2009 m. Lietuvos 21-ojo fizikos čempionato
UŽDUOČIŲ SPRENDIMAI

1. Elektrinis traukinys pradeda važiuoti iš stotelės tolygiai greitėdamas. Jo pirmasis vagonas pravažiuoja pro stebėtoją, stovintį prie traukinio pradžios, per laiką *t*. Visas traukinys pro stebėtoją pravažiuoja per laiką *T*. Iš kelių vagonų sudarytas traukinys? Į tarpus tarp vagonų neatsižvelkite.

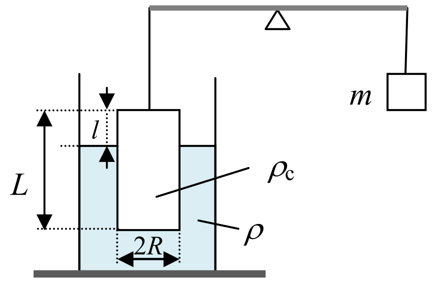
Sprendimas

Jei vieno vagono ilgis ℓ, tai viso traukinio ilgis $L = n\ell$. Kai pro stebėtoją pravažiuoja pirmasis vagonas, galime parašyti: $\ell = \dfrac{at^2}{2}$. (1)

Kai pro stebėtoją pravažiuoja visas *n* vagonų traukinys: $n\ell = \dfrac{aT^2}{2}$. (2)

Iš (1) ir (2) lygčių randame: $n = \dfrac{T^2}{t^2}$.

2. Lygių pečių svertinės svarstyklės, kurių viename gale pakabintas masės *m* svarelis, o kitame – stačiojo cilindro formos kūnas, panardintas į vandenį inde , yra pusiausvyroje (žr. brėž.). Cilindro pagrindo spindulys *R*, aukštis *L*, cilindro medžiagos tankis ρ_c. Koks cilindro aukštis *l* iškilęs virš vandens? Laisvojo kritimo pagreitis *g*, vandens tankis ρ.



Sprendimas

Sistema yra pusiausvyroje, kai vienodus svarstyklių pečius veikia vienodos jėgos. Viena jėga – tai svarelio svoris *mg*. Kita jėga – tai cilindro svorio ir Archimedo jėgos skirtumas. Taigi $mg = \pi R^2 L\rho_c - \pi R^2 (L - l)\rho$. Iš šios lygties randame $l = L\left(\dfrac{m}{\pi R^2 L\rho} - \dfrac{\rho_c}{\rho} + 1\right)$.

3. Kiekvieną iš toliau pateiktų klausimų reikia išspręsti grafiškai. $\vec{V}_A, \vec{V}_B$ ir $\vec{V}_C$ žymi atitinkamai strypo galų ir jo centro greičius.

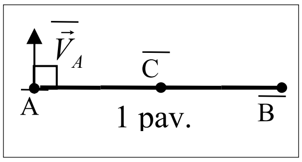
a) Raskite $\vec{V}_B$, jeigu $V_C = 0$ (1 pav.).

b) Raskite $\vec{V}_C$ (2 pav.).

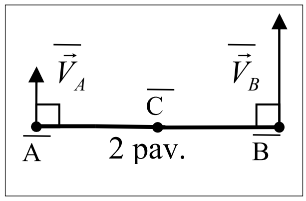
c) Raskite $\vec{V}_B$, jeigu $|\vec{V}_A| = |\vec{V}_B|$ (3 pav).

d) Raskite gritį $\vec{V}_B$, kai jo kryptis pažymėta punktyru (4 pav).

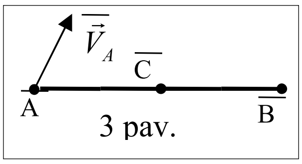
e) Raskite $\vec{V}_B$, jeigu $|\vec{V}_A| = |\vec{V}_C|$ (3 pav).



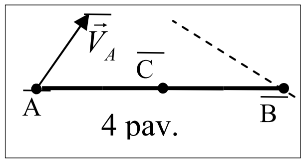
1 pav.



2 pav.



