= \frac{\mu mga}{2\ \sin\alpha}\left[(1+\cos\alpha)\int_0^\alpha\cos(\alpha-\beta)\,d\beta + (1-\cos\alpha)\int_0^\alpha\operatorname{tg}\beta\cos(\alpha-\beta)\,d\beta\right],$$

$$\int_0^\alpha\cos(\alpha-\beta)\,d\beta = (-\sin(\alpha-\beta)\,)|_0^\alpha = \sin\alpha.$$

$$\int_0^\alpha\operatorname{tg}\beta\cos(\alpha-\beta)\,d\beta = \int_0^\alpha\frac{\sin\beta\,(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}{\cos\beta}d\beta =$$

$$= \cos\ \alpha\int_0^\alpha\sin\beta\,d\beta + \sin\alpha\int_0^\alpha\frac{d\beta}{\cos\beta} - \sin\alpha\int_0^\alpha\cos\beta\,d\beta =$$

$$= \cos\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin\alpha\int_0^\alpha\frac{d\beta}{\cos\beta}.$$

$$\int_0^\alpha\frac{d\beta}{\cos\beta} = \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}-2x} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}\frac{-2dx}{\sin 2x} = \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin x\cos x} = \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin x}{\sin x(1+\sin x)(1-\sin x)} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin x}{\sin x} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin x}{1+\sin x} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\sin x}{1-\sin x}$$

$$= \left[\ln\sin x + \frac{1}{2}\ln\,(1+\sin x) + \frac{1}{2}\ln\,(1-\sin x)\right]_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \ln\left[\sin x\sqrt{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,\right]_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left[\sin x\cos x\,\right]_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right] =$$

$$= -\ln\cos\alpha,$$

$$A'_1 = \frac{\mu m g a}{2\ \sin\alpha}[(1+\cos\alpha)\sin\alpha + (1-\cos\alpha)(\cos\alpha - 1 - \sin\alpha\cdot\ln\ \cos\alpha)]$$

$$\frac{A'_1}{m} = \frac{0{,}2\cdot 9{,}8\cdot 0{,}02}{2\ \sin 30}[(1+\cos 30)\sin 30 + (1-\cos 30)(\cos 30 - 1 - \sin 30\cdot\ln\cos 30)],$$

$$\frac{A'_1}{m} = 0{,}036\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\ .$$

Kubeliui nuslydus horizontaliu paviršiumi iki sustojant atstumą s_1 trinties jėgos bus atliktas darbas

$$A"_1 = \mu m g s_1.$$

Pagal energijos tvermės dėsnį gauname:

$$\frac{mv'^2_{01}}{2} + mg\left(h' - \frac{a}{2}\right) = A_1 + A'_1 + A"_1, \qquad \frac{E_p}{m} = 9{,}8\left(0{,}019 - \frac{0{,}02}{2}\right) = 0{,}088\ (\mathrm{J/kg}),$$

$$\frac{v'^2_{01}}{2} + g\left(h' - \frac{a}{2}\right) - \frac{A_1}{m} - \frac{A'_1}{m} = \mu g s_1,$$

$$s_1 = \frac{1}{\mu}\left[h' - \frac{a}{2} + \frac{1}{g}\left(\frac{v'^2_{01}}{2} - \frac{A_1}{m} - \frac{A'_1}{m}\right)\right],$$

$$s_1 = \frac{1}{0{,}2}\left[0{,}019 - \frac{0{,}02}{2} + \frac{1}{9{,}8}\left(\frac{0{,}5^2}{2} - 0{,}017 - 0{,}036\right)\right] = 0{,}082\ (\mathrm{m}).$$

Visas pirmojo kubelio nuslinktas po smūgio atstumas

$$l_1 = a\sin\alpha + a + s_{1,}$$

$$l_1 = 0{,}02(\sin 30 + 1) + 0{,}082 = 0{,}112\ (\mathrm{m}).$$

Antrąjį kubelį dešiniajame apatiniame taške veikia statmena paviršiui pagrindo plastinės deformacijos sukurta jėga $F_2(t)$, $(0 \le t \le \tau_2)$, jos sukurtas jėgos momento impulsas sustabdo kubelio sukimąsi:

$$\frac{a}{2}\int_0^{\tau_2} F_2(t)dt = I\omega_2.$$

Jėga $F_2(t)$ sukuria trinties jėgą

$$F_{tr2}(t) = \mu F_2\,(t),$$

kuri keičia kubelio slenkamojo judėjimo greitį. Didžiausias galimas pokytis

$$\Delta v'_2 = \frac{1}{m}\int_0^{\tau_1} F_{tr2}(t)dt = \frac{\mu}{m}\int_0^{\tau_2} F_2(t)dt = \frac{2\mu I\omega_2}{ma} = \frac{a\mu\omega_2}{3},$$

$$\Delta v'_2 = \frac{0{,}02\cdot 0{,}2\cdot 72}{3} = 0{,}096\ (\mathrm{m/s}).$$

Taigi, pradedant slinkti antrojo kubelio greitis bus

$$v'_2 = v_2 - \Delta v'_2, \quad v'_2 = 1{,}5 - 0{,}096 = 1{,}4\ (\mathrm{m/s}).$$

Antrojo kubelio nuslinktą atstumą l_2 nustatome panaudoję energijos tvermės dėsnį:

$$\frac{mv'^2_2}{2} = \mu m g l_2, \quad l_2 = \frac{v'^2_2}{2\mu g}, \quad l_2 = \frac{1{,}4^2}{2\cdot 0{,}2\cdot 9{,}8} = 0{,}5\ (\mathrm{m}).$$

Užduoties aiškinamąjį sprendimą pateikė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.

▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*

***Turnyro dalyvių sprendimų aptarimas / FT9-13* ▼**

Užduotį teisingai išsprendė tik vienas turnyro dalyvis iš belikusių tik penkių.

Užduoties sprendimų aptarimą parengė jos autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*

***Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelė / FT9-13* ▼**

Nr.	**Sprendimų vertinimo kriterijus**	**Vertė balais**
1.	Pirmojo kubelio greitis prieš pat smūgį	1
	Pirmojo kubelio masės centro greitis ir kampinis greitis tuoj pat po smūgio	2
	Antrojo kubelio masės centro greitis ir kampinis greitis tuoj pat po smūgio	2
2.	Pirmojo kubelio masės centro greitis pradedant slysti po smūgio	1
	Trinties jėgos atliktas darbas slenkant nuo nuožulniosios plokštumos ant horizontalaus paviršiaus	1
	Pirmojo kubelio nuslinktas atstumas po smūgio	1
	Antrojo kubelio masės centro greitis pradedant slysti po smūgio	1
	Antrojo kubelio nuslinktas atstumas po smūgio	1
3.	Pateikta ne pagal reikalavimus	-1
4.	Netikslumai (kiekvienam iš kriterijų Nr.1-2)	iki (-1)
Didžiausias galimas sprendimų įvertinimas		10

Sprendimų vertinimo kriterijų ir jų verčių lentelę parengė užduoties autorius prof. habil. dr. Antanas Rimvidas Bandzaitis.
▲ *Šis tekstas svetainėje www.olimpas.lt nuolat skelbiamas nuo 2020 08 25.*