60 – osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados

11 klasės

Teorinių užduočių sprendimai

1 uždavinys

Sąlyga. Astronautas, kurio masė $M_A = 150\,\text{kg}$, atlieka darbus atviroje kosminėje erdvėje. Astronautą laiko $L = 100\,\text{m}$ ilgio lynas. Įvertinkite lyno įtempimo jėgą *T*. Kosminio laivo orbitos aukštis nuo Žemės centro yra $R_L = 6500\,\text{km}$, o Žemės spindulys $R_Ž = 6400\,\text{km}$. Kosminis laivas ir astronautas yra vienoje tiesėje nuo Žemės centro ties pusiauju. Kosminio laivo masė žymiai didesnė už astronauto masę.

Nurodymas: pasinaudoti apytikre formule:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \approx 3(a-b)a^2 \approx 3(a-b)b^2$, *jei a-b<<a, b.*

Sprendimas. Kosminis laivas juda aplink Žemę veikiamas gravitacijos jėgos:

$$F = G\frac{M_L M_Ž}{R_L^2}, \qquad \text{(1 taškas)}$$

čia *G* – gravitacijos konstanta. Ši jėga vaidina įcentrinės jėgos vaidmenį, todėl kosminiam laivui:

$$G\frac{M_L M_Ž}{R_L^2} - T = M_L \Omega^2 R_L, \qquad \text{(2 taškai)}$$

čia $M_Ž$ – Žemės masė, M_L – kosminio laivo masė, Ω -jo kampinis greitis.

Tegul astronautas yra toliau nuo Žemės nei kosminis laivas (jei astronautas būtų arčiau Žemės nei kosminis laivas, analizė būtų analogiška, o galutinis atsakymas toks pat) . Tada lygtis astronautui:

$$G\frac{M_A M_Ž}{R_A^2} + T = M_A \Omega^2 R_A, \qquad \text{(1 taškas)}$$

čia M_A – astronauto masė, R_A – astronauto atstumas iki Žemės centro.

Kadangi ir astronautas, ir kosminis laivas yra vienoje tiesėje nuo Žemės centro ties pusiauju, tai:

$$\frac{1}{M_L R_L}\left(G\frac{M_L M_Ž}{R_L^2} - T\right) = \frac{1}{M_A R_A}\left(G\frac{M_A M_Ž}{R_A^2} + T\right). \qquad \text{(1 taškas)}$$

Iš pastarosios lygties randame įtempimo jėgą *T*:

$$T = \frac{M_L M_A}{M_L R_L + M_A R_A}\left(\frac{R_A^3 - R_L^3}{R_L^2 R_A^2}\right) M_Ž G \qquad \text{(1 taškas)}$$

Pasinaudojame nuoroda:

$R_A^3 - R_L^3 \approx 3R_Ž^2 L$. Be to, $R_L \approx R_A \approx R_Ž$, o laisvojo kritimo pagreitis $g = G\frac{M_Ž}{R_Ž}$. (1 taškas)

Tada
$$T = 3\frac{M_L M_A}{M_L + M_A} L \frac{M_Ž G}{R_Ž^3} = 3\frac{L}{R_Ž}\frac{M_L M_A}{M_L + M_A} g, \qquad \text{(1 taškas)}$$

Kadangi $M_L >> M_K$, tai lygtis tampa paprasčiausios formos:

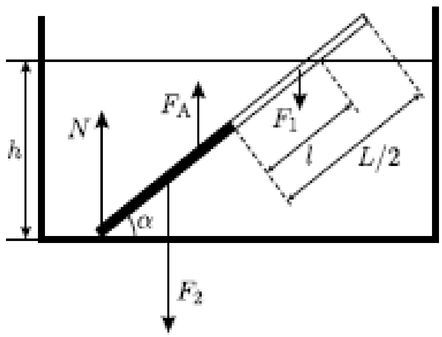
$$T = 3\frac{L M_A g}{R_Ž} = \frac{3\cdot 100\cdot 150\cdot 9{,}8}{6400\cdot 10^3} \approx 0.07N \qquad \text{(2 taškai)}$$

Akivaizdu, kad lyno įtempimo jėga yra pakankama, kad išlaikytų astronautą.

2 uždavinys

Sąlyga. Baseino dugne guli L = 1 m ilgio plonas strypas, sudarytas iš dviejų vienodo ilgio ir skerspjūvio dalių. Atitinkami jų tankiai yra $\rho_1 = 500 \, kg/m^3$ ir $\rho_2 = 2000 \, kg/m^3$. Į baseiną iš lėto pilamas vanduo, kurio tankis $\rho_v = 1000 \, kg/m^3$. Kai vandens lygis baseine pasiekia aukštį h, strypas su baseino dugnu sudaro $\alpha = 45^0$ kampą. Apskaičiuokite aukštį h.