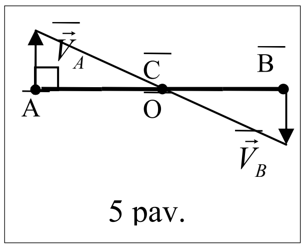
3 pav.



4 pav.

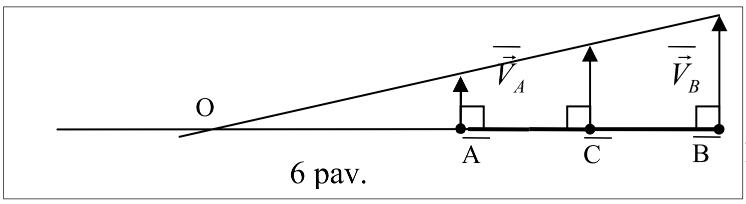
Sprendimas.

a) Jeigu taškas **C** nejuda, jis yra akimirksninis sukimosi centras **O** ir greitis $\vec{V}_B$ statmenas strypui.



5 pav.

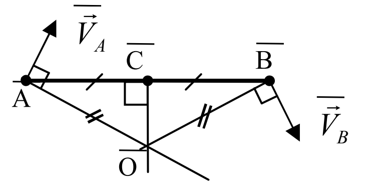
b) Kadangi greičiai yra statmeni strypui, akimirksninis sukimosi centras O yra ant



6 pav.

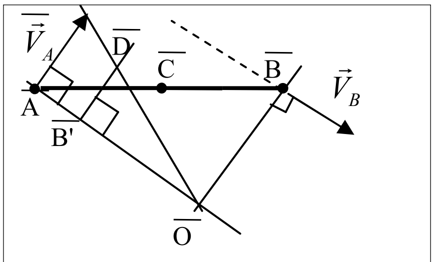
strypo tęsinio, o atstumai **OA**, **OB** ir **OC** proporcingi greičiams.

c) Braižome liniją, statmeną $\vec{V}_A$, kurioje guli akimirksninis sukimosi centras **O**. Kadangi $\left|\vec{V}_A\right| = \left|\vec{V}_B\right|$, atstumas **OA** turi būti lygus **OB**.



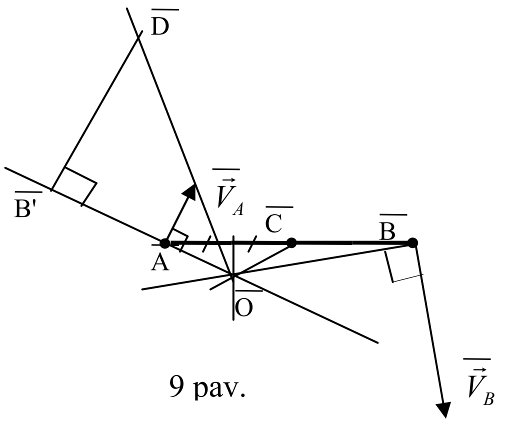
7 pav.

d) Braižome liniją, statmeną $\vec{V}_A$, ir liniją, statmeną $\vec{V}_B$. Jų susikirtimas ir yra akimirksninis sukimosi centras **O**. Iš papildomo trikampio **OB'D** (**OB = OB'**) randame $|\vec{V}_B| =$ B'D ilgį.



8 pav.

e) Braižome liniją, statmeną $\vec{V}_A$. Joje randame tašką **O**, tokį, kad **OA=OC**. Tai akimirksninis sukimosi centras. Išvedame **OB** ir jai statmeną liniją, nusakančią $\vec{V}_B$ kryptį. Toliau randame $\vec{V}_B$ ilgį kaip ir punkte **d)**.



9 pav.

4. Kalorimetre yra $t_0 = 90\,°\mathrm{C}$ temperatūros vandens. Į vandenį įberiama įkaitintų vario drožlių. Drožlių masė lygi vandens masei. Vandeniui nustojus virti jo lygis kalorimetre tapo toks, koks buvo iki įberiant drožlių. Kokia buvo pradinė vario drožlių temperatūra? Vandens savitoji šiluma $c = 4{,}2\cdot 10^3 \dfrac{\mathrm{J}}{(\mathrm{kg}\cdot °\mathrm{C})}$, savitoji garavimo šiluma $L = 2{,}26\cdot 10^6 \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$, vario savitoji šiluma $c_1 = 380\dfrac{\mathrm{J}}{(\mathrm{kg}\cdot °\mathrm{C})}$, vandens tankis $\rho = 10^3 \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, vario tankis $\rho_1 = 8{,}9\cdot 10^3 \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Šilumos nuostolių ir vario šiluminio plėtimosi nepaisykite.

Sprendimas
Vario drožlių išskirtas šilumos kiekis suvartojamas vandeniui šildyti ir garinti. Pagal energijos tvermės dėsnį:

$$cm(t - t_0) + L\Delta m = c_1 m_1 (t_x - t), \qquad (1)$$

čia $t = 100\,°\mathrm{C}$ vandens virimo temperatūra. Pagal sąlygą $m_1 = m$ – vario drožlių masė.
Kadangi vandens lygis kalorimetre nepakito, tai vario drožlių tūris lygus išgaravusio vandens tūriui:

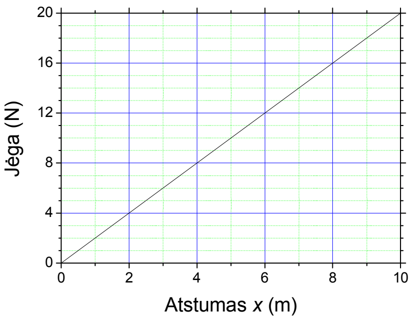
$$\frac{\Delta m}{\rho} = \frac{m}{\rho_1}. \quad \Delta m = m\frac{\rho}{\rho_1}. \qquad (2)$$

(2) lygtį įrašę į (1), gauname $cm(t - t_0) + Lm\dfrac{\rho}{\rho_1} = c_1 m (t_x - t).$

Iš čia $$t_x = t + \frac{c}{c_1}\left(t - t_0\right) + \frac{L}{c_1}\frac{\rho}{\rho_1}.$$

$$t_x \approx 879\ ^\circ\text{C}.$$

5. Vienintelė jėga, veikianti judantį išilgai x-ašies masės $m = 4$ kg kūną šios ašies kryptimi, nuo atstumo x priklauso taip, kaip parodyta paveiksle. Koks kūno greitis, jam esant atstumu $x = 9$ m nuo koordinačių pradžios, jei kūnui esant atstumu $x_1 = 1$ m jo greitis buvo $v_1 = 5$ m/s?

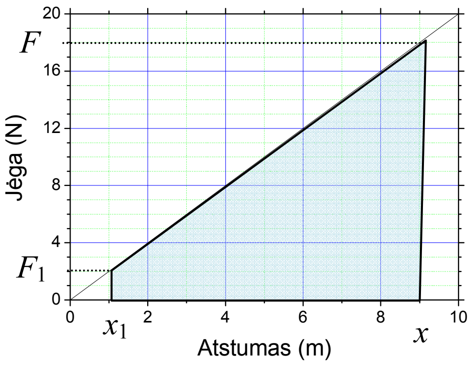


Sprendimas

Taške atstumu $x = 9$ m nuo koordinačių pradžios kūno kinetinė energija lyginant su tašku atstumu $x_1 = 1$ m padidėja dydžiu, lygiu darbui, kurį atlieka veikianti kūną jėga, t.y.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + A\ .$$

Jėgos darbas kūnui judant nuo taško $x_1 = 1$ m iki taško $x = 9$ m lygus plotui figūros, apribotos priklausomybe $F(x)$, x-ašimi ir statmenimis, iškeltais iš x_1 ir x (žr. brėž.). Šis darbas lygus pažymėtos brėžinyje trapecijos plotui, t.y.