Sprendimas



(už brėžinį 1 taškas)

Vidutinis strypo tankis $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 1250 \, kg/m^3$ didesnis negu vandens tankis, todėl plaukioti vandens paviršiuje strypas negali ir pilant vandenį sunkesniu galu turi remtis į baseino dugną. (1 taškas)

Sunkusis strypo galas bus panardintas į vandenį visiškai, o lengvasis gali būti dalinai iškilęs iš vandens. (1 taškas)

Pažymėkime po vandeniu esančią lengvąją strypo dalį l, strypo skerspjūvio plotą S.

Suraskime jėgas, veikiančias strypą. Tai baseino dugno atramos reakcijos jėga N, sunkio jėgos $F_1 = \frac{1}{2} LS\rho_1$ ir $F_2 = \frac{1}{2} LS\rho_2$ ir Archimedo jėga $F_A = \rho_v gS\left(\frac{L}{2} + l\right)$. (2 taškai)

Jėgos F_1 ir F_2 veikia atitinkamų strypo dalių masių centrus, o jėga F_A veikia panirusios strypo dalies vidurį.

Užrašykime strypą veikiančių jėgų momentus. Momentus užrašome ašies, statmenos brėžinio plokštumai ir einančios per strypo galo sąlyčio su baseino dugnu tašką. Šiuo atveju atramos reakcijos jėgos N petys bus lygus 0. Pagal momentų taisyklę:

$$\frac{LS\rho_1 g}{2} \cdot \frac{3L\cos\alpha}{4} + \frac{LS\rho_2 g}{2} \cdot \frac{L\cos\alpha}{4} - \rho_v gS\left(\frac{L}{2} + l\right)\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} + l\right)\cos\alpha = 0.$$ (2 taškai)

Abi šios lygties puses galima padalinti iš $\frac{Sg\cos\alpha}{2}$.

Vandens lygio aukštis h yra tiesiogiai susijęs su panirusia strypo dalimi:

$$h = \left(\frac{L}{2} + l\right)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad l = \frac{h}{\sin\alpha} - \frac{L}{2}$$ (1 taškas)

Įstatę gautąją l išraišką į jėgos momentų lygtį, apskaičiuojame aukštį h:

$$\frac{L^2}{4}(3\rho_1 + \rho_2) = \rho_v \frac{h^2}{\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L\sin\alpha}{2}\sqrt{\frac{3\rho_1 + \rho_2}{\rho_v}}.$$ (1 taškas)

Įstačius dydžių vertes, gauname, kad

$h \approx 0{,}66 m.$ (1 taškas)

3 uždavinys

Sąlyga. Vienatomių idealiųjų dujų ciklas *p-V* diagramoje vaizduojamas stačiakampiu, kurio kraštinės lygiagrečios *p* ir *V* ašims. Rasti didžiausią ciklo naudingumo koeficientą.

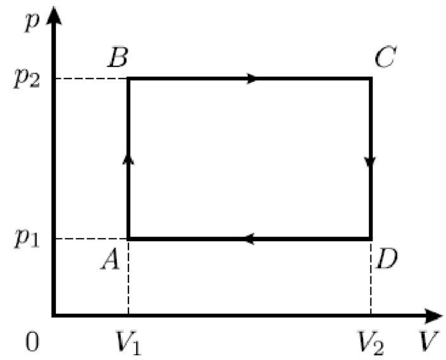
Sprendimas.

Stačiakampio formos ciklas parodytas *p-V* diagramoje.
Šio ciklo naudingumo koeficientas yra lygus per ciklą atlikto naudingo darbo *A* ir gauto šilumos kiekio Q_+ santykiui:

$$\eta = \frac{A}{Q_+} \qquad (1) \qquad (1\ \text{taškas})$$

Atliktas darbas lygus stačiakampio plotui, t.y.

$A = (V_2 - V_1)(p_2 - p_1) = \Delta V \cdot \Delta p$. (2) (1 taškas)



(už brėžinį 1 taškas)

Randame šilumos kiekį, gaunamą AB ir BC procesų metu.
Kadangi AB procesas izochorinis, tai pagal 1 TD dėsnį dujų gauta šiluma Q_{AB} sunaudojama vidinei energijai ΔU padidinti, t.y.

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2}\nu R(T_B - T_A). \qquad (3) \qquad (1\ \text{taškas})$$

Čia ν - dujų molių skaičius, R – universalioji dujų konstanta.
BC proceso metu gauta šiluma sunaudojama ir vidinei energijai padidinti, ir darbui atlikti:

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + A_{BC} = \frac{3}{2}\nu R(T_C - T_B) + p_2(V_2 - V_1) \qquad (4) \qquad (1\ \text{taškas})$$

Pasinaudodami Mendelejevo ir Klapeirono lygtimi, apskaičiuojame temperatūrų pokyčius.
Procesui AB būsenos A lygtį $p_1V_1 = \nu RT_A$ atėmę iš būsenos B lygties $p_2V_1 = \nu RT_B$ gauname

$$Q_{AB} = \frac{3}{2}\nu R(T_B - T_A) = \frac{3}{2}V_1(p_2 - p_1) \qquad (5) \qquad (1\ \text{taškas})$$

Panašiai procesui BC gauname:

$$Q_{BC} = \frac{3}{2}\nu R(T_C - T_B) + p_2(V_2 - V_1) = \frac{3}{2}p_2(V_2 - V_1) + p_2(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1) \qquad (6) \qquad (1\ \text{taškas})$$

(2), (5) ir (6) įrašę į (1) gauname

$$\eta = \frac{\Delta p \Delta V}{\frac{3}{2}V_1(p_2 - p_1) + \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1)}$$

Pasinaudodami sąryšiu $p_2 = p_1 + \Delta p$, vardiklį išskaidome patogiais dėmenimis:

$$\eta = \frac{\Delta p \Delta V}{\frac{3}{2}V_1(p_2 - p_1) + \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1)} = \frac{\Delta p \Delta V}{\frac{3}{2}V_1\Delta p + \frac{5}{2}p_1\Delta V + \frac{5}{2}\Delta p \Delta V} \qquad (1\ \text{taškas})$$

Suprastinę iš $\Delta p \Delta V$ gauname:

$$\eta = \frac{1}{\frac{3}{2}\frac{V_1}{\Delta V} + \frac{5}{2}\frac{p_1}{\Delta p} + \frac{5}{2}}$$

Gauta trupmena maksimali, kai vardiklis minimalus. Vardiklis minimalus tada, kada pirmieji du sumos vardiklyje nariai bus lygūs nuliui. Taip bus tada, kai tūrio ir slėgio pokyčiai ciklo metu yra daug didesni už p_1 ir V_1, t.y. $p_1 \ll \Delta p$ ir $V_1 \ll \Delta V$. (2 taškai)

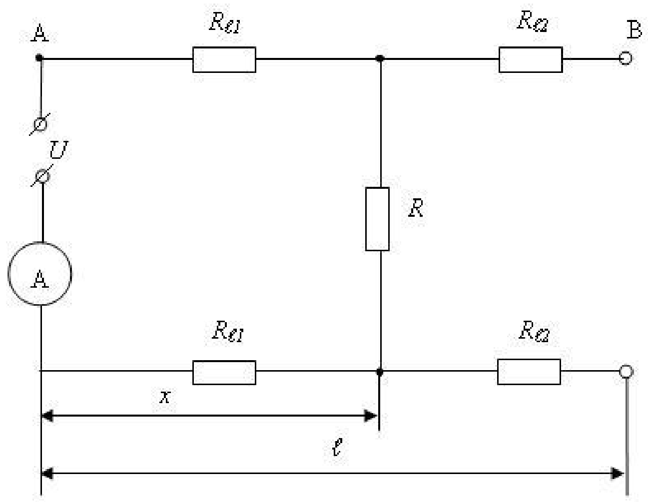
Tuo būdu ribiniu atveju gauname maksimalų naudingumo koeficientą: $\eta = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

4 uždavinys

Sąlyga. Tarp dviejų punktų A ir B, esančių atstumu ℓ = 4 km, nutiestas dviejų laidų kabelis. Jo viduje buvo pažeista izoliacija (izoliacijos pažeidimas ekvivalentus rezistoriaus įjungimui tarp laidų pažeidimo vietoje). Norint nustatyti pažeidimo vietą, punkte A buvo įjungtas U = 15 V įtampos šaltinis ir ampermetras. Kai B gale laidai buvo atjungti, ampermetras rodė I_1 = 1 A stiprio srovę. Kai laidai buvo sujungti trumpai, srovės stipris I_2= 1,8 A. Kokiu atstumu nuo punkto A buvo pažeista linija ir kokia izoliacijos varža pažeidimo vietoje? Laido ilgio vieneto varža ρ = 1,25 Ω/km.

Sprendimas. Tegu: R – izoliacijos varža pažeidimo vietoje,
$R_{\ell 1}$ – laidų varža nuo taško A iki pažeidimo vietos,
$R_{\ell 2}$ – laidų varža nuo pažeidimo vietos iki taško B.