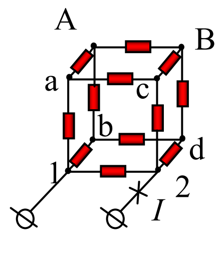


$$A = \frac{(F + F_1)(x - x_1)}{2}.$$ Taigi

$$v = \sqrt{\frac{2A + mv_1^2}{m}} = \sqrt{\frac{(F + F_1)(x - x_1)}{m} + v_1^2} =$$

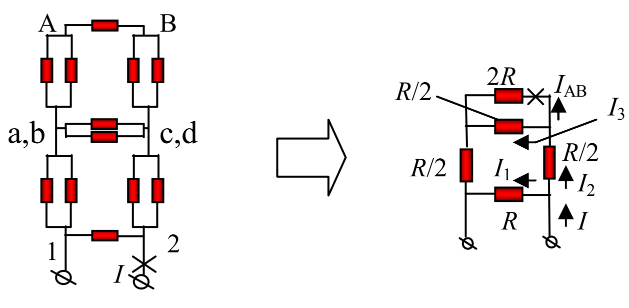
$$= \sqrt{\frac{20 \cdot 8}{4} + 5^2} \approx 8{,}1\ (\text{m/s}).$$

6. Kubą sudaro kraštinės, kurių kiekvienos varža R. Prie kubo 1 ir 2 prijungus srovės šaltinį į kubą einančiais laidais teka srovė, kurios stipris I. Koks tekančios kubo kraštine AB srovės stipris I_{AB}?



Sprendimas

Kubo kampinius taškus (a ir b bei c ir d), simetriškus 1 ir 2 kampų atžvilgiu, galime sujungti, nes šie taškai turi vienodą potencialą. Tai ekvivalentiška schemoms



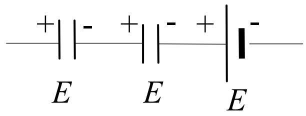
Tada galime užrašyti lygčių sistemas:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I \\ \dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{\frac{7}{5}R}{R} \end{cases}. \qquad \text{Iš čia } I_2 = \frac{5}{12}I.$$

$$\begin{cases} I_3 + I_{AB} = \dfrac{5}{12}I \\ \dfrac{I_3}{I_{AB}} = \dfrac{2R}{R/2} \end{cases}. \qquad \text{Iš čia } I_{AB} = \frac{1}{12}I.$$

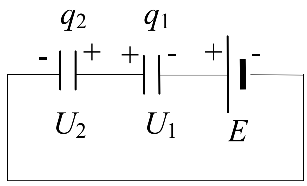
7. Turite elektrovaros šaltinį, kurio gnybtų potencialų skirtumas *E,* ir du vienodus kondensatorius. Kokį didžiausia potencialų skirtumą φ galima pasiekti su šiais prietaisais?

Sprendimas.
Įelektrinus abu kondensatorius nuo elektrovaros šaltinio ir sujungus prietaisus nuosekliai (1 pav.), iš karto galima pasiekti potencialų skirtumą $\varphi = 3E$. (5 balai).



1 pav.

Tačiau, galima pasiekti ir didesnį potencialų skirtumą. Įelektrinkime abu kondensatorius ir sujunkime juos kaip parodyta 2 pav. Pažymėsime kondensatorių įtampas U_1 ir U_2, o jų krūvius atitinkamai q_1 ir q_2. Tada galioja du sąryšiai:



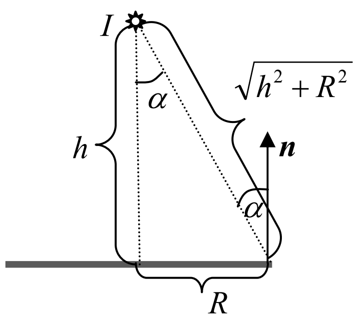
2 pav.