Nubraižome schemą. (*1 taškas*)



Kai laidai taške B atjungti, tai pagal Omo dėsnį galime parašyti:

$$U = I_1(2R_{\ell 1} + R) = I_1(\rho 2x + R). \qquad (1)$$

(*1 taškas*)

Kai laidai taške B sujungti trumpai, tai rezistoriui R lygiagrečiai prijungiama varža $2R_{\ell 2}$.

Todėl $$U = I_2\left(\rho 2x + \frac{R \cdot 2(\lambda - x)\rho}{R + 2(\lambda - x)\rho}\right). \qquad (2)$$

(*1 taškas*)

Iš (1) lygties $$x = \frac{U}{2\rho I_1} - \frac{R}{2\rho}. \quad (3)$$ (*1 taškas*)

(3) lygtį įrašę į (2), gauname:

$$I_2 R^2 - 2U(\frac{I_2}{I_1} - 1)R + (\frac{I_2}{I_1} - 1)(\frac{U^2}{I_1} - 2\lambda\rho U) = 0 \ .$$ (*1 taškas*)

Iš čia:

$$R = \frac{2U(\frac{I_2}{I_1} - 1) \pm \sqrt{4U^2(\frac{I_2}{I_1} - 1)^2 - 4I_2(\frac{I_2}{I_1} - 1)(\frac{U^2}{I_1} - 2\lambda\rho U)}}{2I_2} \ .$$ (*2 taškai*)

R_1 = 10 Ω, R_2 = 3,3 Ω . (*1 taškas*)

Gautas vertes įrašę į (3) lygtį, gauname:
x_1 = 2 km, x_2 = 4,7 km . (*1 taškas*)

Kadangi atstumas tarp punktų ℓ = 4 km, tai antroji šaknis neturi prasmės. Todėl

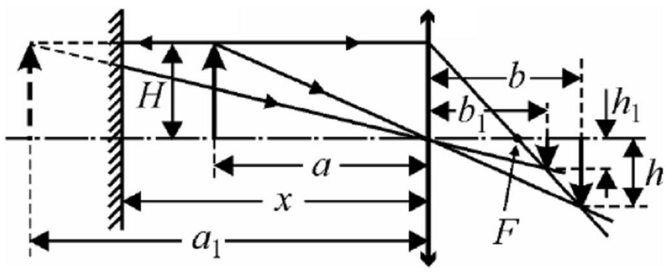
<u>x = 2 km</u>, <u>R = 10 Ω</u> . (*1 taškas*)

5 uždavinys

Sąlyga. Optinę sistemą sudaro glaudžiamasis lęšis, kurio židinio nuotolis F, ir veidrodis, pastatytas statmenai lęšio pagrindiniai optiniai ašiai. Tarp lęšio ir veidrodžio yra strypas, pastatytas statmenai lęšio pagrindiniai optiniai ašiai atstumu $a = 1{,}5F$ nuo lęšio. Koks turi būti atstumas x nuo lęšio iki veidrodžio, kad dviejų tikrųjų atvaizdų aukščių santykis k būtų lygus 3 ? Pateikite spindulių eigos optinėje sistemoje brėžinį su visų sprendimui reikalingų atstumų ir aukščių pažymėjimais, sąlygoje duotų dydžių vertes įrašykite tik į galutinę išraišką.

Sprendimas.

Pirmąjį strypo atvaizdą, kurio aukštis h, formuoja spinduliai, išeinantys iš objekto. Antrąjį atvaizdą, kurio aukštis h_1, formuoja spinduliai, kurių tęsiniai išeina iš menamo, veidrodžio sukurto strypo atvaizdo. Strypo aukštį pažymėkime H, atstumą nuo lęšio iki menamo atvaizdo veidrodyje a_1, o atstumus nuo lęšio iki tikrųjų atvaizdų atitinkamai b ir b_1.



(2 taškai)

Tada iš panašių trikampių: $\dfrac{h}{H} = \dfrac{b}{a}$ ir $\dfrac{h_1}{H} = \dfrac{b_1}{a_1}$. (1 taškas)

Taikome plono lęšio lygtį: $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{b_1}$. (1 taškas)

Tada $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a-F}{F}$ ir $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_1 - F}{F}$. (1 taškas)

Tikrųjų atvaizdų aukščių santykis $k = \dfrac{h}{h_1} = \dfrac{a_1 b}{a b_1} = \dfrac{a_1 - F}{a - F} = 2\dfrac{x-F}{a-F} - 1$, (2 taškai)

kadangi $a_1 = a + 2(x - a) = 2x - a$.

Iš lygties k išreiškiame atstumą nuo veidrodžio iki lęšio: $x = \dfrac{1}{2}\big((k+1)a - (k-1)F\big)$. (2 taškai)

Kai atstumas $a = 1{,}5F$ ir $k = 3$, atstumas iki veidrodžio $x = 2F$. (1 taškas)