$E + U_1 = U_2$ ir $q_1 + q_2 = 2CE$. Iš čia randame $U_2 = \frac{3}{2}E$. Vėl įelektriname pirmąjį kondensatorių iki potencialų skirtumo E ir pakartojame procedūrą. Tada $E + U_1 = U_2$, $q_1 + q_2 = 3CE$, $U_2 = \frac{7}{4}E$. Nesunku įsitikinti, kad pakartojus procedūrą daug kartų, antrąjį kondensatorių galima įelektrinti iki potencialų skirtumo $U_2 = 2E$. Tada

$\boxed{\varphi_{\max} = 4E.}$ (10 balų)

8. Kokiame aukštyje *h* virš spindulio *R* = 1 m apskrito stalo centro reikia pakabinti lempą, kad stalo centras būtų apšviestas *n* = 8 kartus stipriau negu jo kraštai?
Sprendimas
Turime palyginti apšviestumą *E* stalo centre ir ties jo kraštu. Bendru atveju apšviestumas lygus

$$E = \frac{I}{x^2}\cos\alpha.$$



Čia *I* – taškinio šviesos šaltinio (lempos) stipris, *x* – atstumas iki apšviesto paviršiaus taško, α - kampas, kuriuo šviesa krinta į paviršių.

Iš brėžinio matyti, kad stalo centre $E_1 \frac{I}{h^2}$.

Stalo krašte $E_2 = \frac{I}{h^2 + R^2}\cos\alpha$. Iš brėžinio taip pat matyti, kad

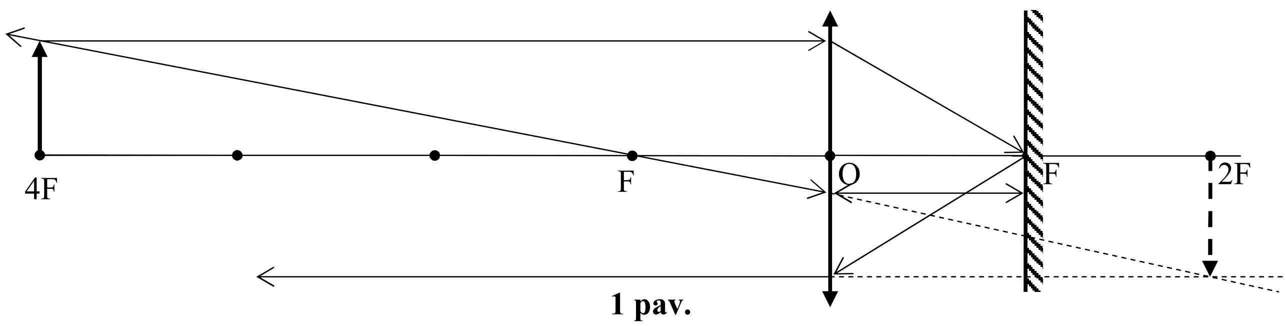
$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}$. Sąlygoje reikalaujama, kad $E_1 = nE_2$, tuo būdu

$\frac{I}{h^2} = nI \frac{h}{(h^2 + R^2)^{3/2}}$. Iš čia randame $h = \frac{R}{\sqrt{n^{2/3} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{m} \approx 0{,}58\,\mathrm{m}$.

9. Glaudžiamojo lęšio žydinio nuotolis *F*. Už lęšio jo židinio plokštumoje pastatytas plokščiasis veidrodis. Atstumu $S = 4F$ prieš lęšį pastatytas daiktas. A) Nubrėžkite daikto atvaizdą, kurį mato akis, esanti šalia daikto. Glaudžiamąjį lęšį pakeitė sklaidomuoju, kurio židinio nuotolis moduliu yra lygus glaudžiamojo lęšio židinio nuotoliui. B) Nubrėžkite daikto atvaizdą, kurį dabar mato akis. C) Apskaičiuokite šių atvaizdų aukščių santykį *n*.

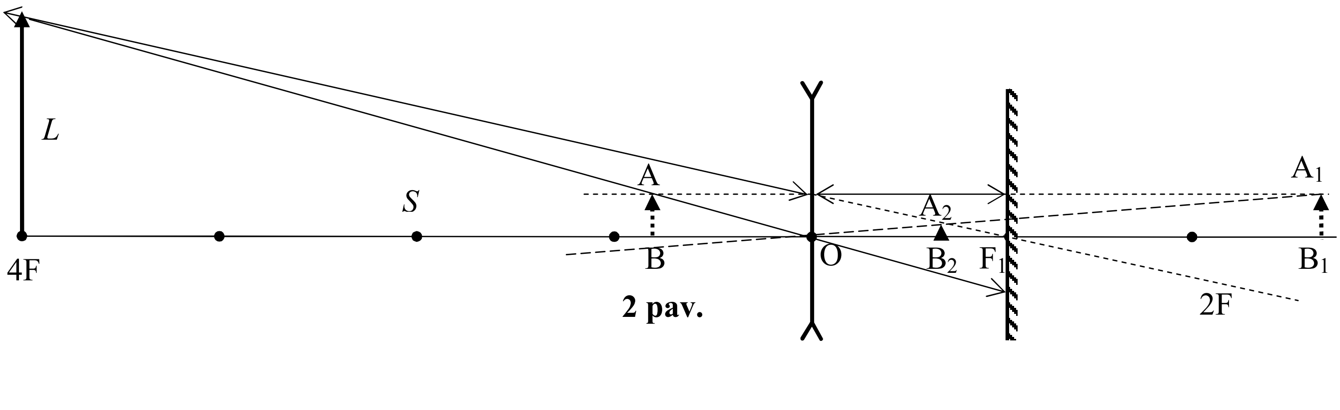
Sprendimas.

A) Nubraižome lęšio, veidrodžio ir daikto išsidėstymą kaip reikalaujama sąlygoje (1 pav.). Pirmąjį spindulį nukreipiame iš daikto viršūnės išilgai optinės ašies. Lūžęs jis eis į lęšio židinį, o atsispindėjęs eis iš židinio. Lūžęs antrąjį kartą spindulys vėl eis lygiagrečiai optinei ašiai. Antrąjį spindulį nukreipiame per lęšio priekinį židinį. Lūžęs jis eis lygiagrečiai optinei ašiai, o atsispindėjęs grįžta tuo pačiu keliu kaip ir atėjo. Išėjusių iš lęšio spindulių tęsinių susikirtimo taškas parodo matomo tariamo atvaizdo viršutinį tašką. (2 balai).



1 pav.

B) Vėl nubraižome lęšio, veidrodžio ir daikto išsidėstymą kaip reikalaujama sąlygoje (2 pav.). Pirmąjį spindulį nukreipiame į lęšio užpakalinį židinį (taškas F_1). Lūžęs jis eis lygiagrečiai optinei ašiai, o atsispindėjęs grįžta tuo pačiu keliu kaip ir atėjo. Antrą spindulį nukreipiame į lęšio optinį centrą O. Šie du spinduliai leidžia rasti atvaizdą AB, kurį sudaro sklaidomasis lęšis. Braižome to atvaizdo veidrodžio kuriamą atvaizdą A_1B_1 ($BF_1=F_1B_1$). Iš taško A_1 išvedame spindulį per lęšio optinį centrą. Šios tiesės ir pirmojo spindulio tęsinio susikirtimo taškas parodo matomo tariamo vaizdo padėtį A_2B_2. (4 balai).

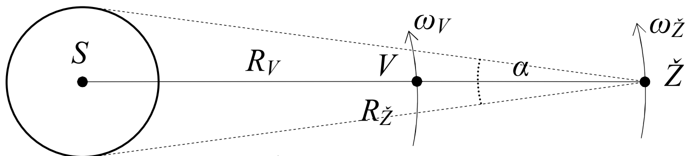


2 pav.

C) Pažymėkime daikto aukštį L. Iš 1 pav. aišku, kad pirmojo atvaizdo dydis yra lygus daikto dydžiui. Ieškomas santykis $n=\frac{L}{\mathrm{A_2B_2}}$. Iš 2 pav.: $\frac{\mathrm{A_2B_2}}{\mathrm{A_1B_1}}=\frac{\mathrm{OB_2}}{\mathrm{OB_1}}$, $\mathrm{A_1B_1}=\mathrm{AB}$, $\frac{\mathrm{AB}}{L}=\frac{\mathrm{BO}}{S}$. Iš sklaidomojo lęšio formulės pirmajam vaizdui $\frac{1}{S}-\frac{1}{\mathrm{BO}}=-\frac{1}{F}$, $\mathrm{BO}=\frac{4}{5}F$. $\mathrm{OB_1}=2F+\mathrm{BO}=\frac{14}{5}F$. Iš sklaidomojo lęšio formulės antrajam vaizdui $\frac{1}{OB_1}-\frac{1}{\mathrm{OB_2}}=-\frac{1}{F}$, $\mathrm{OB_2}=\frac{14}{19}F$. Išsprendę lygčių sistemą gauname, $\boxed{n=19}$. (4 balai).

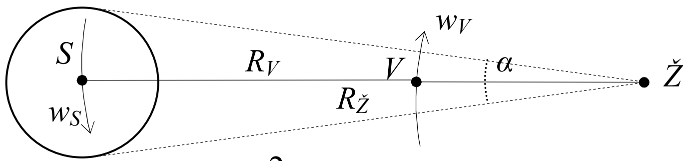
10. Įdomus astronomijos reiškinys yra vadinamasis Veneros tranzitas (matomas Veneros judėjimas Saulės disku), vykstantis vidutiniškai ne dažniau kaip vieną kartą per šimtmetį. Paskutinis tranzitas buvo stebėtas 2004 liepos 8 d., o kitas įvyks palyginus labai greitai – 2012 birželio 6 d. Įvertinkite, koks yra ilgiausias įmanomas tranzito laikas τ? Veneros orbitos spindulys sudaro $k=0{,}723$ Žemės orbitos spindulio, Saulės skersumo iš Žemės matomas kampu $\alpha=0{,}5^\circ$.

Sprendimas.
Pirmas būdas.
Pažymime Žemės kampinį greitį orbitoje aplink Saulę $\omega_Ž$, jos orbitos spindulį $R_Ž$, o Veneros – atitinkamai ω_V ir $R_V=kR_Ž$ (1 pav.). Žinoma, kad planetos sukasi ta pačia kryptimi. Ilgiausias laikas τ gaunamas, kai Venera juda pro Saulės disko centrą.



1 pav.

Uždavinį spręsime koordinačių sistemoje, surištoje su Žeme, t. y. „sustabdysime" Žemę jos judėjime aplink Saulę (2 pav.). Tada $\alpha=\tau(w_V-w_S)$. Čia $w_S=-\omega_Ž$ yra Saulės kampinis greitis Žemės atžvilgiu, o $w_V=\frac{v}{R_Ž-R_V}$ yra Veneros kampinis greitis Žemės atžvilgiu. Tranzito metu planetos yra praktiškai vienoje tiesėje su Saule, dėl to jų linijiniai greičiai Saulės atžvilgiu yra lygiagretūs ir turi tą pačią kryptį. Tada Veneros linijinis greitis Žemės atžvilgiu $v=\omega_V R_V-\omega_Ž R_Ž$. Gauname $w_V-w_S=(\omega_V-\omega_Ž)\frac{k}{1-k}$ ir $\tau=\frac{\alpha(1-k)}{k(\omega_V-\omega_Ž)}$.



2 pav.

Iš trečiojo Keplerio dėsnio $\omega_V^2R_V^3=\omega_Ž^2R_Ž^3$ ir $\omega_V=\omega_Ž k^{-3/2}$. Tada $\tau=\frac{\alpha(1-k)}{k\omega_Ž(k^{-3/2}-1)}$.

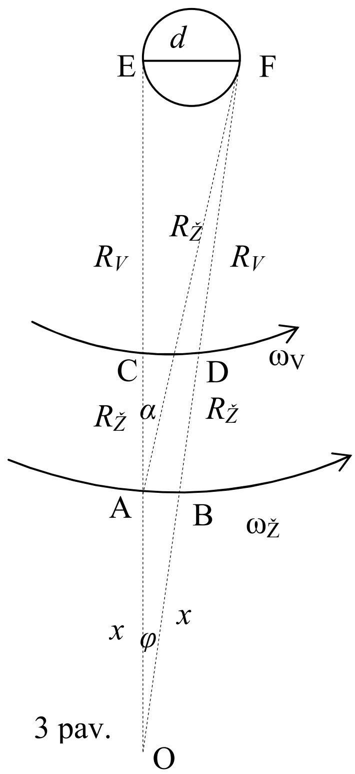
Žemės kampinį greiti išreškiame per jos sukimosi aplink Saulę periodą $T\approx 365\ \mathrm{d}=8760\ \mathrm{h}$,

$$\omega_Ž=\frac{360^\circ}{T}.$$

$$\boxed{\tau=\frac{\alpha T(1-k)}{360^\circ(k^{-1/2}-k)}},\quad \boxed{\tau=\frac{0{,}5\cdot 8760\cdot(1-0{,}723)}{360\cdot(0{,}723^{-0{,}5}-0{,}723)}\approx 7{,}4\ (\mathrm{h})}.$$

Antras būdas

Nubraižome brėžinį (3 pav.). Visame sprendime naudosimės tuo, kad kampai yra labai maži. Taškas A – pradinė Žemės padėtis, taškas B – galinė Žemės padėtis, taškas C - pradinė Veneros padėtis, taškas D – galinė Veneros padėtis. Žemės orbitos spindulys $R_{\check{Z}} \approx AE = BF \approx AF$, Veneros orbitos spindulys $R_V \approx CE = DF$, Saulės skersmuo $d = \alpha R_{\check{Z}}$. Žemės kampinis greitis $\omega_{\check{Z}}$, Veneros kampinis greitis ω_V. Pažymėsime $x = AO = BO$ ir $\angle AOB = \varphi$.



3 pav.

Iš trečiojo Keplerio dėsnio $\omega_V^2 R_V^3 = \omega_{\check{Z}}^2 R_{\check{Z}}^3$ ir $\omega_V = \omega_{\check{Z}} k^{-3/2}$.

$$\varphi = \frac{d}{x + R_{\check{Z}}},$$

$$\varphi = \frac{\alpha R_{\check{Z}}}{x + R_{\check{Z}}}.$$

$$\varphi = \frac{\mathrm{AB}}{x}, \quad \varphi = \frac{\omega_{\check{Z}} R_{\check{Z}} \tau}{x}.$$

$$\varphi = \frac{\mathrm{CD}}{x + R_{\check{Z}} - R_V}, \quad \varphi = \frac{\omega_V R_V \tau}{x + R_{\check{Z}} - R_V},$$

$$\varphi = \frac{\omega_{\check{Z}} R_{\check{Z}} \tau}{\left(x + R_{\check{Z}}(1-k)\right)\sqrt{k}}.$$

$$\frac{\omega_{\check{Z}} R_{\check{Z}} \tau}{x} = \frac{\omega_{\check{Z}} R_{\check{Z}} \tau}{\left(x + R_{\check{Z}}(1-k)\right)\sqrt{k}}, \quad x = \left(x + R_{\check{Z}}(1-k)\right)\sqrt{k}, \quad x = R_{\check{Z}} \frac{(1-k)\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}, \quad x = R_{\check{Z}}\left(k + \sqrt{k}\right)$$

$$\frac{\alpha R_{\check{Z}}}{x + R_{\check{Z}}} = \frac{\omega_{\check{Z}} R_{\check{Z}} \tau}{x}, \quad \tau = \frac{\alpha x}{\omega_{\check{Z}}\left(x + R_{\check{Z}}\right)}, \quad \tau = \frac{\alpha}{\omega_{\check{Z}}} \cdot \frac{k + \sqrt{k}}{k + \sqrt{k} + 1}.$$

Žemės kampinį greitį išreškiame per jos sukimosi aplink Saulę periodą $T \approx 365\ \mathrm{d} = 8760\ \mathrm{h}$,

$\omega_{\check{Z}} = \dfrac{360^\circ}{T}$. $\boxed{\tau = \dfrac{\alpha T}{360^\circ} \cdot \dfrac{k + \sqrt{k}}{k + \sqrt{k} + 1}}$. Nesunku įsitikinti, kad šis atsakymas tapatingas pirmajam.

$$\tau = \frac{0{,}5 \cdot 8760}{360} \cdot \frac{0.723 + \sqrt{0.723}}{0.723 + \sqrt{0.723} + 1} \approx 7{,}4\ (\mathrm{h}).$$